Miloslav Pelíšek

O složeném helikoidu vytvořeném hypocykloidálním (elliptickým) pohybem

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 107--114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123270

$tg\alpha$. La surface en question est remplie par les axes de courbure qui correspondent au point A de ces hélices. Soient r le rayon du cercle décrit sur $\overline{AB}$ comme diamètre et d la droite perpendiculaire à $\overline{AB}$, ayant la distance $\delta = r . tg^2\alpha$ du point A. Posons $x \equiv d$, $y \equiv AB$, et soit $z \perp \pi$; l'équation de la surface cherchée est — en coordonnées rectangulaires — de la forme

$$x^2 (z^2 \, tg^2\alpha - y^2) = (z^2 \, tg^2\alpha - y^2 - ay)^2 \qquad (1)$$

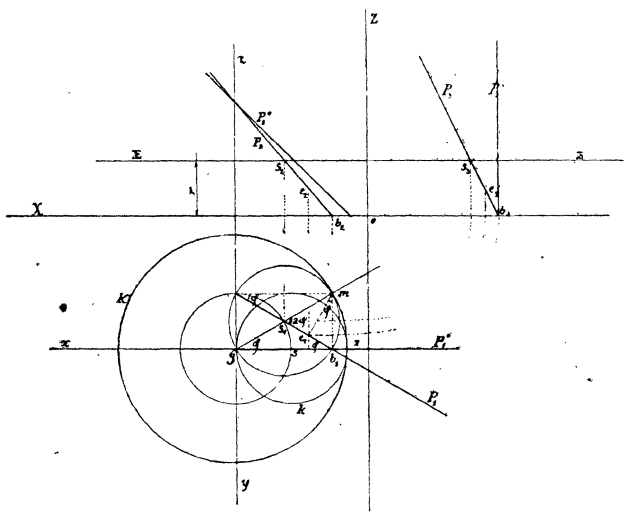
Donc, la surface considérée est une surface gauche du 4e ordre, dont la courbe double se compose d'une droite double $d \equiv x$ et d'une hyperbole double h située dans le plan (yz). Le contour apparent de la surface P^4 sur le plan horizontal est une parabole p dont A est le foyer. La tangente au sommet de cette parabole coïncide avec l'axe $x \equiv d$. Le cône directeur de la surface P^4 est un cône de révolution. Les plans asymptotiques enveloppent un cône de révolution dont le sommet coïncide avec le foyer A de la parabole p et dont l'axe est perpendiculaire à (xy). La ligne de striction de la surface P^4 est une courbe gauche du 4e ordre, qui coïncide avec le contour apparent horizontal de la surface P^4. La projection de la ligne de striction sur le plan (yz) coïncide avec l'hyperbole double h. La section de la surface par un plan horizontal ϱ est une conchoïde de la droite. La projection horizontale du contour apparent sur le plan vertical de projection est une cubique mixte. Le contour apparent de la surface sur le plan vertical est une sextique.

Mentionnons encore la ligne d'ombre portée sur le plan (xy), quand les rayons lumineux sont parallèes aux génératrices du cône directeur, situées dans les plans (xz) et (yz), le foyer A étant le sommet du cône directeur. Dans le premier cas l'ombre portée sur le plan (xy) est une courbe enveloppée par les symétrales des angles que font les tangentes de la parabole p avec la tangente au sommet. Cette courbe est la podaire négative d'une hyperbole equilatère, son sommet étant le pôle. Dans le 2e cas l'ombre portée sur le plan (xy) est une parabole confocale à la parabole p.

O složeném helikoidu vytvořeném hypocykloidálním (elliptickým) pohybem.

Napsal *Miloslav Pelíšek*, Brno.

Budiž (obr. 1) K kružnice o středu S a poloměru $R = 2\,r$, po jejímž vnitřním obvodu nechť se kotálí kružnice k o středu s a poloměru r, jejíž počáteční poloha má okamžitý pól otáčení a; tímto bodem a nechť prochází přímka P, jež je s kružnicí k pevně spojená a jež se promítá do roviny kružnice k jako průměr této kružnice; k vůli jednoduchosti vývinů předpokládejme ještě, že tato přímka P svírá s rovinou kružnice k úhel sklonu $\beta = 45^{\circ}$. Při kotálení kružnice k po vnitřním obvodě kružnice K vytvoří přímka P, jež jest s kružnicí k pevně spojena, plochu, jež jest zvláštním případem Burmestrovy Wringfläche a má zajímavé vlastnosti, jež jsou však v platnosti jen pro tuto zvláštní polohu přímky P. Volme osy



Obr. 1.

souřadnic x, y, z, jak patrno z obrazce 1., a odkotálejme kružnici k do oné polohy, aby okamžitý pól otáčení byl m, tak že se na kružnici K odkotálel oblouk $\widehat{am} = \varphi$ a na kružnici k se odkotálel oblouk $m\,b_1 = 2\varphi$ při čemž b_1 jest na $a\,S$, jelikož bod a obvodu kružnice k při tomto kotálení opíše, jak známo, průměr kružnice K; mimo to je b_1 na kolmici $m\,b_1$ ku $a\,S$, jelikož $b_1\,m$ je normála přímky $a\,S$, kterou při kotálení kružnice k opíše tento bod. Při tomto kotálení přejde přímka P do takové polohy, že její půdorys jest $P_1 = b_1\,s_1$ a její nárys $P_2 = b_2\,s_2$ a její bokorys $P_3 = b_3\,s_3$, při čemž body s_2 a s_3 jsou při volbě $\beta = 45^{\circ}$ ve výšce r nad osou X.

Z obrazce 1. odvodíme pak snadno rovnice průmětů tvořící přímky $P = b\,s$ a sice:

pro půdorys: $P_1 \ldots x \sin\varphi + y \cos\varphi = 2\,r \sin\varphi \cos\varphi$;
pro nárys $P_2 \ldots x + z \cos\varphi = 2\,r \cos\varphi$,
a pro bokorys $P_3 \ldots y - z \sin\varphi = O$.

Rovnice nárysu P_2 a bokorysu P_3 tvořící přímky můžeme též psáti ve tvaru: $x = (2r - z) \cos \varphi$ a $y = z \sin \varphi$. Eliminací úhlu φ z těchto rovnic obdržíme jakožto rovnici uvažované plochy

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{2r - z}\right)^2 + \frac{y^2}{z^2} = 1.$$

Položíme-li $z = + r$, obdržíme jako řez plochy rovinou Σ, jež jest rovnoběžná k rovině základní kružnice kotálení a má od ní vzdálenost $+ r$, kružnici $\varkappa$, jejíž rovnice jest $x^2 + y^2 = r^2$. Transformujeme-li roviny souřadnic paralelně, aby rovina Σ tohoto kruhového řezu byla novou půdorysnou, položivše místo $z \ldots z + r$, pak přejde rovnice naší plochy v následující, souměrnější tvar:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{(r - z)^2} + \frac{y^2}{(r + z)^2} = 1.$$

Z této rovnice jest patrno, že při kotálení kružnice k po kružnici K opíše každý bod přímky F, jehož výšky nad nebo pod kruhovým řezem jsou $\pm v$, ellipsy, jejíž poloosy jsou $r - v$ a $r + v$, tedy shodné ellipsy, jež jsou však navzájem otočené o 90^0.

Zvolíme-li v rovnici (2) specielně $v = \pm r$, obdržíme elliptické řezy, jejichž jedna poloosa se rovná nule, tedy dvě k sobě kolmé přímky A a B, jež počítají dvojnásobně. Z toho je patrno následující vytvoření naší plochy, jež povstane, pohybuje-li se úsečka konstantní délky tak, aby její krajní body se pohybovaly na dvou k sobě kolmých mimoběžných osách (při čemž, v našem specielním případě, hybná úsečka svírá úhel 45^0 s rovinou rovnoběžnou k oběma daným osám); je to tedy zevšeobecnění rovinného elliptického pohybu do prostoru, s nímž se mimo jiné zabýval též Küpper.

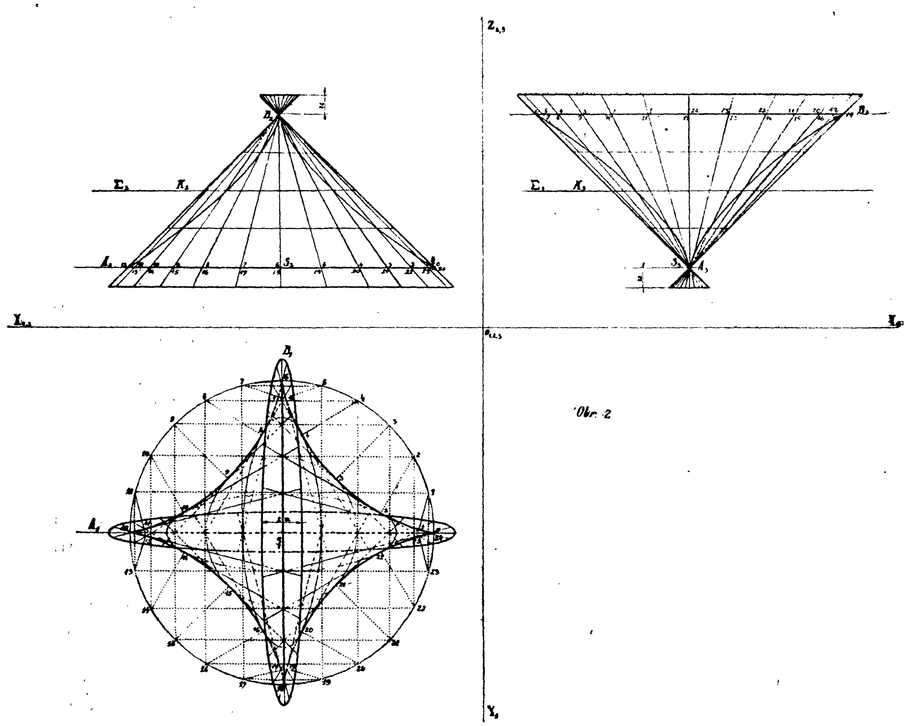
Jak z výše uvedené rovnice patrno, je povstalá plocha čtvrtého řádu, jejíž dvojná čára sestává z uvedených kolmých a mimoběžných os A a B a rovina, jež půlí vzdálenost těchto os, protíná plochu v jediném kruhovém řezu $\varkappa$.

Obrys plochy v půdorysně obdržíme (obr. 2) rozdělíme-li základní kružnici K na určitý počet stejných dílů, ku př. 24, spojíme dělící body přímkami rovnoběžnými k osám X a Y a v povstalých obdélnících vedeme úhlopříčny, jež neprocházejí počátkem souřadnic. Obálka těchto úhlopříčen je zdánlivý obrys naší plochy v půdorysně, a sice jest to — jak známo — astroida, vepsaná základní kružnici K.

Zdánlivý obrys plochy v nárysně. Nárysy povrchových přímek tvoří svazek o vrcholu B_2 a protínají přímku A_2 v harmonické řadě, z toho plyne, že zdánlivý obrys plochy v nárysně, sestává ze dvou přímek, jež procházejí bodem B_2 a svírají s osou X úhly

45°. Skutečně obdržíme derivaci rovnice $x + z \cos \varphi = 2r \cos \varphi$ a eliminací úhlu φ, rovnice $x + z = + 2r$ a $x - z = - 2r$.

Zdánlivý obrys v bokorysně. Bokorysy povrchových přímek tvoří svazek o vrcholu A_3 a protínají přímku B_3 v harmonické řadě; z toho plyne, že zdánlivý obrys plochy v bokorysně sestává ze dvou přímek, jež procházejí bodem A_3 a svírají s osou Y úhly 45°.



Obr. 2

Skutečně obdržíme derivaci rovnice $y - z \sin \varphi = 0$ a eliminací úhlu φ rovnice $y \pm z = 0$.

Poznámka. Kdybychom zvolili za stranorysnu libovolnou k půdorysně kolmou rovinu, přesvědčili bychom se snadno, že zdánlivý obrys v stranorysně je hyperbola a tedy při tomto pohledu plocha vypadá jako hyperboloid jednoplochý.

Strikční křivka plochy.

Spustíme-li z okamžitého pólu m kolmici $m\, e_1$ na příslušnou polohu půdorysu povrchové přímky P_1 (obr. 1.), jest pata e_1 této kolmice onen bod, ve kterém se tečna $b_1\, s_1$ dotýká astroidy, jež tvoří zdánlivý obrys plochy v půdorysně. Snadno seznáme z obr. 1., že parametrické vyjádření této křivky jest

$$x = 2\,r\,cos^3\,\varphi \text{ a } y = 2\,r\,sin^3\,\varphi;$$

tudíž jest rovnice této křivky

$$\left(\frac{x}{2r}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2r}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

aneb též, odstraníme-li odmocniny:

$$(x^2 + y^2 - 4\,r^2)^3 + 108\,r^2\,x^2\,y^2 = 0.$$

Poněvadž všechny povrchové přímky naší plochy svírají s půdorysnou konstantní úhel sklonu 45°, jest její direkční kužel rotačním kuželem — v našem specielním případě jest to orthogonálný kruhový kužel; pak je však známo — viz Maurice d'Ocagne: Cours de géométrie descriptive, et de géometrie infinitésimale, Paris 1896 page 379, odstavec 335, — že půdorys strikční křivky této plochy splývá se zdánlivým obrysem plochy v půdorysně. Tato vlastnost se dá též snadno dokázati direktně, jak jsem učinil v pojednání, jež se týče analogického případu, že se kružnice o poloměru r kotálí po vnějším obvodu kružnice o poloměru $2\,r$. Promítáme-li tudíž bod e_1 (obr. 1.) do nárysu příslušné povrchové přímky plochy do e_2 a rovněž tak do bokorysu do e_3, obdržíme z obrazce (1) snadno výrazy pro souřadnice bodu e, jenž jest libovolným bodem strikční křivky naší plochy:

$$x = 2\,r\,cos^3\,\varphi,\; y = 2\,r\,sin^3\,\varphi,\; z = 2\,r\,sin^2\,\varphi.$$

Eliminací úhlu φ z rovnic pro x a z obdržíme rovnici pro nárys strikční křivky $(2\,r - z)^3 = 2\,r\,x^2$, a rovněž tak obdržíme eliminací úhlu φ z rovnic pro y a z rovnici pro bokorys strikční křivky $z^3 = 2ry^2$; tyto křivky jsou tedy kubické paraboly. Půdorys strikční křivky má ovšem výše uvedenou rovnici

$$(x^2 + y^2 - 4\,r^2)^3 + 108\,r^2\,x^2\,y^2 = 0;$$

máme tedy výsledek:

Strikční křivka naší plochy je prostorová křivka šestého řádu, jejíž půdorys je astroida, a jejíž nárys a bokorys jsou kubické paraboly (čítající s ohledem na souměrnost dvojnásobně). V obr. 2. jest nárys a bokorys strikční křivky odvozen z jejího půdorysu pouhým promítáním.

Tečna v libovolném bodě strikční křivky.

Jak známo, je úhel sklonu, který tečna v libovolném bodě prostorové křivky $x = u(\varphi)$, $y = v(\varphi)$, $z = w(\varphi)$ svírá s půdorysnou, určen rovnicí:

$$tg\ \alpha = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}}}.$$

V našem případě jest:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -6\,r\cos^2\varphi\sin\varphi,\ \frac{dy}{d\varphi} = 6\,r\sin^2\varphi\cos\varphi \text{ a } \frac{dz}{dy} = 4r\sin\varphi\cos\varphi.$$

Snadno shledáme, že: $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 36\ r^2 .\ \sin^2\varphi\cos^2\varphi$ a $\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = 16\,r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$; z toho však plyne:

$$tg\ \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{36}{16}}} = \pm\frac{2}{3}.$$

Naše strikční křivka je tedy křivka stejného spádu, jehož č'selná hodnota jest $\frac{2}{3}$. Rozvineme-li tudíž přímý válec jehož základnou je uvedená astroida, rozvine se naše strikční křivka ve přímku, jejíž úhel sklonu α jest dán výrazem $tg\ \alpha = \pm\frac{2}{3}$; tudíž se rozvine celá strikční křivka jako lomená čára, jež tvoří s rozvínutím základny dva rovnoramenné trojúhelníky, jejichž úhly u základny obnášejí $\alpha = 33^0 41'$...

Z toho je dále patrno:

Strikční křivka naší plochy sestává ze čtyř šroubovic, z nichž dvě jsou pravotočivé a shodné a ostatní dvě jsou levotočivé a s dřívějšími souměrně shodné.

Poněvadž povrchové přímky naší sborcené plochy se dotýkají uvedeného přímého válce s astroidickou základnou v bodech této šroubovice a tvoří s touto šroubovicí konstantní úhel **$45^0 - 33^0 41' =$ $= 11^0 19'$**, jest patrno (viz: Maurice D'Ocagne: Cours de la géométrie descriptive 1896, odstavec 337, pag 384), že naše sborcená plocha je helikoid, jehož jádrem (neb řídící plochou) je uvedený astroidický válec; přesněji řečeno:

Naše sborcená plocha sestává (je složena) ze čtyř helikoidů, z nichž dva jsou pravotočivé a shodné, a ostatní dva jsou levotočivé a k dřívějším souměrně shodné. Všechny tyto čtyři plochy přecházejí jedna ve druhou dotykem podél společné povrchové přímky.

Poznámka 1. Má-li tvořící přímka P takovou polohu, že se nepromítá jako průměr hybné kružnice, nejsou již povstalé plochy složeny z helikoidů.

Poznámka 2. Uvažujeme-li orthogonálnou prostorovou affinitu jejíž rovinou totožnosti je rovina základní kružnice a jejíž modul je, libovolné číslo, seznáme snadno že výše uvedené vlastnosti zůstanou v platnosti v tom případě, že tvoříce přímky, tvoří libovolný konstantní úhel s půdorysnou.

Poznámka 3. Zjistil jsem v několika pracích (dosud neuveřejněných), že uvedené vlastnosti zůstávají v platnosti nejen pro pohyb hypocykloidický, nýbrž též pro pohyb epicykloidický a v obou případech pro $R = n\, r$, takže mohu vysloviti na základě induktivních závěrů následující větu o pohybu epi- nebo hypocykloidálném, jež není, jak mám za to, dosud známa:

Kotálí-li se kružnice k o poloměru r po vnějším neb vnitřním obvodě kružnice K poloměru $R = n\, r$ (tak, aby se jejich roviny ztotožňovaly); je-li dále s rovinou hybné kružnice pevně spojena přímka P, jež tvoří s rovinou hybné kružnice konstantní úhel β a promítá se stále jako průměr této kružnice, pak vytvoří tato přímka P při uvedeném kotálení sborcenou plochu, jež má následující karakteristické vlastnosti:

1. Zdánlivý obrys v půdorysně (rovině obou kružnic kotálení) se ztotožňuje s půdorysem strikční křivky povstalé sborcené plochy.

2. Tato strikční křivka jest složena ze $2\,n$ podvojmo souměrně shodných šroubovic (pravo- a levotočivých), jejichž konstantní spád jest dán výrazem $tg\, \alpha = \dfrac{n}{2\,n \pm 1}$, při čemž znaménko $+$ přísluší pohybu epicykloidálnému a znaménko $-$ přísluší pohybu hypocykloidálnému.

3. Povstalá sborcená plocha jest složena ze $2\,n$ helikoidů, jež mají uvedenou šroubovici za řídicí čáru a jež jsou též střídavě souměrně shodné (n pravotočivých a n levotočivých); jednotlivé složky přecházejí jedna ve druhou dotykem podél společné povrchové přímky.

*

Sur l'hélicoide composé, engendré par un mouvement elliptique.

(Extrait de l'article précédent.)

Quand un cercle roule intérieurement sur un cercle au rayon double, une droite entrainée par ce mouvement, ayant une inclinaison de 45° sur le plan du cercle mobile et se projetant suivant un diamètre de ce cercle, engendre une surface gauche du 4e ordre à l'équation

$$\frac{x^2}{(r-z)^2}+\frac{y^2}{(r+z)^2}=1$$

Le contour apparent de cette surface dans le plan de la base de roulette est une astroïde; cette courbe est, de plus, la projection de la ligne de striction de la surface. Cette ligne de striction est une hélice sur un cylindre à base astroïdique, dont la pente constante est $\pm\frac{2}{3}$; une moitié est une hélice directe, et l'autre, symétrique, est une hélice rétrograde. La surface se compose d'un helicoïde gauche directe, et d'un hélicoïde, symétrique au premier, rétrograde; les deux hélicoïdes se raccordent suivant la droite commune.

L'auteur signale encore cette proposition plus générale:

Si le cercle de rayon r roule intérieurement ou extérieurement sur un cercle au rayon nr, et si une droite, ayant la même position qu'au cas précedent, est entrainée dans ce mouvement, elle engendre une surface gauche dont le contour apparent dans le plan de la base de roulette est une hypo- ou épicycloïde à $2n$ parties égales; cette courbe est, de plus, la projection de la ligne de striction de la surface, et cette ligne de striction est composée de $2n$ hélices dont la pente constante est $\frac{2n}{2n\pm 1}$; la moitié d'elles sont des hélices directes, l'autre moitié, symétrique, sont des hélices rétrogrades. La surface engendrée par la droite roulante est composée de $2n$ hélicoïdes gauches, dont la moitié sont des hélicoides directes, l'autre moitié, symétrique, sont des hélicoïdes gauches rétrogrades; les surfaces voisines se raccordent suivant la droite commune.

O jedné methodě pro vyšetřování geometrického významu kombinant.

Napsal *K. Petr.*

Při vyšetřování vlastností racionálných křivek vyskytují se veličiny nemající bezprostřední geometrický význam. Body na křivce ku př. nejsou tu obyčejně stanoveny rovinnými (resp. prostorovými) souřad-