B. Kladivo

Poznámka k práci „Charakter kmitů ve dvou spřažených kruzích"

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 59--64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123253

trouvent dans une affinité orthogonale. La plus simple des surfaces de révolution, dont les ombres propres soient situées sur des cylindres du 2e ordre, est celle dont la courbe méridienne est

$$M \equiv y^2 = ax^3 + bx^1 + cx + d.$$

Si l'on détermine cette surface de manière qu'elle soit surosculatrice d'une surface de révolution donnée le long d une parallèle, son ombre propre et celui de la surface donnée auront le même cercle osculateur.

L'auteur traite des surfaces spéciales du 4e ordre, et surtout de leurs singularités. Ces surfaces sont dérivées de deux surfaces du 2e ordre au moyen d'une addition de coordonées

Poznámka k práci „Charakter kmitů ve dvou spřažených kruzích".*)

B. Kladivo.

V pojednání „Charakter kmitů ve dvou spřažených kruzích" bylo ukázáno: Abychom vyšetřili, má-li bikvadratická rovnice

$$l^4 + a_1 l^3 + a_2 l^2 + a_3 l + a_4 = 0 \qquad (1)$$

kořeny reálné-komplexní, stejné-různé, stačí uvažovati dva parametry

$$x = \frac{t}{r^2}, \; y = \frac{s^2}{r^3}, \left(\text{kde } r = -\frac{3}{16} a^2_1 + \frac{a_2}{2}, \; s = -\frac{a_1^3}{32} + \frac{a_1 a_2}{8} - \frac{a_3}{4},\right.$$

$$\left. t = -\frac{3 a_1^4}{256} + \frac{a^2_1 a_2}{16} - \frac{a_1 a_3}{4} + a_4\right),$$

i znamení veličiny r, je-li $r \neq 0$, a parametry t, s, je-li $r = 0$.

Doplním uvedené pojednání následující poznámkou, vyšetřujíc nutné a postačující podmínky pro to, aby kořeny bikvadratické rovnice (1) měly stejné *a*) reálné, *b*) imaginární části (až na znamení).**)

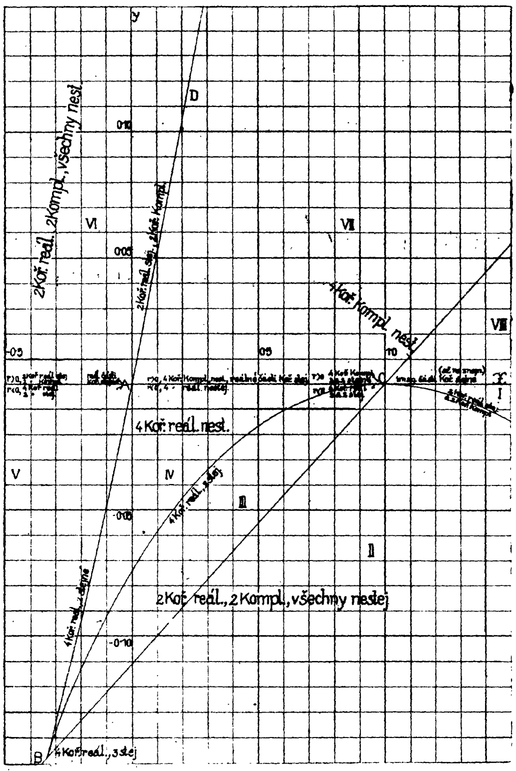
A. $r \neq 0$. 1. Předpokládáme, že všechny kořeny rovnice (1) jsou komplexní. Z uvedené práce plyne, že v tom případě musí býti bod (x, y) buď uvnitř úseků I, VIII, VII (obr. 1), nebo na společné hranici úseků I a VIII, VIII a VII, nebo při $r > 0$ na ose $y = 0$ mezi A a C (bod A je vyloučen).

*) Rozpravy čes. Akad., tř. II., roč. 1916 (XXV), čís. 52.

**) Úvaha řeší úplně otázku, jaké jsou podmínky, aby kmity ve dvou induktivně spřažených oscilujících kruzích měly stejný útlum nebo stejné kmitočty. Srov. A. Kalähne: Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme. Ann. d. Phys. 1913 (42), str. 1001—1030, B. Macků: Über das Entstehen einwelliger Oszillationen in gekoppelten Oszillationskreisen. Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. 1915 (10), str. 105—121.

Nutné a postačující podmínky, aby v tomto případě reálné části kořenů byly stejné (aby imaginární části kořenů byly stejné až na znamení, aby dva a dva komplexní kořeny byly stejné), jsou:

$$a_3 = \frac{a_1}{2}\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right), \quad a_4 - \frac{1}{4}\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right)^2 < 0 \ (> 0, = 0). \qquad (2)$$



Obr 1.

Že jsou to podmínky nutné, plyne srovnáním koeficientů rovnic

$$(l - \alpha - i\beta_1)\ (l - \alpha + i\beta_1)\ (l - \alpha - i\beta_2)\ (l - \alpha + i\beta_2) = 0,$$

$$(l - \alpha_1 - i\beta)\ (l - \alpha_1 + i\beta)\ (l - \alpha_2 - i\beta)\ (l - \alpha_2 + i\beta) = 0,$$

$$(l - \alpha - i\beta)^2\ (l - \alpha + i\beta)^2 = 0,$$

s koeficienty rovnice (1) a dosazením příslušných výrazů za a_1, a_2, a_3, a_4, do podmínek (2).

Že podmínky (2) jsou postačující plyne takto: Srovnáme-li koeficienty rovnice (1) a rovnice

$(l-\alpha_1-i\beta_1)\ (l-\alpha_1+i\beta_1)\ (l-\alpha_2-i\beta_2)\ (l-\alpha_2+i\beta_2)=0$, plyne: $a_1=-2(\alpha_1+\alpha_2)$, $a_2=(\alpha_1+\alpha_2)^2+2\alpha_1\alpha_2+\beta^2_1+\beta^2_2$, $a_3=-2[\alpha_2(\alpha^2_1+\beta^2_1)+\alpha_1(\alpha^2_2+\beta^2_2)]$, $a_4=(\alpha^2_1+\beta^2_1)(\alpha^2_2+\beta^2_2)$.

Dosadíme-li za a_1, a_2, a_3, a_4 do podmínek (2) plyne

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\beta^2_1-\beta^2_2)=0,\quad a_4-\frac{1}{4}\left(a_2-\frac{a^2_1}{4}\right)^2=$$

$$=(\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_1\beta^2_2-\alpha_2\beta^2_1)-\frac{(\beta^2_1-\beta^2_2)^2}{4}<0\ (>0,=0).$$

Z první podmínky plyne $\alpha_1=\alpha_2$, nebo $\beta^2_1=\beta^2_2$, nebo obojí současně. Z druhé podmínky plyne, že

$$a_4-\frac{1}{4}\left(a_2-\frac{a^2_1}{4}\right)^2<0 \text{ při splněné podmínce}$$

$a_3=\dfrac{a_1}{2}\left(a_2-\dfrac{a^2_1}{4}\right)$, jen je-li $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta^2_1\neq\beta^2_2$, $a_4-\dfrac{1}{4}\left(a_2-\dfrac{a^2_1}{4}\right)^2>0$, je-li $\beta^2_1=\beta^2_2$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, a $a_4-\dfrac{1}{4}\left(a_2-\dfrac{a^2_1}{4}\right)^2=0$, je-li $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta^2_1=\beta^2_2$. Tedy: má-li rovnice (1) všechny kořeny komplexní a jsou-li splněny podmínky (2), jsou reálné části kořenů stejné (jsou imaginární části kořenů až na znamení stejné, jsou dva a dva kořeny stejné).

Pomocí zkratek r, s, t, se dají podmínky (2) vyjádřiti jednoduše $s=0,\ t-r^2<0\ (>0,=0)$ nebo $y=0,\ x<1\ (>1,=1)$ (2').

Nutné a postačující podmínky, aby všechny kořeny rovnice (1) byly komplexní, a aby reálné části kořenů byly stejné, jsou: $r>0$, a bod (x,y) musí býti na ose $y=0$ mezi body A a C. — Nutná a postačující podmínka, aby všechny kořeny rovnice (1) byly komplexní, a aby imaginární části kořenů byly až na znamení stejné, jest: bod (x,y) musí býti na ose $y=0$, od bodu C vpravo. — Nutné a postačující podmínky, aby všechny kořeny rovnice (1) byly komplexní, a aby dva a dva byly stejné, jsou: $r>0$, a bod (x,y) musí splynouti s bodem C.

2. Předpokládáme, že rovnice (1) má dva kořeny reálné. Z uvedeného pojednání plyne, že v tomto případě musí býti bod (x,y) buď uvnitř úseků II, III, V, VI, (obr. 1.), nebo na hranicích úseku II, vyjma body B, C, nebo na hranicích úseku VI (v bodě A při $r>0$).

Nutné a postačující podmínky, aby v tomto případě reálné části kořenů byly stejné, jsou

$$a_3 = \frac{a_1}{2}\left(a_2 - \frac{a^2_1}{4}\right), \quad a_4 = \frac{a^2_1}{16}\left(a_2 - \frac{5a^2_1}{16}\right). \tag{3}$$

Že jsou to podmínky nutné plyne srovnáním koeficientů rovnice $(l-\alpha)(l-\alpha)(l-\alpha-i\beta)(l-\alpha+i\beta)=0$, s koeficienty rovnice (1) a dosazením příslušných výrazů za a_1, a_2, a_3, a_4, do podmínek (3)

Že podmínky (3) jsou postačující, plyne takto: Srovnáme-li koeficienty rovnice (1) a rovnice

$(l-\alpha_1)(l-\alpha_2)(l-\alpha-i\beta)(l-\alpha+i\beta)=0$, plyne

$a_1 = -2\alpha - (\alpha_1+\alpha_2)$, $a_2 = 2\alpha(\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha^2 + \beta^2$,

$a_3 = -(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\alpha_1\alpha_2$, $a_4 = \alpha_1\alpha_2(\alpha^2+\beta^2)$.

Dosadíme-li za a_1, a_2, a_3, do první z podmínek (3), jest po úpravě

$$\left(\alpha - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{4} + \beta^2\right) = 0.$$

Protože $\beta \neq 0$, musí $\alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Dosadíme-li za a_1, a_2, a_4 do druhé z podmínek (3) a klademe-li při tom $\alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, plyne $\beta^2(\alpha_1-\alpha_2)^2 = 0$, tedy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Pomocí zkratek s, t se dají podmínky (3) vyjádřiti jednoduše

$$s=0,\ t=0, \text{ nebo } x=0,\ y=0. \tag{3'}$$

Tedy: nutné a postačující podmínky, aby dva kořeny rovnice (1) byly reálné a při tom reálné části všech kořenů byly stejné, jsou: $r>0$, bod (x,y) musí splynouti s bodem A.

3. Předpokládáme, že rovnice (1) má čtyři kořeny reálné. Z uvedeného pojednání plyne, že v tomto případě musí být bod (x,y) buď uvnitř úseku IV (obr. 1), nebo na jeho hranicích (na úsečce $A\,C$ při $r<0$, body A, C, včetně).

Nutné a postačující podmínky, aby v tomto případě všechny kořeny byly stejné, jsou

$$a_2 = \frac{3}{8}a^2_1, \quad a_3 = \frac{a^3_1}{16}, \quad a_4 = \frac{a^4_1}{256}. \tag{4}$$

Že jsou to podmínky nutné, plyne srovnáním koeficientů rovnice $(l-\alpha)^4 = 0$ s koeficienty rovnice (1) a dosazením příslušných výrazů za a_1, a_2, a_3, a_4 do podmínek (4).

Jsou-li podmínky (4) splněny, lze rovnici (1) psáti

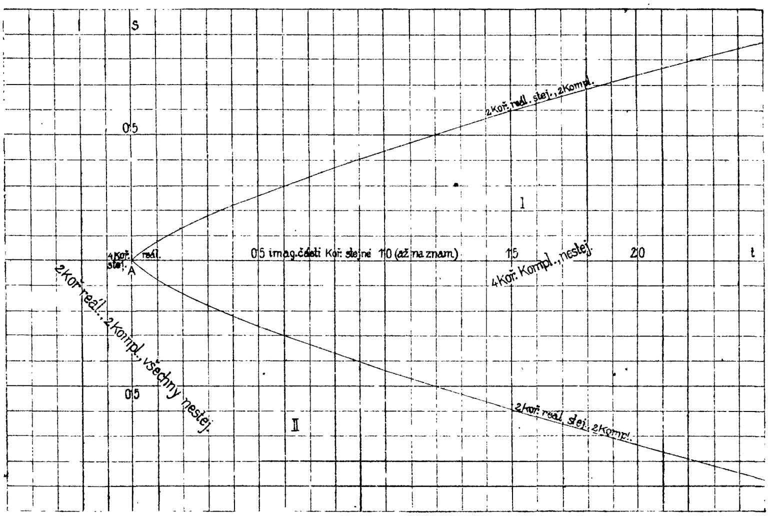
$$l^4 + a_1 l^3 + \frac{3}{8}a^2_1 l^2 + \frac{a^3_1}{16} l + \frac{a^4_1}{256} = \left(l + \frac{a_1}{4}\right)^4 = 0,$$

má tedy všechny kořeny reálné, podmínky (4) jsou postačující. Pomocí zkratek r, s, t se dají podmínky (4) vyjádřiti:

$$r = 0,\ s = 0,\ t = 0. \tag{4'}$$

Je patrno, že **rovnice (1) nemůže míti všechny kořeny reálné, stejné, při $r \neq 0$.**

B. $r = 0$. **1.** Předpokládáme, že rovnice (1) má všechny kořeny komplexní. Z uvedeného pojednání plyne, že v tom případě musí býti bod (t, s) uvnitř úseku I (obr. 2).



Obr. 2.

Nutné a postačující podmínky, aby při tom reálné části kořenů byly stejné (aby imaginární části kořenů byly stejné až na znamení, aby dva a dva komplexní kořeny byly stejné), jsou zase podmínky (2), tedy $s = 0$, $t < 0$ (> 0, $= 0$).

Protože pro $s = 0$, $t \leq 0$ nemá rovnice (1) čtyři komplexní kořeny, plyne: **Při $r = 0$ nemůže míti rovnice (1) čtyři komplexní kořeny, jejichž reálné části jsou stejné, ani dva a dva komplexní kořeny stejné.** — **Nutná a postačující podmínka, aby rovnice (1) měla při $r = 0$ čtyři komplexní kořeny, jejichž imaginární části jsou až na znamení stejné, jest: bod (t, s) musí býti na ose $s = 0$ od bodu A vpravo.**

2. Předpokládáme, že rovnice (1) má dva kořeny reálné. Z uvedeného pojednání plyne, že v tomto případě musí býti bod (t, s) uvnitř úseku II (obr. 2.), nebo na hranicích úseků I a II vyjma bod A.

Nutné a postačující podmínky, aby při tom reálné části všech kořenů byly stejné, jsou zase podmínky (3), tedy $s = 0$, $t = 0$.

Ale protože při $r = 0$ má rovnice (1) pro $s = 0$, $t = 0$ čtyři reálné kořeny, je patrno, že při $r = 0$ nemůže míti rovnice (1) dva kořeny reálné a dva komplexní, jejichž reálné části jsou stejné.

3. Předpokládáme, že rovnice (1) má všechny kořeny reálné.

Nutné a postačující podmínky, aby byly všechny stejné, jsou $r = 0$, $s = 0$. $t = 0$, tedy bod (t, s) musí splynouti s bodem A (obr. 2.).

*

Remarque.

(Extrait de l'article précédent.)

La „Remarque“ complète le mémoire de l'auteur „Le caractère des vibrations dans deux circuits à induction mutuelle“ (Rozpravy Čes. Akademie, t. XXV, 1916, n° 52). Ce mémoire a donné une réponse sommaire à la question concernant la nature des racines de l'équation biquadratique caractéristique (racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales). Cette solution sommaire conduit (dans la „Remarque“ actuelle) à une résolution simple d'une autre question: quand est-ce que les racines de l'équation biquadratique possèdent des parties réelles ou des parties imaginaires (celles-ci au signe près) égales. (Ce qui veut dire, au point de vue physique: le même amortissement ou la même fréquence des vibrations.)

O jisté jednodvojznačné kvadratické reciproké příbuznosti v rovině.

Dr. *Klíma Josef.*

V následujícím chci ukázati na jednoduchou cestu, jak dospějeme k zvláštní kvadratické jednodvojznačné reciproké příbuznosti a na některá její užití.[1])

[1]) Obecné vyšetření jednodvojznačné příbuznosti dvou bodových polí podal R. de Paolis v pojednání „Le trasformazioni piane doppie“ v Atti della Accademia Reale dei Lincei Roma r. 1877. Příklad jisté jednodvojznačné příbuznosti stupně 12ho podal p. prof. dr. Bydžovský v t. časopise roč. XLVII. str. 247.