Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Kadeřávek

Dvě drobnosti z úloh deskriptivní geometrie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 56--59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123268

Dvě drobnosti z úloh deskriptivní geometrie.

Dr. *Frant. Kadeřávek.*

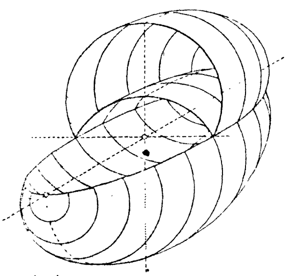
I. Sestrojujeme-li u rotačních ploch mez stínu vlastního při osvětlení rovnoběžnými paprsky světelnými za pomoci kulových ploch, tečných k dané rotační ploše, a užijeme-li při tom rovinu světelného meridianu za průmětnu promítání orthogonálného, shledáme, že vzdálenost společného průmětu obou bodů meze stínu vlastního, připadajících na libovolnou povrchovou kružnici plochy, měřená od osy rotace, je přímo úměrna výšce kužele normal, sestrojeného k dané ploše podél oné kružnice. Pokládáme-li osu rotační za osu X pravoúhlých souřadnic, a je-li úhel sevřený touto osou a světelnými paprsky rovný hodnotě α, tu orthogonální průmět meze stínu vlastního za rovnoběžného osvětlení na rovinu světelného meridiánu bude vyjádřen rovnicí

$$M \equiv y = \frac{1}{2} f'(x)\, ctg\, \alpha, \text{ je-li } K \equiv y^2 = f(x)$$

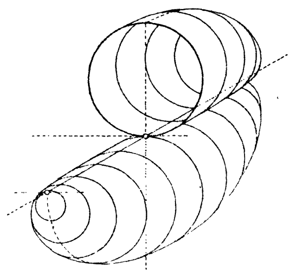
rovnicí křivky meridiání. Je z toho patrno, že meze stínů vlastních při rovnoběžném osvětlení libovolné rotační plochy spočívají na vzájemně affiních válcích, při čemž společnou rovinou základní těchto affinit jest rovina meridiánu kolmá k meridiánu světelnému dané plochy. V důsledku toho možno posouditi snadno veškery meze stínů vlastních libovolné rotační plochy v osvětlení rovnoběžném, známa-li jedna specielní mez této plochy, při čemž samozřejmě z úvahy vyloučeny jsou meridián a hrdla i rovníky plochy jakožto meze stínů limitní. Tak na příklad otáčením šroubovice okolo osy rovnoběžné s její osou vznikne plocha translační (Müller), jíž se podél oné šroubovice dotýká válec. Průmět této specielní meze na rovinu světelného meridiánu je sinusoida, promítají se proto veškery meze této plochy při rovnoběžném osvětlení na meridián světelný do sinusoid. Mez stínu vlastního lze tudíž snadno sledovati i v její části imaginární. Vytkneme-li místo obecné plochy rotační onu, vzniklou rotací křivky $P \equiv y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ okolo její osy souměrnosti, seznáváme, že meze stínů vlastních této plochy spočívají na válcích stupně druhého. Křivku P však možno vždy zvoliti tak, aby v daném bodě hyperoskulovala meridiání křivku K dané rotační plochy, majíc s K touž osu souměrnosti. Z toho patrno, že možno sestrojiti naznačenou cestou za pomoci rotační plochy o meridiánu P oskulační kružnici meze stínu vlastního obecné rotační plochy. Sestrojiti křivku P o společné ose souměrnosti s danou křivkou K a tuto v daném bodě hyperoskulující možno různě; elegantní konstrukci této irrationální křivky třetího stupně v uvedeném specielním určení podal p. prof. J. Žďárek.

II. Vždy působívá potíž volba vhodného příkladu na přednesenou látku. Z nesnází těch vznikla práce Küpperova o ploše stupně čtvrtého „zvlášť vhodné k přednáškám“ a pojednání o konoidu třetího stupně po Küpperovi nazvaném. Účelem těchto řádků jest upozornění na plochy stupně čtvrtého, rovněž velmi vhodné pro cvičení. V článku „O translační ploše kruho-kruhové“, uveřejněném svého času v tomto časopisu, uvedl jsem pohodlné odvození ploch stupně čtvrtého ze dvou ploch druhého stupně sčítáním pořadnic a ukázal, že lze jednoduše sestrojiti řezy, tečné roviny, meze stínů, isofoty i isofengy a singularity těchto ploch; v následujícím uvedu některé specielní plochy z tohoto druhu, které zvlášť jsou vhodné pro studium singularit.

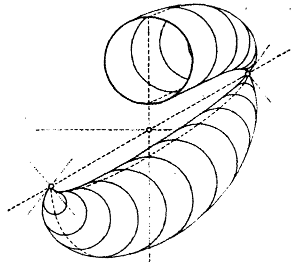
Vytkněme elliptický válec a sestrojme rotační ellipsoid, který se ho ve dvou bodech diametrálně protilehlých dotýká svými vrcholy. Zvolíme-li společnou rovinu hlavní těchto dvou ploch za základní rovinu sčítání, jehož směr je kolmý k této rovině, vyjde



Obr.



Obr. 2



Obr. 3.

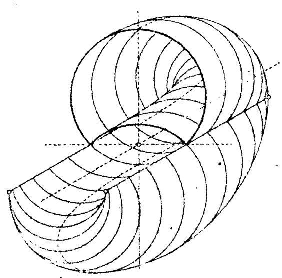
jako součet plocha stupně čtvrtého, která má dvojnou ellipsu, dotýkající se dvakráte plochy v bodech, v nichž jedna její část se dotýká druhé. Tato ellipsa je reálná, protíná-li válec ellipsoid (obr. 1.), přechází ve dvojnou přímku, podél níž se obě souměrné části plochy stupně čtvrtého dotýkají, dotýkají-li se užitý válec a ellipsoid (obr. 2.); jinak jest imaginární (obr. 3.).

Zaměníme-li ellipsoid, který jsme k vytvoření použili, za podobný, podobně položený a soustředný, obdržíme plochu stupně čtvrtého s dvojnou křivkou hyperbolickou, protínající ji ve čtyřech bodech kuspidálních, kteráž hyperbola v případě, kdy normálný řez užitého válce a meridián ellipsoidu jsou křivkami podobnými, přechází ve dvě rovnoběžné přímky (obr. 4.).

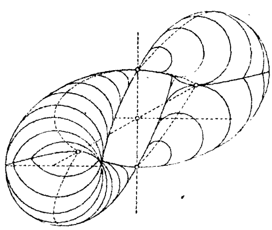
Nahradíme-li v původní skupině ellipsoid jiným, homothetickým, majícím s původním společný pouze vrchol na ose rotace, dojdeme k ploše stupně čtvrtého, jejíž dvojná křivka se pouze v jednom bodě plochy dotýká, druhý dotyčník přešel ve dva body kuspidální. Při vhodné volbě lze docíliti i toho, že tato dvojná kuželosečka se rozpadne v dvojinu na ploše se protínajících přímek.

Obr. 5. podává náčrt plochy vzniklé součtem rotačního válce a rotačního kužele, jehož vrchol položen na ose válcové a kdy opět společná rovina hlavní, obsahující obě osy ploch, zvolena za základní rovinu kolmého součtu. Plocha má dva body konické vedle bodů kuspidálních.

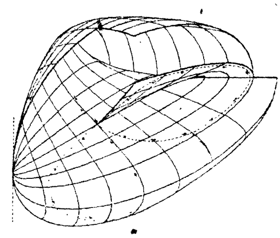
V dosud probíraných případech byly veškery body dvojné křivky uvažovaných ploch stupně čtvrtého téhož druhu, buď uniplanární nebo biplanární s výminkou konečného počtu bodů kuspidálních. Sečteme-li však dva shodné rotační kužely dotýkající se podél společné površky, vzavše opět společnou rovinu hlavní za základní rovinu součtu, dojdeme k ploše s dvojnou křivkou složenou



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

ze dvou přímek, z nichž jedna je souhrnem bodů uniplanárních, druhá souhrnem bodů biplanárních (obr. 6.). Plochy vyznačené v obr. 5. a 6. jsou plochami jednostrannými; při poslední z nich naznačen běh, jímž možno uvedenou vlastnost prokázati.

Pro názornost vynechány při náčrtech 1, 2, 3, 4 a 6 části plochy.

Na plochách uvedených sledovali jsme pouze spojitost změn singularit; řezy, obrysy, meze stínů, isofoty a j. lze rovněž jednoduše a elegantně provésti.

Další příklady skytají plochy vytvořené jako souhrn bodů, které na paprscích dané lineárné kongruence oddělují průsečíky s danými třemi plochami α, β, γ dle daného, stálého dvojpoměru μ. Vytvoření ploch součtem pořadnic i transformace reciprokými poloměry jsou pouze specielními případy tohoto obecného způsobu.

*

Deux menus problèmes de la géométrie descriptive.

(Extrait de l'article précédent.)

En cherchant l'ombre propre d'une surface de révolution, on peut se servir de sphères inscrites auxiliaires. On trouve facilement que les ombres propres sont situées sur des cylindres qui se trouvent dans une affinité orthogonale. La plus simple des surfaces de révolution, dont les ombres propres soient situées sur des cylindres du 2e ordre, est celle dont la courbe méridienne est

$$M \equiv y^2 = ax^3 + bx^1 + cx + d.$$

Si l'on détermine cette surface de manière qu'elle soit surosculatrice d'une surface de révolution donnée le long d une parallèle, son ombre propre et celui de la surface donnée auront le même cercle osculateur.

L'auteur traite des surfaces spéciales du 4e ordre, et surtout de leurs singularités. Ces surfaces sont dérivées de deux surfaces du 2e ordre au moyen d'une addition de coordonées

Poznámka k práci „Charakter kmitů ve dvou spřažených kruzích".*)

B. Kladivo.

V pojednání „Charakter kmitů ve dvou spřažených kruzích" bylo ukázáno: Abychom vyšetřili, má-li bikvadratická rovnice

$$l^4 + a_1 l^3 + a_2 l^2 + a_3 l + a_4 = 0 \qquad (1)$$

kořeny reálné-komplexní, stejné-různé, stačí uvažovati dva parametry

$$x = \frac{t}{r^2}, \; y = \frac{s^2}{r^3}, \left(\text{kde } r = -\frac{3}{16}a^2_1 + \frac{a_2}{2},\; s = -\frac{a_1^3}{32} + \frac{a_1 a_2}{8} - \frac{a_3}{4},\right.$$

$$\left. t = -\frac{3a_1^4}{256} + \frac{a^2_1 a_2}{16} - \frac{a_1 a_3}{4} + a_4\right),$$

i znamení veličiny r, je-li $r \neq 0$, a parametry t, s, je-li $r = 0$.

Doplním uvedené pojednání následující poznámkou, vyšetřující nutné a postačující podmínky pro to, aby kořeny bikvadratické rovnice (1) měly stejné a) reálné, b) imaginární části (až na znamení).**)

A. $r \neq 0$. 1. Předpokládáme, že všechny kořeny rovnice (1) jsou komplexní. Z uvedené práce plyne, že v tom případě musí býti bod (x, y) buď uvnitř úseků I, VIII, VII (obr. 1), nebo na společné hranici úseků I a VIII, VIII a VII, nebo při $r > 0$ na ose $y = 0$ mezi A a C (bod A je vyloučen).

*) Rozpravy čes. Akad., tř. II., roč. 1916 (XXV), čís. 52.

**) Úvaha řeší úplně otázku, jaké jsou podmínky, aby kmity ve dvou induktivně spřažených oscilujících kruzích měly stejný útlum nebo stejné kmitočty. Srov. A. Kalähne: Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme. Ann. d. Phys. 1913 (42), str. 1001—1030, B. Macků: Über das Entstehen einwelliger Oszillationen in gekoppelten Oszillationskreisen. Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. 1915 (10), str. 105—121.