Josef Žďárek

O involuci průsečíků křivek s racionálnou kubikou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 195--204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123245

4. la vitesse du changement du courant anodique est d'autant plus grande, qu'est plus grand le potentiel anodique et le dernier changement de ce potentiel.

Tous ces phénomènes prouvent que la lampe contient des traces de certains gaz ou vapeurs. Ces matières peuvent, suivant l'opinion de Langmuir, former, sur le fil de Wolfram, une couche ayant un pouvoir émissif moindre que celui du Wolfram pur. C'est ainsi qu'on peut s'expliquer que le courant anodique n'est pas constant, même quand il surpasse le potentiel saturant. On peut expliquer, de même, par cette supposition le changement du courant anodique (les „marches").

Les électrons émis par le fil incandescent, et accélérés, par le champ électrique entre la cathode et l'anode, ionisent, par leur choc, les molécules du gaz. Par là se produisent des électrons et des molécules à charge positive, se mouvant vers la cathode et se déposant sur elle. De l'autre coté, des molécules de gaz sortent sans cesse de la superficie de la cathode, jusqu'à ce que l'équilibre est établi. Si l'on augmente brusquement le potentiel anodique, l'énergie cinétique des électrons sortant de la cathode croît, les électrons produits par l'ionisation du gaz s'associent aux premiers — le courant anodique s'accroît. Cependant, les molécules à charge positive du gaz se déposent lentement sur la cathode et diminuent leur pouvoir émissif — le courant anodique se stabilise à la grandeur qui répond à l'état d'équilibre.

On peut expliquer, d'une manière analogue, les détails rappelés sous 3. et 4.

O involuci průsečíků křivek s racionálnou kubikou.

Napsal *J. Žďárek*, profesor průmyslové školy v Praze.

1. Budiž dán na kružnici K pevný bod i a mimo to soustava $n-1$ bodů $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$; sestrojme n-tý bod a_n tak, abychom sečtením všech oblouků $\widehat{ia_1}, \widehat{ia_2}, \ldots \widehat{ia_{n-1}}, \widehat{ia_n}$ dospěli do bodu i, čili aby bylo

$$\widehat{ia_1} + \widehat{ia_2} + \ldots + \widehat{ia_{n-1}} + \widehat{ia_n} = 2\,k\,\pi, \qquad (1)$$

kde k značí číslo celé. Každých $n-1$ z těchto bodů stanoví jednoznačně zbývající bod, takže těchto n bodů tvoří uzavřenou grupu.

Konstrukci bodu a_n možno provésti tak, že sestrojíme bod p tak, aby $\widehat{ip} = \widehat{ia_1} + \widehat{ia_2} + \ldots + \widehat{ia_{n-1}}$, načež a_n leží souměrně ku p vůči průměru bodem i procházejícímu. Místo přenášení oblouků možno vésti bodem i rovnoběžku s $\overline{a_1 a_2}$, její průsečík 1 s K spojíme s a_3 a s touto spojnicí vedeme bodem i zase rovnoběžku, její průsečík 2 s K spojíme s a_4 atd. až poslední bodem i jdoucí rovnoběžka vytne na K bod p. Vedeme-li tímto rovnoběžku s tečnou kružnice v bodě i, prochází tato bodem a_n. Konstrukci možno provésti i tehdy, vyskytují-li se mezi danými body i dvojice sdruženě imaginárné; neboť jest $\widehat{i1} = \widehat{ia_1} + \widehat{ia_2}$ bez ohledu na to, protíná-li $\overline{a_1 a_2}$ kružnici v bodech reálných či imaginárných.

Podobně možno ke každým jiným $n-1$ bodům $b_1 \ldots b_{n-1}$ jednoznačně stanoviti další bod b_n tvořící s nimi uzavřenou grupu. Všechny *takto definované grupy tvoří na K involuci n-tého řádu a n—1-ho stupně* J_n^{n-1}.

2. Vytkneme-li toliko $n-2$ body $a_1 \ldots a_{n-2}$ grupy, jest součet oblouků zbývajících bodů $\widehat{ia_{n-1}} + \widehat{ia_n}$ stálý, a tedy tvoří takovéto dvojice bodové na K kvadratickou involuci, vyťatou rovnoběžkami. Mezi těmito nalézá se i přímka úběžná, a tudíž *úběžné imaginárné body kruhové tvoří s každými n—2-ma body grupu involuce* J_n^{n-1}. Z toho však plyne, že tato involuce není povahy obecné. V obecné involuci J_n^{n-1} vyskytují se totiž skupiny o $n-1$ bodech takové, že libovolný další bod tvoří s nimi grupu involuce. Tyto skupiny — zvané neutrálné grupy involuce J_n^{n-1} — samy tvoří involuci n—1-ho řádu a n—3-ho stupně.*) Zvolíme-li tudíž $n-3$ libovolné body, jest jimi jedna neutrálná grupa určena, a možno stanoviti jednoznačně její zbývající dva body.

V našem případě, hledáme-li ku zvoleným $n-3$ bodům na K další dva takové, aby s těmito n—1 body tvořil každý další grupu, vidíme, že to mohou být toliko úběžné body kruhové, ježto jen tyto ponechávají součet oblouků neurčitý. Vyskytují se tudíž tyto dva body v každé neutrálné grupě, pozůstávající ještě z dalších n—3 libovolných bodů, v čemž spočívá specielní povaha uvažované involuce; tuto budeme v dalším zváti specielní involuce J_n^{n-1}.**)

3. Involuce J_n^{n-1} má n bodů n-násobných $z_1 z_2 \ldots z_n$. Pro tyto přejde rovnice (1) ve tvar $n.\widehat{iz} = 2k\pi$; dosadíme-li $k = 0, 1 \ldots n-1$,

*) Em. Weyr: „Über Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe", Vid. akad. 1879., str. 13.

**) Rozdíl mezi obecnou involucí J_n^{n-1} a specielní objasní tento případ geometrický. Všechny rovinné čtveřiny tvoří na racionálné prostorové křivce 4 stupně obecnou J_4^3, má-li však křivka tato dvojný bod, tu jest J_4^3 specielní. V prvé tvoří neutrálné grupy kubickou involuci, vyťatou trisekantami, jejíž každá trojina je jedním svým bodem úplně stanovena; druhá má v bodě dvojném družinu neutrálnou.

máme $\widehat{iz_1} = 0$, t. j. $z_1 \equiv i, \widehat{iz_2} = \frac{2\pi}{n}, \widehat{iz_3} = \frac{4\pi}{n}, \ldots, \widehat{iz_n} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Jsou tudíž tyto n-násobné body vrcholy pravidelného n-úhelníka, (jedním z nich je bod $i \equiv z_1$) čili tvoří n-árný cyklus; pro n liché tvoří (každý vzat jako jednonásobný) grupu v J_n^{n-1}.

4. Sestrojujíce bod a_n (odst. 1.) mohli jsme místo bodu i použíti kteréhokoliv z bodů z, ježto součty obloukových vzdáleností kterýchkoliv n bodů na K od dvou bodů z liší se o násobky obvodu kružnice K.

Relace (1) lze použíti i tehdy, když některé z daných bodů $a_1 \ldots a_{n-1}$ splývají. Na př. budiž dán bod b_{n-1} jako $n-1$-násobný a hledáme bod b_1, tvořící s ním grupu. Tu jest $\widehat{ib_1} = -(n-1)\widehat{ib}_{n-1}$ (s vynecháním členu $2k\pi$). Znásobení oblouku $\widehat{ib_{n-1}}$ možno provésti i bez kružidla, dle odst. 1.

Dán-li na K bod r_ν jako ν-násobný bod involuce J_n^{n-1}, tu všechny grupy n-ν-bodové, z nichž každá s ním tvoří grupu této involuce, tvoří zase involuci $J_{n-\nu}^{n-\nu-1}$. Tato je opět specielní, majíc v úběžných bodech kružnice K družinu neutrálnou. Proto její body $n-\nu$-násobné $r_{n-\nu}$ tvoří na K vrcholy pravidelného $n-\nu$-úhelníka. Každý z těchto bodů $r_{n-\nu}$ tvoří s bodem r_ν grupu v J_n^{n-1}. Pro obloukové vzdálenosti takovéto dvojice platí

$$\nu \, . \, \widehat{ir_\nu} + (n-\nu)\, \widehat{ir_{n-\nu}} = 2k\pi \tag{2}$$

čili $\widehat{ir_{n-\nu}} = \frac{2k\pi}{n-\nu} - \frac{\nu}{n-\nu}\widehat{ir_\nu}$. Stačí sestrojiti jeden z bodů $r_{n-\nu}$ na př. ten, jemuž odpovídá $k=0$, t. j. $\widehat{ir_{n-\nu}} = -\frac{\nu}{n-\nu}\widehat{ir_\nu}$. Obloukové jeho vzdálenosti od ostatních jsou pak násobky oblouku $\frac{2\pi}{n-\nu}$. K témuž mnohoúhelníku bychom ovšem dospěli, kdybychom měřili oblouky místo od bodu $i \equiv z_1$ od kteréhokoliv z dalších n-násobných bodů $z_2 \ldots z_n$.

5. Specielní involuce J_n^{n-1} na K jest určena, dána-li jedna grupa $a_1 a_2 \ldots a_n$. Neboť body z plynou z rovnice

$$n \, . \, \widehat{za_1} = -(\widehat{a_1a_2} + \widehat{a_1a_3} + \ldots + \widehat{a_1a_n}) + 2k\pi.$$

Involuci tuto možno však přenésti na jakoukoliv racionálnou křivku C; potom bude *úplně určena jednou grupou* (případně bodem n-násobným) *a neutrálnou družinou,* v níž přejdou oba absolutní body kruhové.

Specielní involuci J_n^{n-1} danou na kuželosečce není třeba převáděti na kružnici; je-li Δ spojnicí obou neutrálných bodů (ať reálných nebo imaginárných), doplníme soustavu $a_1 \ldots a_{n-1}$ bodem a_n na grupu, nahradíme-li v konstrukci v odst. 1. uvedené každé rovnoběžky přímkami protínajícími se na ose Δ; podobně lze provésti i projektivné násobení oblouku.

6. Mějme obecnou racionálnou křivku C_p řádu p-tého s

$$\frac{(p-1)\,(p-2)}{2}$$

body dvojnými; všemi těmito dvojnými body až na jediný a dalšími libovolně na C_p zvolenými body, v počtu $np-(p-1)\,(p-2)+1$, položme všechny možné křivky řádu n-tého, kde $n \geqq p-2$ tu tyto protnou C_p vesměs v tomtéž dalším bodě.*)

Tvoří tedy průsečíky zmíněných křivek na C_p involuci řádu $np-(p-1)\,(p-2)+2$ a stupně $np-(p-1)\,(p-2)+1$, kteráž náleží námi uvažovanému typu involucí specielních, majíc ve zbývajícím bodě dvojném družinu neutrálnou.

7. Zabývejme se případem nejjednodušším, t. j. rovinnou racionálnou křivkou 3. řádu C_3. Zvolíme-li na této $3n-1$ libovolných bodů, tu všechny těmito procházející křivky n-tého řádu protnou C_3 v tomtéž dalším bodě, t. j. všechny křivky n-tého řádu vytínají na C_3 involuci J_{3n}^{3n-1}, specielní, ježto dvojný bod d a dalších $3n-2$ libovolných bodů na C_3 tvoří její grupu.

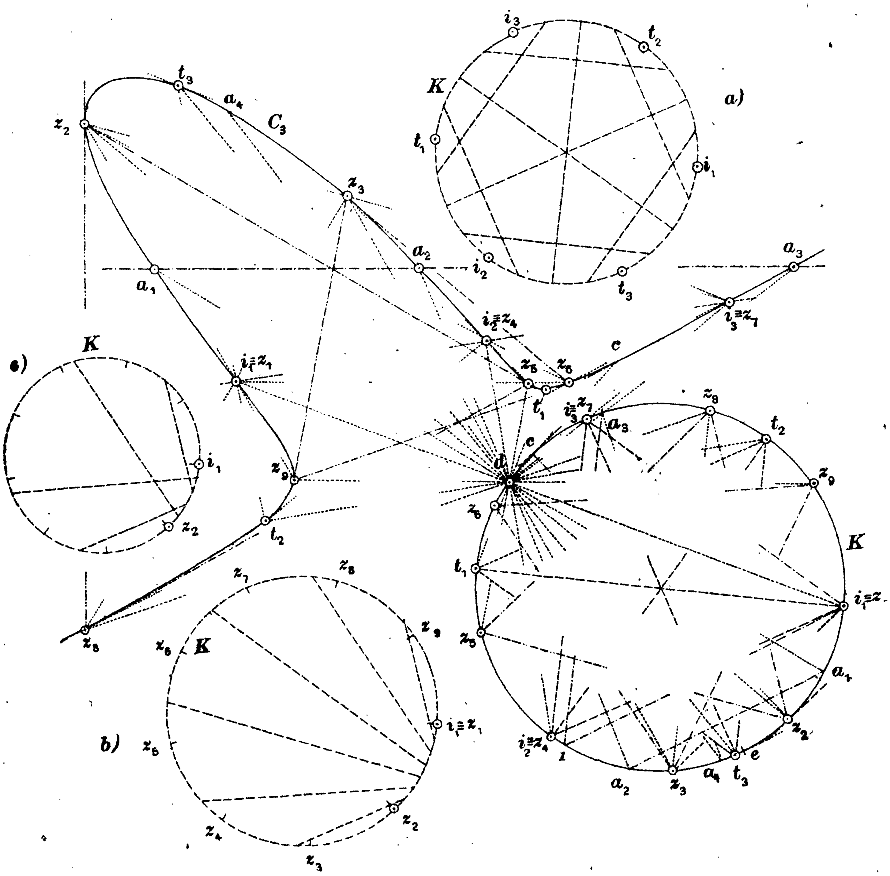
Mezi $3n$-násobnými body involuce — jimiž lze položiti křivky n-tého řádu, neprotínající C_3 v žádném dalším bodě — jsou obsaženy vždy body inflekční, v nichž jedna z křivek těch degeneruje v n-násobnou tečnu inflekční. Pro n sudé patří k nim vždy ony tři body, jimiž lze položiti kuželosečky šestibodového styku; obecně je-li n dělitelno číslem m, jest každý $3m$-násobný bod spolu bodem $3n$-násobným. Všechny $3n$-násobné body tvoří na C_3 cyklus $3n$-árný, v němž jsou na př. první, $n+1$-*ní* a $2n+1$-*ní* člen, body inflekční.

Pomocí bodu inflekčního lze snadno vyhledati zbývající průsečík libovolné křivky s C_3, známe-li všechny ostatní. Jest tu jen třeba zobraziti C_3 na libovolnou kuželosečku, vyhledati obraz jednoho bodu inflekčního, daných průsečíků a obou bodů, stotožněných ve dvojném bodě d křivky C_3 (odst. 5.).

Nejpohodlněji řešíme konstruktivně sem spadající úlohy, zobrazíme-li C_3 na kružnici K tak, aby obrazy obou v d stotožněných

*) Cremona — Weyr: „*Úvod do geom. theorie křivek rovinných*" str. 49. — Dosadíme-li do věty tam uvedené $\delta = \frac{(p-1)\,(p-2)}{2} - 1$, máme hoření výsledek.

bodů připadly do úběžných imaginárných bodů kruhových. V připojeném obrazci zvolena křivka C_3 s isolovaným bodem dvojným d, jehož obě tečny jsou přímky isotropické. Kružnice K prochází bodem d. Každý tímto bodem vedený paprsek protne C_3 ještě v dalším bodě, jehož obrazem je průsečík téhož paprsku s K. Každý pár pravoúhlých paprsků v d náleží paprskové involuci, mající



Obr. 1.

zmíněné paprsky isotropické za samodružné, a proto vytne tento pár na C_3 družinu bodů konjugovaných (majících tentýž bod tečnový), jichž obrazy leží na průměru kružnice K.

Zvolíme-li na C_3 libovolně střed svazku paprskového, vytne tento na C_3 kvadratickou involuční řadu, mající družinu konjugovaných bodů za body samodružné; pročež jest direkční střed obrazu každé takovéto involuce bodem úběžným. Obrazy bodů inflekčních $i_1\, i_2\, i_3$ tvoří na K trojúhelník rovnostranný.*) Jsouť body ty trojinou specielní (cyklický promětné) involuce kubické, jejíž elementy trojnásobné připadají do obou imaginárných úběžných bodů kruhových.**) Všechny trojiny takovéto involuce tvoří rovnostranné trojúhelníky, a proto — vzhledem k předešlé větě — lze všechny trojiny této involuce na C_3 odvoditi promítnutím bodů $i_1\, i_2\, i_3$ z jednotlivých bodů téže křivky. Jednou trojinou jsou body $t_1\, t_2\, t_3$, jež jsou dotyčné body tečen $\overline{i_1\, t_1}$ $\overline{i_2\, t_2}$ $\overline{i_3\, t_3}$ z bodů inflekčních. Jich obrazy $t_1\, t_2\, t_3$ tvoří trojúhelník, středově souměrný ku $i_1\, i_2\, i_3$.

8. *Involuce přímých trojin na C_3.****) Všechny přímky vytnou na C_3 involuci J_3^2; tu není rozdílu mezi involucí obecnou a specielní; involuce má vždy neutrálnou družinu, v tomto případě v bodě d. Body $i_1\, i_2\, i_3$ jsou její elementy trojnásobné.

Jsou-li dány body $a_1\, a_2$ i jich obrazy, a chceme-li nalézti třetí průsečík a_3 spojnice $\overline{a_1\, a_2}$ s C_3, sečtěme (dle 1) oblouky $\widehat{i_1\, a_1}$ $\widehat{i_1\, a_2}$, vedouce na př. $\overline{i_1\, 1} \parallel \overline{a_1\, a_2}$, načež jest bod a_3, souměrný k 1 vůči $\overline{i_1\, t_1}$, obrazem bodu hledaného.

K bodu na př. z_2 najdeme bod tečnový z_8 (v obr.), sestrojíme-li $\widehat{i_1\, z_3} = 2\, \widehat{i_1\, z_2}$, načež je z_8 souměrný bod ku z_3 vůči průměru $\overline{i_1\, t_1}$. Chceme-li naopak nalézti obrazy dotyčných bodů tečen bodem z_8 procházejících, sestrojme ku z_8 souměrný bod z_3 vůči průměru $\overline{i_1\, t_1}$, načež tečny ke K, rovnoběžné s $\overline{i_1\, z_3}$ mají za body dotyčné obrazy obou hledaných bodů z_2, c.

Je-li naopak C_3 na kružnici K tak zobrazena, že obrazy bodů, soumezných s bodem dvojným připadají do úběžných imaginárných bodů kruhových a známe-li obraz libovolné přímé trojiny $a_1\, a_2\, a_3$, lze nalézti obrazy bodů inflekčních $i_1\, i_2\, i_3$: tečna ke K, rovnoběžná s $\overline{a_1\, a_2}$ nechť se dotýká v e; jeden z bodů i leží pak v prvé třetině oblouku $\widehat{ea_3}$.

9. *Mnohoúhelníky křivce C_3 současně vepsané i opsané.* Sestrojíme-li k zvolenému bodu křivky bod tečnový, k tomuto zase bod tečnový, atd., může se státi, že n-tý bod tečnový splývá s bodem původním; tu pak tvoří všechny tyto body n-úhelník křivce C_3

---

*) Body na C_3 a jich obrazy na K označujeme stejně.

**) Em. Weyr: *Über Projektivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung.* Víd. akad., sv. 81.

***) Zevrubně o této involuci pojednává *Em. Weyr* v *„Über die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt“.* Víd. akad., sv. 81.

současně vepsaný i opsaný. Konstrukci takovýchto mnohoúhelníků převedeme na dělení oblouku kruhového.

Je-li φ oblouková vzdálenost obrazu zvoleného bodu od i_1, přísluší tečnovému bodu oblouková vzdálenost -2φ, druhému tečnovému bodu 4φ, třetímu -8φ atd., n-tému $(-2)^n\varphi$. Aby tento splynul s bodem původním, je třeba aby $\varphi + 2k\pi = (-2)^n\varphi$, čili

$$\varphi = \frac{2k\pi}{(-2)^n - 1}.$$

Na př. pro trojúhelníky současně vepsané i opsané nabýváme — dosazujíce $k = 0, 1 \ldots 8$, (čímž celý obvod kruhu vyčerpán) — hodnot: $0, -\frac{2}{9}\pi, -\frac{4}{9}\pi, \ldots -\frac{16}{9}\pi$, při čemž oblouky $0, -\frac{6}{9}\pi$, $-\frac{12}{9}\pi$ náležejí bodům inflekčním $i_1\ i_2\ i_3$. Tyto body pořadem v obraze označeny $i_1 \equiv z_1, z_9, z_8, z_7 \equiv i_3, z_6, z_5, z_4 \equiv i_2, z_3, z_2$. Jeden z hledaných trojúhelníků má vrcholy $z_2\, z_5\, z_8$, druhý $z_3\, z_6\, z_9$; obrazy těchto trojúhelníků na K jsou trojúhelníky rovnostranné a souměrné vůči průměrům $\overline{i_1 t_1}$, $\overline{i_2 t_2}$, $\overline{i_3 t_3}$; tudíž promítají se body trojiny jedné z bodů inflekčních do bodů trojiny druhé. Všech 6 vrcholů obou trojúhelníků leží na kuželosečce, která se dotýká tečen v bodě d v jich průsečných bodech s přímkou bodů inflekčních (podobně jako kuželosečka Cayley-ho).

Všechny body z na K tvoří pravidelný devítiúhelník; poněvadž mu náležejí i obrazy bodů inflekčních, představuje každý z bodů z devět splývajících průsečíků dané křivky C_3 s jinou křivkou 3 řádu (odst. 9.).

Obecněji, ježto jest $(-2)^n - 1$ vždy dělitelno třemi, mají i vrcholy dalších mnohoúhelníků současně vepsaných a opsaných vždy význam bodů, v nichž se všechny průsečíky křivky C_3 s křivkami řádu $\frac{|(-2)^n - 1|}{3}$ ztotožňují.

10. *Průsečíky křivky C_3 s kuželosečkami* tvoří specielní involuci I_6^5. Šestinásobnými jejími body jsou $i_1\, i_2\, i_3\ t_1\, t_2\, t_3$. Sestrojení šestého průsečíku kuželosečky, určené pěti body na C_3 s touto křivkou snadno lze provésti (odst. 1.) i v tom případě, že C_3 racionálně je zobrazena na obecnou kuželosečku (odst. 5.).

Jestliže ze šesti průsečíků jich ν splývá v bodě x_ν a ostatních $6-\nu$ v bodě $y_{6-\nu}$ platí (dle rovnice 2) $\widehat{iy}_{6-\nu} = \frac{2k\pi}{6-\nu} - \frac{\nu}{6-\nu}\,\widehat{ix}_\nu$, kde za i možno vzíti kterýkoliv z bodů i nebo t; odtud snadno vypočteme oblouky jedněch z bodů x neb y, dán-li druhý.

11. Hledejme takové dvojiny bodové, aby *kuželosečka, mající pětibodový styk v jednom, procházela druhým.*

Přísluší-li pětinásobnému průsečíku p_5 oblouk $\widehat{i_1 p_5} = \varphi$, přísluší zbývajícímu p_1 oblouk -5φ, a položíme-li $p_1 \equiv q_5$, přísluší bodu q_1 oblouk $+25\ \varphi$. Aby se body q_1 a p_5 ztotožnily, musí rozdíl těchto oblouků být roven k-násobnému obvodu kruhu, t. j. $24\ \varphi = 2k\pi$, čili $\varphi = \frac{k\pi}{12}$; dosazujeme-li $k = 0 \ldots 23$ vyčerpáme všechny body na K. Pro $k = 0, 8, 16$ obdržíme body $i_1\, i_2\, i_3$, pro $k = 4, 12, 20$ body $t_3\, t_1\, t_2$, kde body dvojice splývají. Zbývajících 18 hodnot dává 9 dvojic obecných. Stačí, vyhledáme-li jen body, ležící mezi i_1 a t_3, t. j. pro $k = 1, 2, 3$, a ke každému z nich bod, tvořící s ním družinu. Pro $k = 1$ máme $\varphi = \frac{\pi}{12}$; pokládáme-li jej za pětinásobný, jest oblouk příslušného jednoduchého $\varphi' = -\frac{5}{12}\pi = \frac{19}{12}\pi$. Pro $k = 2$ máme $\varphi = \frac{\pi}{6}$, a pro bod, tvořící s tímto dvojici $\varphi' = \frac{7}{6}\pi$. Všechny dvojiny vyznačeny byly na postranním obrazci *a*) tak, že body dvojiny spojeny byly přímkou. Jsou dvojího druhu: prvého je 6, $\left(\text{na př. } \frac{\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right)$, druhého jsou 3 dvojice $\left(\text{na př. } \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi.\right)$ Body každé z dvojic druhého druhu jsou konjugovány, majíce každá jeden z bodů t za společný bod tečnový. Vedeme-li oběma body dvojiny druhého druhu tečny k C_3, tu jich dotyčné body tvoří dvě dvojiny prvého druhu, tak že tečnové body dvojice prvého druhu tvoří dvojici druhu druhého.

Podobně lze řešiti i jiné úlohy o kuželosečkách; na př. místo dvojic v předchozím případě mohli bychom stejnou cestou hledati uzavřené skupiny n-bodové takové, aby kuželosečka mající s C_3 pětibodový styk v kterémkoliv bodě skupiny procházela dalším bodem skupiny; obrazům těchto bodů na K přísluší oblouky

$$\varphi = \frac{2k\pi}{(-5)^n - 1}.$$

12. Abychom našli *třetí dotyčný bod* a_4 *kuželosečky, která se křivky* C_3 *v daných bodech* $a_1\ a_2$ *dotýká*, uvažme, že dle rovnice (1) jest $2\widehat{i_1 a_1} + 2\widehat{i_1 a_2} + 2\widehat{i_1 a_4} = 2k\pi$, kamž třeba za k dosaditi číslo liché; pro k sudé leží body ty na přímce $\overline{a_1 a_2 a_3}$, která zdvojena zastupuje degenerovanou kuželosečku žádané vlastnosti. Z konstrukce vyplývá, že body $a_3\ a_4$ jsou konjugované. (Viz obr.)

13. Všechny *křivky řádu třetího* vytínají na C_3 involuci J_9^8. Devítinásobné její body jsou $z_1 \equiv i_1,\ z_2,\ z_3 \ldots z_9$. Rozpadá-li se grupa

průsečných bodů v ν-násobný bod x_ν a 9-ν-násobný $y_{9-\nu}$, platí dle rovnice (2): $\widehat{i_1 y_{9-\nu}} = \frac{2k\pi}{9-\nu} - \frac{\nu}{9-\nu}\widehat{i_1 x_\nu}$.*) Z této rovnice lze odvoditi (podobně jako při průsečných bodech s kuželosečkami), některé zajímavé dvojice involutorní:

Body určené oblouky $\frac{2\,k\pi}{63}, \frac{110\,k\pi}{63}$ $(k = 0, 1, \ldots 62)$ mají tu vlastnost, že jeden jako jednoduchý a druhý jako osminásobný tvoří na C_3 soustavu průsečíků křivek 3-ho řádu. Odečteme-li body devítinásobné, obdržíme celkem 27 takovýchto dvojic. V postranním obrazci b) vyznačeny ony, jichž jeden bod připadá do intervalu $\widehat{i_1 z_2}$. Body každé dvojice tvoří protilehlé vrcholy křivce C_3 současně vepsaného i opsaného šestiúhelníka, jak lze dovoditi z odst. 9. a vyplývá i z té okolnosti, že jednoduchý bod je třetím tangenciálným bodem osminásobného.

Dvojic bodových, v nichž lze pokládati kterýkoliv z obou bodů za dvojnásobný a druhý za sedminásobný průsečík křivky C_3 s křivkami řádu 3-ho, je 18. Obloukové vzdálenosti obrazů jednotlivých těchto bodů na K od kteréhokoliv z bodů z jsou $\varphi = \frac{2\,k\pi}{45}$, kde $k = 0, 1 \ldots 44$, při čemž body z $(k = 0, 5, 10 \ldots 40)$ vynecháme.

Dvojiny, jichž jeden bod připadá do intervalu $\widehat{i_1 z_2}$ (obr. c) jsou $\frac{2}{45}\pi, \frac{38}{45}\pi$; $\frac{4}{45}\pi, \frac{76}{45}\pi$; $\frac{6}{45}\pi, \frac{24}{45}\pi$; $\frac{8}{45}\pi, \frac{62}{45}\pi$; šest dvojic na př. $\frac{6}{45}\pi$, $\frac{24}{45}\pi$ jsou protější vrcholy tří čtyrúhelníků křivce C_3 vepsaných a opsaných; zbývající jsou protilehlé vrcholy, ve dvou opsaných i vepsaných dvanáctiúhelnících; spojnice obou bodů prvých dvojic procházejí body inflekčními; při zbývajících dvojicích jdou některým z bodů z; tečnové body dvojice tvoří zase dvojici, podobně i průměty bodů dvojice z některého z bodů z na C_3 (což platí i o dvojicích v předešlém odstavci uvažovaných) atd.

*

Sur l'involution des points d'intersection des courbes avec la cubique unicursale.

(Extrait de l'article précédent.)

Si l'on fait correspondre, par homographie, aux points d'une cubique unicursale C les points d'un cercle K, en sorte qu'au

*) Místo bodu $i_1 \equiv z_1$ možno ovšem použíti kteréhokoliv z bodů $z_2, z_3 \ldots z_9$.

point double correspondent, sur K, les points circulaires, on voit facilement que les points d'inflexion de C correspondent a trois points i, qui sont, sur K, les sommets d'un triangle isoscèle. Aux points d'intersection de C avec une courbe du n-ième ordre correspondent $3n$ points sur K, dont les distances, mésurées sur le cercle, d'un point i, ont la somme toujours égale à un multiple de la longueur de la circonférence. On est conduit, par là, à une série de problèmes. Si, p. ex., φ est la distance angulaire du point i de l'image d'un point arbitraire, celle de l'image du point tangentiel est -2φ, du second point tangentiel 4φ etc., de l'nième $(-2)^n\varphi$. „Si ce dernier coïncide avec le premier, on obtient l'image d'un polygone inscrit, et circonscrit en même temps à la courbe C. Pour que cela arrive, il faut que $\varphi + 2k\pi = (-2)^n\varphi$ [k entier], ou bien

$$\varphi = \frac{2k\pi}{(-2)^n - 1}$$

C'est ainsi, p. ex., que les arcs de -40°, -80°, -160° déterminent les sommets d'un triangle ayant la propriété demandée, etc.

Přirozené rovnice křivky trojnásobně zakřivené v prostoru čtyrrozměrném.

Napsal Dr. *Jos. Žďárský.*

1. Uvažujme ve čtyrrozměrném (Euklidově) prostoru Ω_4 libovolnou křivku. Běžný bod R na křivce stanoven jest vektorem $\overline{OR} = \mathfrak{r}$. Oskulační rovina v bodě R a další bod křivky určují třírozměrný prostor, jehož limitní polohu Ω_3 nazvu „prostor oskulační". Kolmice k oskulačnímu prostoru nazývá se „trinormála". Značí-li $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ vektorové jednotky tečny, hlavní normály, binormály a trinormály a označíme-li derivace dle oblouku s křivky akcentem, dostaneme pro základní čtyrhran formule analogické formulím Frenetovým

$$\mathfrak{t}' = \frac{1}{\varphi}\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}' = -\frac{1}{\varphi}\mathfrak{t} - \frac{1}{\tau}\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{v}' = \frac{1}{\tau}\mathfrak{u} + \frac{1}{\omega}\mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w}' = -\frac{1}{\omega}\mathfrak{v} \qquad (1)$$

Rovnicemi
$$\frac{1}{\varphi} = \alpha, \quad \frac{1}{\tau} = \beta, \quad \frac{1}{\omega} = \gamma \qquad (2)$$

kde α, β, γ jsou známé, funkce oblouku jest křivka, až na svoji polohu, úplně definována a zoveme je proto *„přirozené rovnice křivky".*

Abychom to dokázali, uvažujme dvě čáry, které vyhovují rovnicím (2). Základní čtyrhran $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ první křivky v bodě R_1 ($\overline{OR_1} = \mathfrak{r}_1$) a základní čtyrhran $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$ v příslušném bodě R_2