Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Petr

O jedné methodě pro vyšetřování geometrického významu kombinant

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 114--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123263

Sur l'hélicoide composé, engendré par un mouvement elliptique.

(Extrait de l'article précédent.)

Quand un cercle roule intérieurement sur un cercle au rayon double, une droite entrainée par ce mouvement, ayant une inclinaison de 45° sur le plan du cercle mobile et se projetant suivant un diamètre de ce cercle, engendre une surface gauche du 4e ordre à l'équation

$$\frac{x^2}{(r-z)^2}+\frac{y^2}{(r+z)^2}=1$$

Le contour apparent de cette surface dans le plan de la base de roulette est une astroïde; cette courbe est, de plus, la projection de la ligne de striction de la surface. Cette ligne de striction est une hélice sur un cylindre à base astroïdique, dont la pente constante est $\pm\frac{2}{3}$; une moitié est une hélice directe, et l'autre, symétrique, est une hélice rétrograde. La surface se compose d'un helicoïde gauche directe, et d'un hélicoïde, symétrique au premier, rétrograde; les deux hélicoïdes se raccordent suivant la droite commune.

L'auteur signale encore cette proposition plus générale:

Si le cercle de rayon r roule intérieurement ou extérieurement sur un cercle au rayon nr, et si une droite, ayant la même position qu'au cas précedent, est entrainée dans ce mouvement, elle engendre une surface gauche dont le contour apparent dans le plan de la base de roulette est une hypo- ou épicycloïde à $2n$ parties égales; cette courbe est, de plus, la projection de la ligne de striction de la surface, et cette ligne de striction est composée de $2n$ hélices dont la pente constante est $\frac{2n}{2n\pm 1}$; la moitié d'elles sont des hélices directes, l'autre moitié, symétrique, sont des hélices rétrogrades. La surface engendrée par la droite roulante est composée de $2n$ hélicoïdes gauches, dont la moitié sont des hélicoides directes, l'autre moitié, symétrique, sont des hélicoïdes gauches rétrogrades; les surfaces voisines se raccordent suivant la droite commune.

O jedné methodě pro vyšetřování geometrického významu kombinant.

Napsal *K. Petr.*

Při vyšetřování vlastností racionálných křivek vyskytují se veličiny nemající bezprostřední geometrický význam. Body na křivce ku př. nejsou tu obyčejně stanoveny rovinnými (resp. prostorovými) souřadnicemi, nýbrž hodnotami jistého parametru. Jest proto při takovém vyšetřování užitečno znáti způsob, který by jednoduše nám umožňoval závislostem daným rovnicemi dáti podklad geometrický. Jedna taková methoda, týkající se kombinant a tedy projektivných vlastností křivek racionálných, jest v následujícím vyložena. Připomínám jenom, že methodu tu rozšířiti by bylo snadno i na kombinanty vyskytující se v útvarech obecnějších než při křivkách racionálných.

I.

Dříve než přistoupím k výkladu věci samé, podám, abych čtenáři usnadnil porozumění, přehled hlavních pojmenování a vět týkajících se kombinant. Aby však výklad příliš se nekomplikoval, budu prováděti veškeré úvahy následující pro zvláštní případ kombinant tří bikvadratických forem binárních.

Uvažujme výraz (formu)

$$
\begin{aligned}
&u\,(a_0 t_1^4 + 4\,a_1 t_1^3 t_2 + 6\,a_2 t_1^2 t_2^2 + 4\,a_3 t_1 t_2^3 + a_4 t_2^4) + \\
(1)\qquad &+ v\,(b_0 t_1^4 + 4 b_1 t_1^3 t_2 + 6\,b_2 t_1^2 t_2^2 + 4\,b_3 t_1 t_2^3 + b_4 t_2^4) + \\
&+ w\,(c_0 t_1^4 + 4\,c_1 t_1^3 t_2 + 6\,c_2 t_1^2 t_2^2 + 4\,c_3 t_1 t_2^3 + c_4 t_2^4).
\end{aligned}
$$

Výraz tento závisí na dvou řadách proměnných; v ternární řadě proměnných $[u, v, w]$ jest lineární, v řadě proměnných $[t_1, t_2]$ jest stupně čtvrtého. Můžeme pak uvažovati invariantní útvary dané formy; a to takové, jež mají vlastnost invariance vzhledem k oběma řadám proměnným. Invariantní útvary ty závisí buď na obou z řad proměnných anebo toliko na jediné z nich, anebo konečně na žádné. Invariantní útvary nezávislé na řadě $[u, v, w]$ nazývají se kombinanty tří bikvadratických forem $(a_0\, t_1^4 + \ldots,\ b_0\, t_1^4 + \ldots,\ c_0\, t_1^4 + \ldots)$.

Invariantní útvary formy (1) pouze vzhledem k proměnným $[u, v, w]$ jsou, pokládáme-li zároveň t_1, t_2 za proměnné, shodny se souhrnem invariantních útvarů těchto forem lineárních

$$a_0 u + b_0 v + c_0 w,\quad a_1 u + b_1 v + c_1 w, \ldots\ a_4 u + b_4 v + c_4 w.$$

Uvažujeme-li tedy invariantní útvary ty, pokud nezávisí na $[u, v, w]$, dostaneme je všechny jakožto souhrn determinantů

$$
(2)\qquad (i, k, l) = \begin{vmatrix} a_i\,, & a_k\,, & a_l \\ b_i\,, & b_k\,, & b_l \\ c_i\,, & c_k\,, & c_l \end{vmatrix}; \quad i, k, l = 0, 1, 2, 3, 4;
$$

a racionálných celistvých forem těchto determinantů. Z toho vyplývá tudíž pro kombinanty základní věta, že kombinanty tří forem $a_0 t_1^n + \ldots$, $b_0 t_1^n + \ldots$, $c_0 t_1^n + \ldots$ jsou racionálné, celistvé funkce determinantů (i, k, l); $i, k, l = 0, 1, \ldots n$ Aby pak racionálná celistvá funkce F těchto determinantů byla vskutku kombinantou, to jest invariantem tří forem $a_0\, t_1^n + \ldots, \ldots,$ k tomu jest ještě nutno a postačitelno, aby byla homogenní funkcí těch determinantů, ve všech svých členech určité váhy*) a aby hověla jedné differenciální rovnici $\Delta_{21} F = 0$, kteroužto rovnici vypíšeme ihned obšírně pro dané tři bikvadratické formy obsažené v (1). Za tím účelem sestavíme veškeré determinanty (2) v tabulku

$$(0,1,2),\ (0,1,3),\ (0,1,4),\ (0,2,4),\ (0,3,4),\ (1,3,4),\ (2,3,4),$$
$$(0,2,3),\ (1,2,3),\ (1,2,4).$$

Členy této tabulky pak označíme pro krátkost písmeny

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G$$
$$C',\ D',\ E'$$

tak, že jest ku př. $(0, 1, 4) = C$, $(0, 2, 3) = C'$. Differenciální operace Δ_{21} užitá na determinant (i, k, l) dává

$$\Delta_{21}\ (i, k, l) = i\ (i-1, k, l) + k\ (i, k-1\ l) + l\ (i, k, l-1);$$

kdyby ku př. $i = 0$, pak člen $(i-1, k, l)$ jest ovšem nahraditi nullou.

Rovnice differenciální $\Delta_{21}\ F = 0$ pro kombinantu F nezávislou vůbec na proměnných (F jest tedy funkcí jenom determinantů (2)) lze pak vypsati ve tvaru

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial A}\,\Delta_{21} A + \frac{\partial F}{\partial B}\,\Delta_{21} B + \frac{\partial F}{\partial C}\,\Delta_{21}\ C + \\ (3)\qquad &+ \frac{\partial F}{\partial C'}\,\Delta_{21} C' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial G}\,\Delta_{21}\ G = 0.\end{aligned}$$

Obdobnou rovnici bylo by lze psáti pro kombinantu závisící i na determinantech (2) i na proměnných. Odvoďme si kombinanty nejnižšího stupně v determinantech (2). K tomu, jak známo, postačí výpočet t. zv. vedoucích členů φ (t. j. semiinvariantů), jež jsou lineárné, stejnovážné funkce determinantů (2) a hoví rovnici $\Delta_{21}\ \varphi = 0$. V našem případě jsou takové semiinvarianty dva A_0, B_0; kde $A_0 = A$, $5B_0 = C - 2C'$. Jest, jak snadným počtem čtenář zjistí, $\Delta_{21} A_0 = 0$, $\Delta_{21}\ B_0 = 0$. Semiinvariantům těmto odpovídají pak kovarianty

$$\begin{aligned}(\mathrm{I})\qquad f_1(t) &= A_0 t_1^6 + 6\,A_1\, t_1^5\, t_2 + 15\,A_2\, t_1^4\, t_2^2 + 20\,A_3\, t_1^3\, t_3^3 + \\ &+ 15\,A_4\, t_1^2\, t_2^4 + 6\,A_5\, t_1\, t_2^5 + A_6\, t_2^6, \\ f_2(t) &= B_0\, t_1^2 + 2\,B_1\, t_1\, t_2 + B_2\, t_2^2,\end{aligned}$$

kde $\quad A_0 = A,\ 6A_1 = 2B,\ 15A_2 = C + 3C',\ 20A_3 = 2D + 4D',$

$$15A_4 = E + 3E',\ 6A_5 = 2F,\ A_6 = G;$$
$$5B_0 = C - 2C',\ 5\,.\,2B_1 = D - 8D',\ 5B_2 = E - 2E'$$

---

*) Mezi váhou W, stupněm S v determinantech (2) a celkovým stupněm I v proměnných jest, jak známo, tento vztah $2\,W = 3nS - I$.

a kde také naopak determinanty A, B, ... lze vyjádřiti lineárně koefficienty A_0, A_1 ..., B_0, ... a to rovnicemi

$$A = A_0,\ B = 3A_1,\ C = 6A_2 + 3B_0,\ C' = 3A_2 - B_0,\ D = 8A_3 + 2B_1, ..$$

Lze tedy pokládati každou kombinantu tří bikvadratických forem daných za racionálnou celistvou funkci součinitelů A_0, A_1, ... B_0, ... a proměnných. Rovnice (3) se však změní v rovnici (klademe-li $F(A, B, \ldots) = \Phi(A_0, A_1, \ldots, B_0, \ldots)$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_1} \cdot A_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial A_2} \cdot 2A_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial A_3} \cdot 3A_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial A_4} \cdot 4A_3 +$$
$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial B_1} \cdot B_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial B_2} \cdot 2B_1 = 0.$$

Z tohoto tvaru rovnice differenciální vyplývá pak druhá základní věta pro kombinanty tří bikvadratických forem, že totiž veškeré kombinanty ty jsou invariantními útvary systému forem v (I). Obecně lze snadnou úvahou vždy prokázati existenci takového systému základních forem, že veškeré kombinanty daných několika forem binárních (anebo též ternárních, kvaternárních ...) dají se pokládati jakožto invariantní útvary toho systému. V následujícím budeme tuto větu předpokládati.

II.

Pokládáme-li v (1) u, v, w za přímkové souřadnice rovinné, pak rovnice, kterou dostaneme, položíme-li (1) rovno nulle, jest rovnicí rovinné racionální křivky čtvrtého stupně. Rovnici tu bychom mohli též vypisovati třemi vztahy pro souřadnice bodu $[x, y, z]$ na křivce a to ve tvaru

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= a_0 t_1^4 + 4a_1 t_1^3 t_2 + 6a_2 t_1^2 t_2^2 + 4a_3 t_1 t_2^3 + a_4 t_2^4 \\ y &= b_0 t_1^4 + \ldots, \qquad z = c_0 t_1^4 + \ldots, \end{aligned}$$

což jest tvar více obvyklý.

V následujícím pak kladu si za úkol, vyšetřiti veškeré invariantní útvary závislé na $[t_1, t_2]$ — a po případě ještě na jiných proměnných, — které položeny byvše rovny nulle, dávají rovnice pro parametry bodů ležících na přímce anebo na kuželosečce, na křivce třetího stupně atd.

K tomu cíli utvořím si lineární výrazy $\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z$, kde $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ volím tak, aby výraz $\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z$, dosadím-li tam za x, y, z dle (4), byl formou čtvrtého stupně, jejíž součinitelé jsou závislý pouze na determinantech (2). Takové co nejjednodušší lineární výrazy vyplývají ihned ve tvaru determinantním

$$[i, k] = \begin{vmatrix} a_i, & a_k, & x \\ b_i, & b_k, & y \\ c_i, & c_k, & z \end{vmatrix} \quad i, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dostaneme tak v našem případě tří bikvadratických forem následující výrazy od nully různé:

$$[0,1],\ [0,2],\ [0,3],\ [0,4],\ [1,4],\ [2,4],\ [3,4],$$
$$[1,2],\ [1,3],\ [2,3].$$

Jest, jak snadným počtem plyne,

$$
\begin{aligned}
&[0,1] = 6At_1^2t_2^2 + 4Bt_1t_2^3 + Ct_2^4,\\
&[0,2] = -4At_1^3t_2 + 4C't_1t_2^3 + Dt_2^4,\\
&[0,3] = -4Bt_1^3t_2 - 6C't_1^2t_2^2 + Et_2^4,\\
&[1,2] = At_1^4 + 4D't_1t_2^3 + E't_2^4,\\
(5)\qquad &[0,4] = -4Ct_1^3t_2 - 6Dt_1^2t_2^2 - 4Et_1t_2^3,\\
&[1,3] = Bt_1^4 - 6Dt_1^2t_2^2 + Ft_2^4,\\
&[1,4] = Ct_1^4 - 6E't_1^2t_2^2 - 4Ft_1t_2^3,\\
&[2,3] = C't_1^4 + 4Dt_1^3t_2 + Gt_2^4,\\
&[2,4] = Dt_1^4 + 4E't_1^3t_2 + 4Gt_1t_2^3,\\
&[3,4] = Et_1^4 + 4Ft_1^3t_2 + 6Gt_1^2t_2^2.
\end{aligned}
$$

Násobíme-li tyto výrazy libovolnými činiteli nezávislými na $t_1\ t_2$, součiny pak sečteme a výsledek položíme roven nulle, dostaneme rovnici čtvrtého stupně pro poměr $t_1 : t_2$ udávající nám body na racionálné křivce (4), ležící na jedné přímce. Máme-li invariantní útvar, který se na tvar právě napsaný dá uvésti, víme tudíž, že kořeny mu pro $t_1 : t_2$ přináležející určují body na přímce; nedá-li se pak na tvar uvedený upraviti, neleží ony čtyři body racionálné křivky (při obecných hodnotách koefficientů $a_0, a_1 \ldots$) na přímce. Můžeme však snadno naznačiti cestu přímou, jak lze takové invariantní útvary sestrojiti.

Nejprve dostáváme, užijeme-li na (5) operaci Δ_{21},

$$\Delta_{21}[i,k] = i[i-1,k] + k[i,k-1],$$

a tedy

$$\Delta_{21}[0,1] = 0\quad,\quad \Delta_{21}([0,3] - 3[1,2]) = 0$$

a lze tudíž $[0,1]$ a $[0,3] - 3[1,2]$ pokládati za vedoucí členy invariantního útvaru s proměnnými u_1, u_2, jež explicitně vypsány mají tvar

$$
\begin{aligned}
G_1(u) = {}&[0,1]u_1^6 + 3[0,2]u_1^5u_2 + 3([0,3] + 2[1,2])u_1^4u_2^2 +\\
&+([0,4] + 8[1,3]u_1^3u_2^3 + 3([1,4] + 2[2,3])u_1^2u_2^4 +\\
\text{(II)}\qquad &+ 3[2,4]u_1u_2^5 + [3,4]u_2^6,\\
G_2(u) = {}&([0,3] - 3[1,2])u_1^2 + ([0,4] - 2[1,3])u_1u_2 +\\
&+([1,3] - 3[2,3])u_2^2.
\end{aligned}
$$

$G_1(u)$, $G_2(u)$ jsou invariantní útvary s proměnnými u_1, u_2, jichž součinitelé však závisí na proměnných t_1, t_2. Jsou tedy G_1, G_2 invariantní útvary závislé celkem na dvou řadách proměnných. Jsou to pak jediné takové útvary, jež jsou lineární v determinantech (i, k, l), nehledě ovšem k výrazům, jež vznikají z nich polarisací dle proměnné u. Ať za $[u_1, u_2]$ dosazujeme jakékoliv hodnoty, rovnice $G_1(u) = 0$, $G_2(u) = 0$ nám dávají rovnici čtvrtého stupně v $t_1 : t_2$, jež kořeny svými nám stanoví čtyři body na dané racionální křivce ležící na přímce. Můžeme dále na proměnných u_1, u_2 v $G_1(u)$, $G_2(u)$ prováděti jakoukoli operaci nerušící invarianci (ku př. polarisaci), dostaneme z $G_1(u)$, $G_2(u)$ opět výrazy, jež, položeny byvše rovny nulle, stanoví svými kořeny pro $t_1 : t_2$ čtyři body dané racionální křivky, položené na křivce. Nejobecnější výrazy takové vůbec dostaneme, když řady čísel (koefficientů to forem $G_1(u)$, $G_2(u)$:

$$[0, 1],\quad 3\,[0, 2],\quad 3\,([0, 3] + 2\,[1, 2]), \ldots\ [3, 4];$$
$$([0, 3] - 3\,[1, 2]),\quad ([0, 4] - 2\,[1, 3]),\quad ([1, 3] - 3\,[, 3])$$

místo, abychom je po řadě násobili

$$u_1^6,\ u_1^5 . u_2,\ u_1^4 . u_2^2 \ldots ;\ u_1^2,\ u_1 u_2,\ u_2^2$$

a pak každou pro sebe sečtli (čímž jsme svrchu dospěli ku $G_1(u)$, $G_2(u)$), násobíme výrazy závislými na (i, k, l) a na libovolných proměnných, různých však od $t_1 : t_2$, kteréžto výrazy se při lineární substituci stejně transformují jako souhrn

$$u_1^6,\ u_1^5 u_2,\ u_1^4 u_2^2, \ldots ;\quad u_1^2,\ u_1 u_2,\ u_2^2.$$

To jest všechny takové výrazy, jež položeny byvše rovny nulle, dávají pro $t_1 : t_2$ rovnici 4. st., jejíž kořeny nám stanoví na dané křivce čtyři body ležící na přímce, dostaneme, utvoříme-li všechny invariantní útvary forem proměnné u (v následujícím $f_1(u)$, $f_2(u)$ jsou základní kombinanty tří bikvadratických forem, viz (I))

$$f_1(u),\quad f_2(u),\qquad G_1(u),\quad G_2(u),$$

v nichž však součinitelé u různých mocnin u z forem $G_1(u)$ $G_2(u)$ se vyskytují lineárně a při čemž se nezavádějí nově proměnné $[t_1, t_2]$, (na kterýchž závisí již právě ony koefficienty forem $G_1(u)$, $G_2(u)$).

Možno dokonce na základě předcházejících úvah snadno dospěti ku větě: Všechny invariantní útvary tvořené ze systému čtyř forem

$$f_1(u),\quad f_2(u),\quad G_1(u),\quad G_2(u)$$

operacemi, při nichž proměnná $[t_1, t_2]$, na níž $G_1(u)$, $G_2(u)$ také závisí, se za konstantu pokládá, dávají položeny byvše rovny nulle, rovnice, jichž kořeny nám udávají parametry bodů ležících na přímce, jsou-li součinitelé forem $G_1(u)$, $G_2(u)$ v těch invariantních útvarech ve stupni prvém. Jsou-li tyto součinitelé ve stupni druhém, třetím, ..., dostáváme naznačeným postupem rovnice pro parametry bodů na křivce dané, jež leží na křivce stupně druhého, třetího, ... Tímto způsobem dostáváme pak při obecných hodnotách koefficientů $a_0, a_1, .. b_0, ..$ všecky invariantní útvary těch vlastností.

Formy ve (II) lze snadno vyjádřiti pomocí forem f_1, f_2. Jest po jednoduchém počtu nejprve pro první z obou forem

$$\frac{1}{3} G_1(u) = \frac{1}{15}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} t_2^1 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} t_1 t_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} t_2^2\right)(t_1 u_2 - t_2 u_1)^2$$
$$+ f_2(u)(t_1 u_2 - t_2 u_1)^4.$$

Užíváme-li známého označení polár, lze též psáti

$$(6) \quad \frac{1}{3} G_1(u) = 2(u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 D_{ut}^2 f_1(u) + (t_1 u_2 - t_2 u_1)^4 f_2(u)$$

a obdobně pro $G_2(u)$ jest

$$(6') \quad -\frac{1}{3} G_2(u) = D_{ut}^4 f_1(u) - 2(t_1 u_2 - t_2 u_1)^2 f_2(t).$$

Rovnice $G_1(u) = 0$ má na levé straně činitel $(t_1 u_2 - t_2 u_1)^2$; má tudíž pro $t_1 : t_2$ jeden kořen dvojnásobný rovný $u_1 : u_2$. Krátíme-li tedy činitelem $(t_1 u_2 - t_2 u_1)^2$, dostaneme z $G_1(u) = 0$ rovnici druhého stupně pro $t_1 : t_2$

$$(7) \qquad 2 D_{ut}^2 f_1(u) + (t_1 u_2 - t_2 u_1)^2 f_2(u) = 0$$

dávající nám parametry dvou bodů křivky dané položených na tečně v bodě o parametru $u_1 : u_2$. Z tohoto výsledku vyplyne snadno význam základní kombinanty $f_1(t)$. V bodě $u_1 : u_2$ jsou soustředěny dva body křivky na tečné ležících; spadne-li do $u_1 : u_2$ ještě třetí průsečík křivky a tečné v bodě $u_1 : u_2$, jest $u_1 : u_2$ inflexním bodem (po případě bodem úvratu). Klademe-li však v (7) $u_1 = t_1$, $u_2 = t_2$, dostaneme rovnici

$$f_1(t) = 0$$

jakožto rovnici pro parametry inflexních bodů dané křivky racionální.

Tím získali jsme geometrickou interpretaci základní kombinanty. Abychom mohli vyložiti aspoň na dvou příkladech užitečnost docílené věty, odvodíme si ještě rovnici pro parametry dotyčných bodů dvojných tečen. Tu dostaneme ihned, píšeme-li, že rovnice druhého stupně pro $t_1 : t_2$ v (7) má kořen dvojnásobný, a tedy, že její diskriminant dle $t_1 : t_2$ jest rovný nulle. Při výpočtu úplně postačí, když stanovíme vedoucí součinitel hledané kovarianty. Obdržíme rovnici (místo u píšeme za proměnnou t)

$$(8) \qquad [4(a_0 a_2 - a_1^2) + 2 a_0 b_0]\, t_1^8 + \dots = 0.$$

Jest tedy levá strana rovnice pro parametry dvojných bodů součtem čtyřnásobné Hessieny prvé základní kombinanty a dvojnásobného součinu obou základních kombinant.

Najdeme nyní nejjednodušší skupiny bodů položených na dané křivce racionální a zároveň na pevné kuželosečce. K tomu postačí vypočítati invarianty druhého stupně forem $G_1(u)$, $G_2(u)$ – vzhledem ovšem ku proměnné u. Invariant ten u první formy $G_1(u)$, jež jest 4-tého stupně v u, jest (vypisuji opět jenom vedoucí členy)

$$[12(a_2 a_0 - a_1^2) + a_0 b_0]\, t_1^8 + \ldots \tag{9}$$

u druhé formy pak ($G_2(u)$ jest druhého stupně v u)

$$[(a_2 a_0 - a_1^2) - 2 a_0 b_0]\, t_1^8 + \ldots .$$

Položíme-li invarianty právě získané rovny nulle, dostáváme v důsledku uvedené věty rovnice pro $t_1 : t_2$, jichž kořeny jsou parametry bodů dané racionálné křivky položených na kuželosečkách. Bylo by snadno výrazy (9) a (10) vyjádřiti na základě (11) jakožto kvadratické výrazy v $[i, k]$ a tudíž i vypsati rovnice právě zmíněných kuželoseček v souřadnicích $[x, y, z]$. Avšak i lineárná kombinace s konstantními součiniteli výrazů (9) a (10) dává nám levou stranu rovnice pro parametry bodů položených na kuželosečce. Specielně vyplývá, že body stanovené rovnicí (8) leží na kuželosečce a že body stanovené rovnicí $a_0 b_0 t_1^8 + \ldots = 0$ — anebo, což jest totéž rovnicí $f_1(t) f_2(t) = 0$ — leží na kuželosečce. Máme tak větu, že body inflexní křivky racionální čtvrtého stupně leží na kuželosečce, jež protíná křivku ještě ve dvou bodech daných rovnicí $f_2(t) = 0$, kdež $f_2(t)$ jest druhá základní kombinanta racionálné křivky. Současně máme větu, že dotyčné body dvojných tečen u té křivky leží na kuželosečce.

Právě tak jako jsme v předcházejícím sestrojili základní kovarianty *„přímkové"*, můžeme sestrojiti i kovarianty *„bodové"*, t. j. kovarianty dávající levé strany rovnic pro parametry bodů na křivce, jichž tečné procházejí pevným bodem. Taková základní kovarianta jest při křivce rac. 4. st. jedna a lze jí dáti tvar

$$2(u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 D^4_{ut} f_1(u) + (u_1 t_2 - u_2 t_1)^4 f_2(t). \tag{11}$$

Dostaneme je patrně ze (6) záměnou proměnných u a t. Invariant druhého stupně této formy dle proměnných u jest formou dvanáctého stupně t a má tu vlastnost, že položena byvši rovna nulle, dává rovnici pro parametry 12 bodů na křivce dané, jichž tečny se dotýkají kuželosečky. Invariant ten nehledě k numerickému součiniteli jest $f_1^2(t)$, t. j. čtverec první základní kombinanty. Dospíváme tak tudíž ku další větě, že tečné v inflexních bodech racionálné křivky 4. st. dotýkají se kuželosečky.

Postačí snad uvedené příklady, aby vysvitl význam užitečnosti naznačené methody. Podotýkám jenom, že získané formy $G_1(u)$, $G_2(u)$ usnadňují nám současně výpočet invariantních útvarů, majících daný geometrický význam. Tak ku př. podmínka, aby body tři o parametrech $t_1 : t_2$ $t'_1 : t'_2$, $t''_1 : t''_2$ ležely na jedné přímce, odvodí se snadno, najdeme-li z $G_1(u)$, $G_2(u)$ polarisováním a utvořením vhodné lineární kombinace přímkovou kovariantu, jež stává se nullou pro

$$t_1 : t_2 = t'_1 : t'_2, \quad t_1 : t_2 = t_1'' : t_2'',$$

jež tedy má místo činitele

$$(u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 \text{ činitel } (t_1 t'_2 - t_2 t'_1)\,(t_1 t''_2 - t_2 t''_1).$$

Krátíme-li tímto činitelem, obdržíme pro hledanou podmínku vztah

$$4 D^2_{tt'} D^2_{tt''} f_1(t) + (t_1 t'_2 - t_2 t'_1)^2 f_2(t'') + (t'_1 t''_2 - t'_2 t''_1)^2 f_2(t) + \\ + (t_1'' t_2 - t_2'' t_1)^2 f_2(t') = 0.$$

Konečně poznamenávám, že součinitelé $a_0, a_1, \ldots; b_0, b_1, b_2$ nejsou nezávislé, nýbrž, že mezi nimi jsou relace, jež dají se vysloviti jednoduše tak, že součinitelé invariantního útvaru, jehož vedoucí člen jest

$$[(a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_1 b_0) + 2 (a_4 a_0 - 4 a_3 a_1 + 3 a_2^2) - b^2_0]\, t_1^4 + \ldots$$

jsou vesměs rovny nulle. I tyto relace lze při vyšetřování racionálných křivek uspořádati methodou použitou svrchu pri odvození základních přímkových kovariantů.

III.

Buďtež uvedeny ještě hlavní výsledky pro racionálné křivky rovinné stupně 5. a prostorové stupně 6. Pro křivky stupně 5. jsou tyto základní kombinanty

$$f_1(t) = a_0 t_1^9 + \tbinom{9}{1} a_1 t_1^8 t_2 + \ldots, \quad f_2(t) = b_0 t_1^5 + 5 b_1 t_1^4 t_2 + \ldots$$

$$f_3(t) = c_0 t_1^3 + \ldots,$$

kde

$$a_0 = (0, 1, 2), \quad 4 . b_0 = (0, 1, 4) - 2\,(0, 2, 3),$$

$$105 . c_0 = 2\,(0, 1, 5) - 5\,(0, 2, 4) + 20\,(1, 2, 3)$$

a kde ostatní součinitele odvodíme z a_0, b_0, c_0 snadno operací Δ_{12}.

Přímkové kovarianty základní jsou tři a to

$$(u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 D^3_{ut} f_1(u) + (u_1 t_2 - u_2 t_1)^4 D_{ut} f_2(u) + 2\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^5 f_3(u),$$

$$3 D^5_{ut} f_1(u) - 10 D^3_{ut} f_2(u) . (u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 . + 60 D^2_{ut} f_3(u) . (u_1 u_2 - u_2 t_1)^3,$$

$$f_2(t).$$

Poslední z přímkových invariantních útvarů závisí pouze na proměnné t a jest shodna s druhou základní kombinantou, jejížto kořeny nám tudíž udávají pět bodů křivky 5. stupně, ležících na přímce.

Pro prostorové křivky stupně šestého jest těchto 5 základních kombinant

$$f_1(t) = a_0 t^{12} + \ldots, \quad f_2(t) = b_0 t_1^8 + \ldots, \quad f_3(t) = c_0 t_1^6 + \ldots,$$

$$f_4(t) = d_0 t_1^4 + \ldots, \quad e_0$$

Poslední z nich nezávisí na proměnné a jest tedy invariantem v užším smyslu. Při tom jest

$$a_0 = (0, 1, 2, 3),\quad 11\, b_0 = 3\,(0, 1, 2, 5) - 5\,(0, 1, 3, 4),$$

$$40 c_0 = (0, 1, 2, 6) - 2\,(0, 1, 3, 5) + 5\,(0, 2, 3, 4),$$

$$21\, d_0 = (0, 1, 4, 5) - 2\,(0, 2, 3, 5) + 10\,(1, 2, 3, 4),$$

$$210\, e_0 = 2\,(0,1,5,6) - 5\,(0, 2, 4, 6) + 20\,(0, 3, 4, 5) +$$
$$+ 20\,(1, 2, 3, 6) - 30\,(1, 2, 4, 5).$$

„R o v i n n é“ kovarianty pro ty křivky jsou tyto čtyři:

$$5\, D^3_{ut}\, f_1(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^3 + 3 D_{ut} f_2(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^5 +$$
$$+ 5 f_3(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^6,$$

$$6\, D^5_{ut}\, f_1(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1) - 10 D^3_{ut}\, f_2(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^3 +$$
$$+ 30\, D^2_{ut} f_3(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^4 - 33\, D_{ut} f_4(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^5,$$

$$2 D^6_{ut} f_1(u) + 6 D^4_{ut} f_2(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 - 40\, D^3_{ut} f_3(u)\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^3 -$$
$$- 15\, D^2_{ut}\, f_4(u)\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^4 - 12\, e_0\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^6,$$

$$11\, D^5_{ut} f_2(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1) + 25\, D^4_{ut} f_3(u)\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^2 +$$
$$+ 30\, D^3_{ut} f_4(u)\,.\,(u_1 t_2 - u_2 t_1)^3.$$

*

Une méthode pour examiner la signification géométrique des combinants.

(E x t r a i t d e l'a r t i c l e p r é c é d e n t.)

La méthode en question permet de reconnaître si un groupe de points, déterminé sur une courbe unicursale par un combinant appartenant à cette courbe et égalé à zéro, est située sur une droite, ou bien sur une conique, une cubique, etc. Cette méthode, exposée pour les quartiques planes, mais qu'on pourrait étendre, sans difficultés, à des courbes planes d'un degré quelconque, aussi bien qu'à des courbes gauches, et même à des variétés plus générales encore, donne pour les quartiques les résultats suivants:

Tous les combinants d'une quartique plane unicursale, donnée par les équations

$$x = a_0 t_1^4 + 4 a_1 t_1^3 t_2 + \cdots,\ y = b_0 t_1^4 + \cdots,\ z = c_0 t_1^4 + \cdots,$$

sont, comme on sait, des invariants des formes $f_1(t), f_2(t)$, définies par (I), où

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad 5B_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Toutes les formations invariantes d'un système de quatre formes de la variable u, soit

$$f_1(u), f_2(u), G_1(u), G_2(u),$$

où les formes $G_1(u), G_2(u)$ sont données par les expressions (II) et (5), ou bien exprimées moyennant $f_1(u), f_2(u)$ dans (6) et (6'), fournissent, égalées a zéro, des équations dont les racines donnent les paramètres des points de la courbe situés sur une droite, si les coefficients des formes figurent, dans ces formations, au premier degré. Si ces coefficients y figurent au 2^e, 3^e,... degré, on obtient, par le procédé indiqué tout à l'heure, les paramètres des points de la courbe situés sur une conique, une cubique, etc. On obtient, de cette manière, pour des valeurs générales des coefficients $a_0\, a_1, \ldots, b_0, \ldots$, toutes les formations invariantes ayant ces propriétés. Notons, cependant, que dans ce procédé la variable $[t_1, t_2]$, dont dépendent les coefficients des formes $G_1(u), G_2(u)$, doit être considérée comme constante.

On peut démontrer par le même procédé, presque sans aucun calcul, les théorèmes: Les points d'inflexion d'une quartique unicursale sont situés sur une conique, ce qui a lieu aussi pour les points de contact des tangentes doubles.

Enfin, l'auteur mentionne des formes, analogues aux formes $G_1(u), G_2(u)$, et qui se rattachent à la quintique plane unicursale et à la sextique gauche. Cette dernière courbe possède quatre formations de cette espèce (des invariants plans).

Dvě poznámky k vlastním pracím o závislosti refrakce plynů na tlaku.

Václav Posejpal.

§ 1. V prvé práci, z r. 1917, o závislosti refrakce plynů na tlaku menším jedné atmosféry[1]) jsem našel, vycházeje z kvadratického výrazu pro refrakci

$$(1) \qquad n\text{-}1 = Kp\,(1 + \beta p)$$

následující hodnoty konstant K a β, pro $t = 16^0$, $\lambda = 5462\, A^0$ (t. j.

[1]) Annalen der Phys. Bd. 53, 629, 1917. Rozpravy čes. akad. II. tř., roč. 26, č. 61, 1918. Bulletin intern. de l'Académie des. Sc. de Bohême, 1918.