Karel Čupr

O Laguerrově methodě stanovení rodu celistvé transcendenty

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 24--34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123271

Sur une classe de surfaces réglées.

(Extrait de l'article précédent.)

Je détermine les surfaces réglées Π qui jouissent de la propriété suivante: les deux tangentes flecnodales de *M. Wilczynski,* appartenant à chaque génératrice de Π, correspondent l'une à l'autre dans une homographie fixe. Il y a deux espèces de surfaces Π. Les surfaces de la première dépendent de trois constantes essentielles et admettent un groupe continu d'homographies à un paramètre. La seconde espèce, qui dépend d'une fonction arbitraire, jouit de la propriété caractéristique suivante: La surface Π elle-même et les lieux $\overset{-1}{\Pi}$, $\overset{1}{\Pi}$ des deux tangentes flecnodales de Π appartiennent à des complexes linéaires. Ces trois complexes font partie d'un faisceau; la congruence linéaire Δ base de ce faisceau peut être générale ou spéciale. Voici comment on peut obtenir les équations d'une surface Π de seconde espèce, dans les deux cas. Si Δ est générale, soient

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t), \quad x_4 = \varphi_4(t)$$

les coordonnées Cartésiennes d'une courbe C à courbure constante, située sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0.$$

Les coordonnées kleinéennes des génératrices de Π sont:

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t), \quad \varphi_4(t), \quad 1, \quad 0.$$

Si, au contraire, Δ est spéciale, soient

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t)$$

les coordonnées cartésiennes d'une courbe C' à courbure constante de l'espace ordinaire. Les coordonnées kleinéennes des génératrices de Π sont

$$2\varphi_1(t), \quad 2\varphi_2(t), \quad 2\varphi_3(t), \quad 1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2,$$
$$i(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2), \; 1, 0.$$

O Laguerrově methodě stanovení rodu celistvé transcendenty.

Napsal *K. Čupr.*

1. Uvažujme řadu $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n}$;

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots,$$

$lim\, |a_n| = \infty$, $lim\, |a_n - a_{n-1}| \neq 0$, $\sum_1^{\infty} \frac{A_n}{a_n}$ nechť konverguje absolutně.

Opišme kol bodů $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ jako středů kružnice o poloměru σ; značme je (α, σ); σ volme tak, aby kružnice tyto mezi sebou se neprotínaly. Z bodu (o, o) opišme kružnici takovým poloměrem, aby q kružnic leželo uvnitř této kružnice. Tak získali jsme obor C_q, v němž a na jehož obvodu konverguje $S(z)$ stejnoměrně. Abychom to dokázali, uvažujme zbytek

$$R_m = \sum_m^\infty \frac{A_k}{z - \alpha_k}.$$

Poněvadž jest

$$\left|\frac{z}{\alpha_k} - 1\right| = \left|1 - \frac{z}{\alpha_k}\right| \geqq 1 - \left|\frac{z}{\alpha_k}\right| \geqq 1 - \frac{\varrho}{|\alpha_k|} \geqq 1 - \frac{\varrho}{|\alpha_{q+1}|}; \; m > b,$$

i jest $|R_m| \leqq \dfrac{1}{1 - \dfrac{\varrho}{|\alpha_{q+1}|}} \sum_m^\infty \left|\dfrac{A_k}{\alpha_k}\right|.$

Řada $\sum_1^\infty \dfrac{|A_k|}{|\alpha_k|}$ konverguje absolutně: volíme-li tedy libovolně malé ε, lze voliti číslo n tak, že pro $m > h$

$$\sum_m^\infty \frac{|A_k|}{|\alpha_k|} < \varepsilon\left(1 - \frac{\varrho}{|\alpha_{q+1}|}\right);$$

jest tedy též

$$\left|\sum_m^\infty \frac{A_k}{\alpha_k\,(z - \alpha_k)}\right| < \varepsilon;$$

t. j. ke každému libovolně malému ε lze přiřaditi takové m ($m > h$, $m > q$), že zbytek řady $S(z)$ pro všechna $|z| < \varrho$ stává se menší než ε. Konverguje tedy $S(z)$ v oboru C_q stejnoměrně, a jak z důkazu vysvítá, konverguje stejnoměrně i na kružnici $(o, o; \varrho)$.

Nechme nyní q vzrůstati; tak obdržíme obory $C_{q+1}, C_{q+2}, \ldots$, v nichž opět vedeme kružnice (α_{q+1}, σ), (α_{q+2}, σ); dále jest

$$\frac{|\alpha_q|}{|\alpha_{q+1}|} < \frac{\varrho}{|\alpha_{q+1}|} < 1,$$

zůstává tedy $\dfrac{\varrho}{|\alpha_{q+1}|}$ s rostoucím q pod konečnou mezí. Jest patrno, že ke každému libovolně velikému q (a tudíž i ϱ) lze přidružiti číslo h takové, že pro $m > h$ jest

$$\sum_m^\infty \frac{|A_k|}{|\alpha_k|} < \varepsilon\left(1 - \frac{\varrho}{|\alpha_{q+1}|}\right),$$

kdež ε jest libovolně malé; i možno úvahu provedenou pro konečná ϱ opakovati i pro ϱ ustavičně vzrůstající. Lze pak říci: „Vyjmeme-li okolí všech bodů $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ kružnicemi (α_1, σ), $(\alpha_2, \sigma), \ldots$

(a dle potřeby okolí bodu $[o, o]$ kružnicí $(o, o; \sigma)$, lze v oboru tak vzniklém — zovme jej C — stanoviti posloupnost kružnic o společném středu (o, o) a o poloměru ustavičně vzrůstajícím, že ve všech bodech obvodu těchto kružnic $S(z)$ konverguje stejnoměrně.“

2. Řady tohoto druhu vyskytly se nám při diskussi Laguerrova návodu určiti rod celistvé transcendenty.

Je-li dána celistvá transcendenta

$$f(z) = e^{m(z)} \cdot z^{\gamma} \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^n},$$

kdež $m(z)$ jest polynom stupně m, $|\alpha_1| < |\alpha_2| \ldots$, λ celistvé kladné číslo, snadno odvodíme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = m'(z) + \frac{\gamma}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_k^n (z - \alpha_k)}.$$

Větší z čísel m a n sluje rod; značme je ν, takže lze psáti

$$\frac{1}{z^\nu} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{m'(z)}{z^\nu} + \frac{\gamma}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{z^{\nu-n}} \cdot S_1(z),$$

kdež $S_1(z)$ patří do kategorie právě vyšetřovaných meromorfních funkcí. Především zjistěme, co znamená předpoklad, že $|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}|$ s rostoucím neklesá pod každou mez. Každou posloupnost

$$|\alpha_1|, |\alpha_2| \ldots, |\alpha_n|, \ldots \lim |\alpha_n| = \infty \text{ pro } \lim n = \infty,$$

lze znázorniti součty divergentní řady

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots \quad \lim a_n = 0 \quad \text{pro } \lim n = \infty.$$

Vyšetřme, kdy konverguje řada

$$\frac{1}{s_1^k} + \frac{1}{s_2^k} + \ldots + \frac{1}{s_n^k} + \ldots$$

$$\text{kdež } s_n = \sum_1^n \frac{1}{a_m},$$

a to pomocí pravidla Kummerova:

$$a_{n+1} \frac{\frac{1}{s_n^k}}{\frac{1}{s_{n+1}^k}} - a_{n+2} = a_{n+1} \frac{s_{n+1}^k}{s_n^k} - a_{n+2} =$$

$$= a_{n+1}\left[\left(1 - \frac{1}{a_{n+1} s_n}\right)^k - 1\right] + (a_{n+2} - a_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{s_n}\left[1 - \binom{k}{1}\frac{1}{a_{n+1} s_n} + \binom{k}{2}\frac{1}{a_{n+1}^2 s_n^2} \cdots\right] - (a_{n+2} - a_{n+1}).$$

Odtud patrno, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_n^k}$

diverguje pro všechna $k > 0$, když $(a_{n+2} - a_{n+1})$ s rostoucím n zůstává konečné; pak totiž první člen s rostoucím n konverguje k 0 a

$$\left(a_{n+1} \frac{s_{n+1}}{s_n} - a_n\right)$$

nabývá jen hodnot záporných od dostatečně velkého n. To znamená: transcendenta, o jejíž nullových místech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, platí

$$|a_n| = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots \frac{1}{a_n} + \ldots$$

a $(a_n - a_{n-1})$ zůstává konečné, jest rodu nekonečně velikého. Když by snad $(a_n - a_{n-1})$ s rostoucím n vzrůstalo nad každou mez, může býti řada $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n}$ buď konvergentní nebo snad divergentní: v prvním případě pak $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_n}$ nemohou býti nullovými místy celistvé transcendenty, v druhém případě z téhož důvodu jako prve jest to celistvá transcendenta rodu nekonečného.

Nerozhodnut zůstává případ, kdy $\lim (a_n - a_{n-1}) = 0$ — ten prozatím vylučme ze svých úvah.

Víme-li, že $\frac{1}{z^l} \frac{f'(z)}{f(z)}$ s rostoucím ustavičně z a celistvé kladné l konverguje na kruzích $(0, 0, \varrho)$ k 0, anebo že zůstává pod konečnou mezí (stačí pak uvažovati $\frac{1}{z^{l+1}} \frac{f'z}{f(z)}$), lze snadno dokázati větu Laguerrovu (Oeuvres compl. T. I. 172): „Si le rapport $\frac{f'(z)}{f(z)\, z^l}$, où l designe un nombre entier, tende vers zéro quand z croît indéfiniment, la fonction $f(z)$ est du genre l."

Důkaz vede Laguerre takto: Stanoví hodnotu integrálu

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f'z}{f(z)} \cdot \frac{dz}{z^l} \cdot \frac{1}{z-u}$$

vzatého po obvodě oboru rozprostírajícího se do nekonečna — volme si za integrační cestu obvod kružnic $(0, 0; R_n)$, $\lim R_n = \infty$.

Hodnota integrálu toho jest $2\pi i \times$ součet residuí; ta jsou

1) v bodě $z = u$

$$\frac{1}{u^l} \frac{f'(u)}{z(u)}$$

2) v bodech $z = \alpha_k \quad \frac{1}{\alpha_k{}^l} \cdot \frac{1}{\alpha_k - u}$

3) v bodě $z = 0$. Zde jest

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{c}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{z-u} = -\frac{1}{u} - \frac{z}{u^2} - \frac{z^2}{u^3} - \ldots$$

odkudž příslušné residuum

$$-\frac{c}{u^{l+1}} - \frac{c_0}{u^l} - \frac{c_1}{u^{l-1}} \ldots - \frac{c_{m-1}}{u} = -\frac{c}{u^{l+1}} - \frac{\psi(u)}{u^l},$$

kdež ψ jest polynom stupně $l - 1$. Jest tedy:

$$lim \int\limits_{K_n} \frac{l}{z^l} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{dz}{z-u} = 2\pi i \left[\frac{f'(u)}{u^l z(u)} - \frac{c}{u^{l+1}} - \frac{\psi(u)}{u^l} - \sum_k \frac{1}{\alpha_k{}^l (\alpha_k - u)} \right].$$

$K_n \equiv (0, 0; R_n)$

Poněvadž $|u| < |z|$, lze od určitého u klásti

$$\frac{1}{\left|1 - \frac{u}{z}\right|} = 1 + \eta_n, \quad lim\ \eta_n = 0.$$

Je-li R_n poloměr kružnice K_n, jest

$$\left| \int\limits_{K_n} \frac{1}{z^l} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{dz}{z-u} \right| = \left| \int\limits_{K_n} \frac{1}{z^l} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z\left(1 - \frac{u}{z}\right)} \right| = M \cdot \frac{2\pi r}{r(1+\eta_n)} = \frac{2\pi M}{1+\eta_n}$$

kdež M jest absolutní hodnota maxima funkce $\frac{1}{z^l} \frac{f'(z)}{f(z)}$ na kružnici K_n. Je-li $lim\ M = o$, máme, násobíme-li u^l

$$\frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{c}{u} - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^l}{\alpha_k{}^l (\alpha_k - a)} = 0$$

násobíme-li du, máme po několika obratech:

$$f(u) = \text{const.}\ u^c e^{\varphi_1(u)} \prod^{\infty} \left(1 - \frac{u}{\alpha_k}\right) e^{\varphi(u)},$$

kdež $\varphi_1(u)$ a $\varphi(u)$ jsou polynomy stupně nejvýše l, *c. b. d.* Nutno tedy větu Laguerrovu opraviti v ten smysl, že transcendenta jest nejvýše rodu l. Rodu l přesně bude tenkráte, podaří-li se nám ukázati, že

$$\frac{1}{z^{l-1}} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

v určitém oboru rozprostírajícím se do nekonečna (na př. uvnitř úhlu o vrcholu v počátku) s rostoucím z ustavičně stoupá.

3. Shrňme předpoklady, za nichž věta Laguerrova zůstává v platnosti:

1) $f(z)$ má nekonečně mnoho nullových míst.

2) Nemusíme předpokládati, že jsou všechna nullová místa jednoduchá: je-li nejvyšší multiplicita nullových míst ϱ, uvažujme místo řady $S_1(z)$ řadu $\varrho\, S_1^*(z)$ a úvahy o řadě $S_1^*(z)$ zůstávají v platnosti i pro řadu $S_1(z)$. Rovněž může býti

$$|\alpha_\varrho| = |\alpha_{\varrho+1}| = \ldots |\alpha_{\varrho+k}|$$

k konečné, t. j. může ležeti na kružnici libovolné konečný počet nullových míst.

Předpokládejme pouze $lim\ |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \neq 0$ pro $lim\ n = \infty$.

3) Nejzávažnější předpoklad — a ten právě Laguerre mlčky činí — jest, aby $\left|\frac{1}{z^l}\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$ s rostoucím z zkonvergovalo na kružnicích nebo jiných integračních cestách neprotínajících žádnou z kružnic (α, σ) k 0. — Podmínka poslední jest sice splněna u některých funkcí, u nichž však rod nalezen byl cestou jinou. Na př. $f(z) = \sin z$

$$\left|\frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{|\sin(x+iy)|}{|\cos(x+iy)|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{e^{-4y} - 2e^{-2y}\cos 2x + \cos^2 2x}{e^{-4y} + 2e^{-2y}\cos 2x + \cos^2 2x}$$

což pro ustavičně vzrůstající x i y (ať hodnotami kladnými nebo zápornými) konverguje k 0. Jest tedy sin z rodu nejvýše 1.

Jsou-li $f_1(x), f_2(x) \ldots f_u(x)$ polynomy v x (třebas i o komplexních koefficientech) a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zcela libovolné konstanty, dokážeme způsobem podobným, že

$$F(x) = e^{\alpha_1 x} f_1(x) + e^{\alpha_2 x} f_2(x) + \cdots + e^{\alpha_n x} fu(x)$$

jest rodu nejvýše 1, neboť $\left|\frac{1}{x}\frac{F'(x)}{F(x)}\right|$

s rostoucím x konverguje k 0 a $\left|\frac{F'(x)}{F(x)}\right|$ zůstává konstantní.

Toho druhu jsou některé transcendenty známé z rovnic vyskytujících se v theoretické fysice

$$(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x,$$

$$\cos x \cdot \mathrm{Cos}\, x \pm 1,$$

$$\sin x\ \mathrm{Cos}\, x + \cos\ \mathrm{Sin}\, x. —$$

V jiných případech bude $\frac{1}{z^l}\frac{f' z}{f(z)}$

v určitém oboru s rostoucím z konvergovat k 0, v jiném bude zastávat pod konečnou mezí. Uvažujme Weierstrassovu transcendentu

$$F(z) = 1 : \Gamma(z); \text{ jest pak}$$

$$\frac{1}{z}\frac{F'(z)}{F(z)} = -\frac{1}{z}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{\Psi'(z)}{z};$$

$\Psi'(z)$ na každé přímce svírající se zápornou osou reálnou konečný úhel chová se pro ustavičně rostoucí z jako log z. — Odhadněme ještě hodnotu $|\Psi'(z)|$ když $z = -n - \alpha + si$, n číslo celistvé, $0 < \alpha < 1$, s konečné. Pro konečná n jest

$$A_n = \left| \log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n} \right|$$

$$\leq \log n + \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z+1|} + \ldots + \frac{l}{|z+n|};$$

klademe-li $z = -n - \alpha + si$ snadno obdržíme (nejsnáze geometrickou interperetací $|-n-\alpha+si+k|$), že $A_n < \log n + n\alpha$. Klademe-li $lim\, n = \infty$, máme, že $\psi(z)$ v bodech $(-n-\alpha+si)$ $u \sim \infty$, nevzrůstá rychleji než $\log n + cn$, c konstanta.

Jest tedy na přímkách $x = -n - \alpha$, $n \sim \infty$

$$\left|\frac{\Psi(z)}{z}\right| = c$$

a tudíž

$$\left|\frac{1}{z^2}\frac{F'(z)}{F(z)}\right|$$

s rostoucím z konverguje k 0. Za integrační cesty můžeme voliti trojúhelníky omezené přímkami

$$y = Ax, \quad y = -Ax, \quad x = -n - \alpha;$$

pak lze tvrditi, že $1 : \Gamma(z)$ jest rodu nejvýše 2.

Jak patrno, předpoklad ...3), jejž Laguerre mlčky činí, velmi značně omezuje obor působnosti jeho pravidla; na druhé straně však, dokážeme-li, že

$$\left|\frac{1}{z^l}\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$$

s rostoucím z konverguje k 0, nemusíme činiti žádných předpokladů o rozdělení nullových míst.

4. Je-li funkce $f(z)$ sudá nebo lichá, lze Laguerrovu pravidlu dáti určitější znění. Je-li l sudé, jest lichou funkcí i

$$\frac{1}{z^l}\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Kružnici K_n rozdělme průměrem na dvě polokružnice K_+ a K_-. Značíme-li proměnnou na $K+$ z_1, lze ji na $K-$ označiti $-z_1$; jest potom

$$\int\limits_{K_n} \frac{1}{z_l}\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z-u} = \int\limits_{K_+} \frac{1}{z_1{}^l}\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\cdot\frac{dz_1}{z_1-u} + \int\limits_{K_+} \frac{1}{z_1{}^l}\frac{f'(-z_1)}{f(-z_1)}\cdot\frac{-dz_1}{-z_1-u} =$$

$$= 2u \int\limits_{K_+} \frac{1}{z_1{}^l}\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\cdot\frac{dz_1}{z_1\left(1-\frac{u}{z_1}\right)}.$$

Předpokládejme nyní, že $\left|\frac{1}{z^l}\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$ s rostoucím z zůstává konečné, na př. menší než c.

Oceníme-li nyní poslední integrál způsobem podobným jako dříve, máme

$$\left| 2u \int\limits_{K_n} \frac{1}{z_1{}^l}\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}\cdot\frac{dz_1}{z_1\left(1-\frac{u}{z_1}\right)}\cdot\frac{1}{z_2\left(1+\frac{u}{z_2}\right)}\right| < \frac{c\,.\,\pi R\,.\,2u}{R(1+\eta_n)\,R(1+\eta'_n)},$$

$$\lim \eta'_n = \lim \eta_n = 0$$

takže absolutní hodnota integrálu toho konverguje k 0.

I lze psáti jako dříve:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = -\frac{c}{u} - \psi(u) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^l}{\alpha_k^l(\alpha_k - u)}.$$

Poněvadž v levo jest funkce lichá, musí $\psi(u)$ obsahovati jen liché mocniny; ke každému α_k musí existovati α'_k takové, že

$$\frac{1}{\alpha_k - u} = -\frac{1}{\alpha'_k + u}, \text{ t. j. } \alpha_k = -\alpha'_k.$$

Řada v pravo konverguje absolutně; slučme členy o α_k a $-\alpha_k$. Násobíme-li du a integrujeme-li v mezích $o \ldots u$, obdržíme

$$f(u) = \text{const. } u^c\, e^{\psi_1(u)} \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{u^2}{\alpha^2{}_k}\right) e^{\varphi(u)},$$

kdež $\psi_1(u)$ a $\varphi(u)$ jsou polynomy v u^2 stupně nejvýše $\frac{l}{2}$.

Specielně pro $l = o$ máme:

„Je-li pro celistvou transcendentu $f(z)$ sudou nebo lichou pro ustavičně vzrůstající z $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < c$ c číslo konečné, jest $f(z)$ v z^2 jest rodu *0*."

Tak tomu jest při funkcích sin z, cos z; snadno to dokážeme o funkci $1 + z$. sin z, o níž to tvrdil Laguerre a dokázal teprvé Borel; rovněž o funkci

$$\sin z - z \,.\, \cos z,$$

jak dokázal též Lindelöf, (Calcul des rés. p. 41.).

5. Jako poslední applikaci Laguerrova pravidla dokážeme tuto větu: „Konvergují-li polynomy $f_1 \equiv \varphi_1 \psi_1, f_2 \equiv \varphi_2 \psi_2, \ldots f_n \equiv \varphi_n \psi_n$ s rostoucím u stejnoměrně k celistvé transcendentě a mají-li polynomy ty nullová místa vesměs uvnitř úhlu o velikosti $\pi - \varepsilon$, ε číslo konečné, jest ona transcendenta tvaru

$$\Phi \equiv e^{\alpha x} F(x),$$

kdež α jest konstanta (po případě i 0 nebo komplexní a $F(x)$ rodu 0.

Pravidlo Laguerrovo lze applikovati jen na funkce mající nekonečně mnoho nullových míst. Nechť polynomy $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_u$ konvergují stejnoměrně k celistvé transcendentě $\psi(x)$, nemající zevnějšího exponenciálního faktoru.

Pro ustavičně rostoucí (x) jest

$$\left|\frac{\psi'_1(x)}{\psi_1(x)}\right| \sim 0, \quad \left|\frac{\psi'_2(x)}{\psi_2(x)}\right| \sim 0 \ldots; \quad \left|\frac{\psi'_n(x)}{\psi_n(x)}\right| \sim 0;$$

stanovme hodnotu rozdílu

$$\left|\frac{\psi'_n(x)}{\psi_n(x)} - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right| = \left|\frac{d}{dx}\, l\, \frac{\psi_n(x)}{\psi(x)}\right| = \left|\frac{d}{dx}\, l\left(1 + \frac{\psi_n(x) - \psi(x)}{\psi(x)}\right)\right|$$

Poněvadž $\psi_n(x)$ s rostoucím n konverguje stejnoměrně k $\psi(x)$, odvodíme snadno, že i $\left|\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right|$ s rostoucím $|x|$ konverguje k 0 a jest tudíž $\psi(x)$ rodu 0. Když i polynomy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ s rostoucím n konvergují k transcendentě mající nekonečně mnoho nullových míst a nemající zevnějšího exponenciálního faktoru, je i tato rodu 0, a tudíž i transcendenta, k níž konvergují polynomy

$$\varphi_1 \psi_1, \; \varphi_2 \psi_2, \; \varphi_3 \psi_3, \ldots$$

Pomiňme bezvýznamné případy, kdyby $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \ldots$ konvergovaly ke konečnému polynomu nebo konstantě. Mohou však konvergovat k transcendentě nemajících nullových míst. Ta bude tvaru — jak známo —

$$\Phi \equiv e^{\alpha x} \,.\, e^{\beta x^2} \,.\, e^{\gamma x^3} \,. \; \ldots .$$

Funkce $e^{\beta x^2}$ jest limita

$$\left(1 + \frac{\beta x^2}{n}\right)^n; \text{ pro } \lim n = \infty$$

pro dosti velká n musily by se kořeny polynomů $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ blížiti bodům

$$\pm \sqrt{\frac{-n}{\beta}}$$

ale obě tyto hodnoty nemohou býti uvnitř úhlu velikosti $\pi - \varepsilon$, ε číslo konečné. Stejným způsobem ukážeme, že Φ nemůže obsahovati činitel $e^{\gamma x^3}$, $e^{\delta x^4} \ldots$; nanejvýš obsahuje jen $e^{\alpha x}$, *c. b. d.*

Opírajíce se o tuto větu dokážeme: Konvergují-li polynomy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ mající nullová místa uvnitř úhlu $2\pi - \varepsilon$, ε veličina konečná — k celistvé transcendentě, jest tato tvaru nejvýše

$$e^{ax^2+bx}\,F(x),$$

a, b konstanty, $F(x)$ transcendenta rodu 0 nebo 1. Polynomy $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots$ konvergujtež k transcendentě $F_1(x)$; pak polynomy $f_1(-x), f_2(-x), f_3(-x)$ konvergují k $F_1(-x)$ a $f_1(x)\,f_1(-x), f_2(x)\,.\,f_2(-x), f_3(x)\,.\,f_3(-x), \ldots$ k $F_1(x)\,.\,F_1(-x)$. Avšak $F_1(x)\,.\,F_1(-x)$ jako funkce v x^2 má nullová místa jen uvnitř úhlu $\pi - \frac{\varepsilon}{2}$, jest tedy tvaru

$$e^{mx^2}\,F^*(x),$$

kdež $F(x)$ jest v x^2 rodu 0, tedy v x buď rodu 0 nebo 1; tudíž musí býti $F_1(x)$ tvaru

$$e^{\frac{m}{2}x^2 \pm nx}\,F_1^*(x)$$

a $F_1(-x)$ tvaru

$$e^{\frac{m}{2}x^2 \pm nx}\,F_1^*(-x), \quad c.\ b.\ d.$$

Specielně máme: jsou-li nullová místa oněch polynomů na paprsku, jest transcendenta rodu 1, jsou-li na přímce, rodu 2; a odsud zase ještě užší věty Laguerrovy o transcendentách k nimž konvergují polynomy o reálných nullových místech téhož znamení, nebo různého.

6. Laguerrovo pravidlo nalezlo v literatuře málo ohlasu. Zabýval se jím Vivanti applikuje na ně Weierstrassovu „střední hodnotu"; bylo nicméně v historii celistvých transcendent — i když proti němu jest možno, jak jsme ukázali, namítati leccos — velmi významné: Laguerre jím vytušil, že vzrůst celistvé transcendenty pro ustavičně rostoucí $|z|$ souvisí s rodem dané transcendenty, jak o rok později první přesně dokázal Poincaré.

*

Sur la méthode de Laguerre pour déterminer le genre d'une fonction transcendente entière.

(Extrait de l'article précédent.)

Laguerre (Oeuvres compl. I., p. 172) indique la règle suivante: „Si le rapport $\frac{1}{z^l}\frac{f'(z)}{f(z)}$, où l désigne un nombre entier, tend vers zéro quand z croît indéfiniment, la fonction est du genre l." Je montre dans cet article que Laguerre passe sous silence une supposition importante, à savoir qu' il y a des chemins d'intégration s'étendant à l'infini sur lesquels l'expression

$$\left| \frac{1}{z^l} \frac{f'(z)}{f(z)} \right|$$

tend vers zéro dans tous les points; et même, quand cette condition est remplie, on peut montrer seulement que le genre de la transcendante est l au plus. La considération se simplifie, si la transcendante est paire ou impaire. Comme applications, sont données surtout les démonstrations des propositions qui sont plus générales que celles de Laguerre (Oeuvres compl., p. 174/7).

Superposiční pravítka nomografická.

Dr. Vilém Havlík.

V článku „Nomogramy transparentální“*) ukázal jsem nejdůležitější výsledky aplikace principu superposice rovin v nomografii. Viděli jsme též, že rovnici Keplerovu bylo možno řešiti pomocí početního pravítka superposičního. — Všimněme si blíže početních pravítek toho druhu.

Superposičním pravítkem o jednom transparentě budeme nazývati takové početní pravítko, nad jehož posouvátkem na dražce jest napiat průhledný papír — transparent — a na jehož posouvátku i transparentě jsou systémy nomografických elementů (bodů a čar), jichž vzájemným přiřazováním jednak uvedeme posouvátko v určitou polohu k transparentu a jednak řešíme rovnici, pro jejíž typ jest pravítko sestrojeno. — Jest na snadě, že po degeneraci některých systémů v transparentu neb na posouvátku můžeme superposičnímu pravítku dáti tvar pravítka iuxtaposičního, obvykle jen početním pravítkem zvaného (logaritmické pravítko a pod.).

Označme si rovinu posouvátka R_1 (se souřadnou soustavou x, y) a rovinu tramsparentu R_2 (se soustavou x', y') a vezměme směr osy $Y \equiv Y'$ za směr posouvání; můžeme pak psáti:

$$x = x'$$
$$y = y' + d$$

Snadno pak odvodíme vzorné rovnice základních typů superposičních pravítek. Na příklad:

A) Na ose Y budiž stupnice hodnot

$$y = F_1(\alpha)$$

a na ose Y' stupnice hodnot

$$y' = F_2(\beta);$$

*) V Časopise pro pěst. mat. a fys., roč. LI. str. 266.