branches de la géométrie, notamment de la géométrie de l'affinité et de la similitude; il faut épurer la vraie géométrie projective des considérations de ces géométries spéciales. La géométrie projective scientifique doit être fondée sur un système de notions et de théorèmes fondamentaux; un choix modéré introduit comme éléments fondamentaux le point, la droite et le plan, comme relation fondamentale leur incidence; des trois groupes de postulats le premier concerne l'incidence des éléments fondamentaux, le deuxième l'arrangement des éléments dans les figures fondamentales à une dimension, le troisième la continuité de ces figures. De toutes les définitions de l'homographie il faut considérer comme la plus convenable celle par laquelle l'homographie à une dimension est introduite comme le produit d'un nombre fini d'homologies. Une place large et importante occupent, dans la géométrie projective moderne, les considérations polydimensionales. On peut faire la géométrie projective par la méthode constructive ou bien par la méthode analytique; celle-là se prête mieux aux considérations élémentaires, celle-ci aux figures plus compliquées, mais c'est la combinaison des deux méthodes qui est la plus convenable. Il faut, bien entendu, introduire les coordonnées de la géométrie projective analytique sans des notions métriques.

Elektromagnetické vlny na dielektrickém drátu.

Frant. Záviška.

Že i na dielektrických drátech se mohou šířiti elektromagnetické vlny, ukázali Hondros a Debye[1]) integrací Maxwellových rovnic pro tento případ. Tyto vlny se ovšem značně liší od vln postupujících po vodivých drátech; Hondros a Debye nalezli, že vznikají jen tehdy, když kmitová perioda nepřesahuje určité meze závislé na dielektrické konstantě látky a na poloměru drátu, dále, že vlna odpovídající největší možné periodě šíří se po drátu s rychlostí světla ve vakuu a elektrické silokřivky stojí téměř kolmo k povrchu drátu. S klesající periodou klesá i rychlost těchto vln velmi rychle, současně slábne pole vně drátu, koncentrujíc se do jeho vnitřku. Při tom však vystupují postupně nové a nové vlny, jež se chovají podobně jako vlna první; jich rychlost je spočátku rovna rychlosti světla ve vakuu, pak klesá a pole jim odpovídající slábne. Experimentálně dokázal vznik elektromagnetických vln na dielektrických drátech (skleněné trubice naplněné vodou, methylalkoholem, nebo acetonem) Zahn.[2]) V celku potvrzují jeho měření výsledky teorie; pozorované odchylky dají se asi vyložiti tím, že některé zjednodu-

---

[1]) D. Hondros a P. Debye, Ann. d. Phys. 32, 465. 1910.

[2]) H. Zahn, Phys. ZS. 16, 414. 1915. Podle prací Rütera a Schrievera.

šující předpoklady teorie (látka dokonale isolující a bez absorpce, nekonečně dlouhý drát atd.) ve skutečnosti přesně splniti se nedají.

V dalším chci řešiti otázku elektromagnetických vln na dielektrickém drátu pro případ, že drát je obklopen souosým válcem vodivým tak, že máme celkem dvě dielektrika; jedno vyplňuje válec (drát) o poloměru a, druhé vyplňuje prostor mezi tímto drátem a vodivým válcem, jehož poloměr označíme b. Spojíme-li jeden pól oscillátoru s vodivým válcem, druhý s rozhraním mezi oběma dielektriky, vznikne uvnitř silné pole elektromagnetické, jehož vlastnosti nyní vyšetříme.

Jde tu o integraci Maxwellových rovnic pro isolující dielektrika se zřetelem k určitým podmínkám, jež musí býti splněny v rozhraních. Ve válcových souřadnicích r, φ, z tyto rovnice znějí:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}=\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,H_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}+\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial E_r}{\partial z}+\frac{\partial E_z}{\partial r}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,E_\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}.$$

K nim přistupují rovnice kontinuity:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,E_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0.$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,H_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.$$

Při tom ε je dielektrická konstanta, μ permeabilita látky, c rychlost světla ve vakuu. Předpokládáme, že pole je symetrické kol osy válců, takže nic nezávisí na φ. Rovnice rozpadnou se pak na dvě skupiny na sobě nezávislé; jedna obsahuje složky E_r, E_z a H_φ, druhá H_r, H_z a E_φ. První odpovídá t. zv. vlně elektrické, druhá vlně magnetické; experimentálně se dá realisovati jen vlna první. Rovnice jí příslušící znějí

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}=-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi) \tag{1}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial r},$$

rovnice kontinuity je pak

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r E_r)}{\partial r}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0. \tag{1'}$$

Z nich plyne pro E_z diferenciální rovnice tvaru

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right). \tag{2}$$

Poněvadž nám jde o řešení, jež dává postupné vlny, položíme

$$E_z = R e^{i(\omega t-\beta z)},$$

kdež R pokládáme za funkci jen r. ω budiž reálné; znamená to, že vlny nejsou časově tlumené; jich perioda τ, kterou pokládáme za danou, souvisí s ω vztahem $\omega = 2\pi/\tau$. β může býti obecně komplexní.

Dosadíme nyní do rovnice (2) a položíme

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2=\alpha^2 \qquad \alpha^2-\beta^2=q^2; \tag{3}$$

obdržíme tak pro R rovnici

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+q^2 R=0.$$

To je rovnice Besselova; obecný její integrál je

$$R = AJ(qr)+BN(qr),$$

kdež J a N jsou Besselovy funkce nultého řádu, prvního a druhého druhu,[3]) A a B jsou integrační konstanty. Je tedy

$$E_z=\{AJ(qr)+BN(qr)\}e^{i(\omega t-\beta z)}.$$

Abychom stanovili E_r, vyloučíme z druhé a třetí rovnice (1) H_φ; obdržíme

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\,\partial r},$$

a položíme-li $\quad E_r = Q e^{i(\omega t-\beta z)},$

kdež Q závisí zase jen na r, máme

$$-q^2 Q = -i\beta\frac{dR}{dr},$$

takže $$Q=\frac{i\beta}{q}\left\{AJ'(qr)+BN'(qr)\right\},$$

[3]) Užívám označení zavedeného v Jahnke-Emde: Funktionentafeln, pag. 90. a násl.

kdež označeno

$$J'(x)=\frac{dJ}{dx},\quad \text{a tedy}\quad \frac{dJ(q\,r)}{d\,r}=qJ'(q\,r).$$

Je pak $$E_r=\frac{i\beta}{q}\left\{A\,J'(q\,r)+B\,N'(q\,r)\right\}e^{i(\omega t-\beta z)}$$

a podobně stanovíme

$$H_\varphi=-i\,\frac{\omega\,\varepsilon}{q\,c}\left\{A\,J'(q\,r)+B\,N'(q\,r)\right\}e^{i(\omega t-\beta z)}.$$

Pro vnitřní dielektrikum, kde je $0\leqq r\leqq a$, se tyto výrazy zjednoduší. Pro $r=0$ stává se totiž Besselova funkce druhého druhu $N(q\,r)$ nekonečně velikou; aby tedy řešení Maxwellových rovnic bylo konečné v celém vnitřním válci, musí $B=0$. Označíme-li pak veličiny vztahující se na toto prostředí indexem 1, máme

$$E_{1z}=A_1\,J(q_1\,r)\,e^{i(\omega t-\beta z)}$$

$$E_{1r}=\frac{i\beta}{q_1}A_1J'(q_1\,r)\,e^{i(\omega t-\beta z)}$$

$$H_{1\varphi}=-i\,\frac{\omega\,\varepsilon_1}{c\,q_1}A_1J'(q_1\,r)\,e^{i(\omega t-\beta z)}.$$

V druhém dielektriku je $a\leqq r\leqq b$, zde tedy řešení může obsahovati obě Besselovy funkce. Označíme toto prostředí indexem 2 a je

$$E_{2z}=\left\{A_2\,J(q_2\,r)+B_2N(q_2\,r)\right\}e^{i(\omega t-\beta z)}$$

$$E_{2r}=\frac{i\beta}{q_2}\left\{A_2\,J'(q_2\,r)+B_2\,N'(q_2\,r)\right\}e^{i(\omega t-\beta z)}$$

$$H_{2\varphi}=-i\frac{\omega\,\varepsilon_2}{c\,q_2}\left\{A_2\,J'(q_2\,r)+B_2\,N'(q_2\,r)\right\}e^{i(\omega t-\beta z)}.$$

Podmínky v rozhraní vyžadují, aby v rozhraní mezi oběma dielektriky byly spojité tangenční složky elektrické a magnetické síly; na povrchu vnějšího válce, o němž pro jednoduchost předpokládáme, že je z látky nekonečně dobře vodivé, musí tangenční složka elektrické síly rovnati se nule. Je tedy pro $r=a$

$$E_{1z}=E_{2z}\quad \text{a}\quad H_{1\varphi}=H_{2\varphi},$$

a pro $r=b$ $$E_{2z}=0.$$

To vede k rovnicím

$$A_1J(q_1\,a)=A_2J(q_2\,a)+B_2\,N(q_2\,a)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1}A_1J'(q_1\,a)=\frac{\varepsilon_2}{q_2}A_2J'(q_2\,a)+\frac{\varepsilon_2}{q_2}B_2\,N'(q_2\,a)$$

$$0=A_2\,J(q_2\,b)+B_2\,N(q_2\,b).$$

Koeficienty A_1, A_2 a B_2 vyloučíme a obdržíme

$$\begin{vmatrix} J(q_1 a) & J(q_2 a) & N(q_2 a) \\ \frac{\varepsilon_1}{q_1} J'(q_1 a) & \frac{\varepsilon_2}{q_2} J'(q_2 a) & \frac{\varepsilon_2}{q_2} N'(q_2 a) \\ 0 & J(q_2 b) & N(q_2 b) \end{vmatrix} = 0,$$

z čehož plyne po jednoduché úpravě

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} \frac{J'(q_1 a)}{J(q_1 a)} = \frac{\varepsilon_2}{q_2} \frac{J'(q_2 a) N(q_2 b) - N'(q_2 a) J(q_2 b)}{J(q_2 a) N(q_2 b) - N(q_2 a) J(q_2 b)}. \tag{4}$$

Při tom je podle druhé rovnice (3)

$$q^2_1 = \alpha^2_1 - \beta^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{c^2} \omega^2 - \beta^2, \tag{5}$$

kdež
$$\alpha_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = 2\pi \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{c\tau}$$

značí 2π-násobnou převratnou hodnotu volné vlnové délky příslušící kmitům periody τ v prostředí prvním. Jsou to vlny, jež se v něm vytvoří, prostírá-li se prostředí na všechny strany do nekonečna; jich rychlost je pak $c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$. Podobně je

$$q^2_2 = \alpha^2_2 - \beta^2, \tag{5'}$$

α_2 značí zase 2π-násobnou převratnou hodnotu volné vlnové délky příslušící kmitům téže periody τ v prostředí druhém. Je

$$\alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} = n\,\alpha_1,$$

n je index lomu vnitřního dielektrika vzhledem k vnějšímu. Z rovnic (5) a (5′) plyne

$$q^2_2 - q^2_1 = \alpha^2_2 - \alpha^2_1 = \alpha^2_1 (n^2 - 1). \tag{6}$$

Řešením rovnic (4) a (6) stanovíme q_1 a q_2 a z rovnice (5) nebo (5′) možno pak vypočísti β příslušící k dané hodnotě α_1, nebo α_2. Poněvadž vodivost obou prostředí, v nichž vlny postupují, rovná se nule, a celý systém je uzavřen válcem z dokonalého vodiče, nemůže se elektromagnetická energie vln ztráceti ani proměnou v Joule-ovo teplo, ani vyzařováním do nekonečna; vlny postupují ve směru osy válců bez útlumu a β je reálné. Rovná se pak 2π-násobné převratné hodnotě skutečné vlnové délky. Poněvadž i α_1 a α_2 jsou čísla reálná, plyne z rovnic (5) a (5′), že q_1 a q_2 jsou buď reálná, nebo ryze imaginární; jiná řešení nemají fysikálního významu. Pro zjednodušení položíme

$$q_1 a = x \qquad q_2 a = y,$$

dále budiž $b/a = \vartheta$; je vždy $\vartheta > 1$. Je pak, uvážíme-li ještě, že permeability obou prostředí se rovnají velmi přibližně jedné a tedy $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$,

$$\frac{1}{x}\frac{J'(x)}{J(x)} = \frac{1}{n^2 y}\frac{J'(y)\,N(\vartheta y) - N'(y)J(\vartheta y)}{J(y)\,N(\vartheta y) - N(y)J(\vartheta y)} \tag{7}$$

a

$$y^2 - x^2 = a^2\,\alpha^2_1\,(n^2 - 1). \tag{7'}$$

Z těchto rovnic třeba vypočísti x a y. Při tom x může nabývati jen hodnot reálných, nebo ryze imaginárních; stejně y. Rovnice (7) a (7′) dají se řešiti celkem jednoduše metodou grafickou; úplné řešení je však dosti obšírné vzhledem k velkému počtu možných případů a bude provedeno i s diskusí pole v pojednání následujícím.

*

Les ondes électromagnétiques sur un fil diélectrique.

(Extrait de l'article précédent.)

Hondros et Debye ont fait voir que les ondes électromagnétiques peuvent se propager aussi le long des fils diélectriques: les propriétés de ces ondes diffèrent, bien entendu, de beaucoup de celles des ondes électromagnétiques sur les fils conducteurs. Les résultats de la théorie on été vérifiés par les expériences de Zahn.

Dans le travail actuel j'étudie les ondes électromagnétiqes qui se produisent sur un cylindre diélectrique au rayon a, quand celui-ci est entouré d'un cylindre coaxial conducteur, au rayon $b = \vartheta a$. Le champ engendré de cette façon peut être bien plus intense que celui engendré par un fil unique.

Si l'on suppose que les vibrations ne sont pas amorties et que le champ est symétrique par rapport à l'axe du cylindre, on obtient, par l'intégration des équations de Maxwell, les équations (7) et (7′), où

$$= q_1\, a = a\sqrt{\alpha_1{}^2 - \beta^2}, \quad y = q_2\, a = a\sqrt{\alpha_2{}^2 - \beta^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{c\tau}\sqrt{\varepsilon_1\,\mu_1}\,, \qquad \alpha_2 = \frac{2\pi}{c\tau}\sqrt{\varepsilon_2\,\mu_2}\,;$$

τ est la période de la vibration, ε_1 et μ_1 sont la constante diélectrique et la perméabilité du milieu du fil, ε_2, μ_2 les mêmes constantes pour le milieu environnant, $n^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, et I et N désignent des fonctions de Bessel de l'ordre zéro. Enfin β est la valeur réciproque de la longeur d' onde multipliée par 2π. Comme il n'y a pas d'amortissement ni par la chaleur de Joule ni par radiation, β est réelle; donc, x et y sont réelles ou purement imaginaires. La résolution des équations (7) et (7′) et la discussion du champ seront données dans un article ultérieur.