Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Procházka

Oskulační hyperbolický paraboloid dle vrcholové přímky Frézierova cylindroidu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 52 (1923), No. 1-2, 133--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123275

de $n-1$ ne sert qu'à leur contrôle, je déduis de cet accord relativement bon un fort appui pour la validité du grand nombre trouvé par moi pour β, avec toutes ses conséquences. Cette conclusion est d'autant plus raisonnée que l'incertitude dans ma valeur de $n-1$ provient, pour la plupart, de la calibration de mon manomètre spécial, tandis que la valeur de β en est tout à fait indépendante.

§ 3. L'article de M. C. Chéneveau,[4]) apporte à la validité de mes résultats un appui beaucoup plus directe et plus intéressant. J'ai cherché à faire comprendre la grande valeur de β et ses conséquences par des idées sur la structure électronique de la matière. L'analogie étroite qui existe entre l'état gazeux et la solution diluée de la matière m'a fait remarquer le parallélisme de la marche du pouvoir fluorescent des corps dissous et de la réfraction spécifique des gaz. En admettant une relation plus intime de ces deux phénomènes j'étais amené à supposer que la variation de la réfraction spécifique, prouvée par moi pour les gaz, doit se retrouver dans le cas des solutions diluées. M. Chéneveau guidé par la même idée à montré qu'on trouve, en réalité, dans le cas des solutions les mêmes courbes que j'ai données pour les gaz. (Voir fig. 1. et 2.). Mais il a obtenu une troisième courbe de marche contraire: la réfraction spécifique y baisse avec la pression. M. Ch. prévoit le même résultat, dans le domaine des gaz, pour l'hydrogène. Les mesures qui ont été effectuées, avec mes appareils, par MM. Šafránek et Schacherl sur l'oxygène et l'hydrogène et qui féront, de ma part, l'objet d'un article spécial, confirment cette prévision de M. Chéneveau.

Oskulační hyperbolický paraboloid dle vrcholové přímky Frézierova cylindroidu.

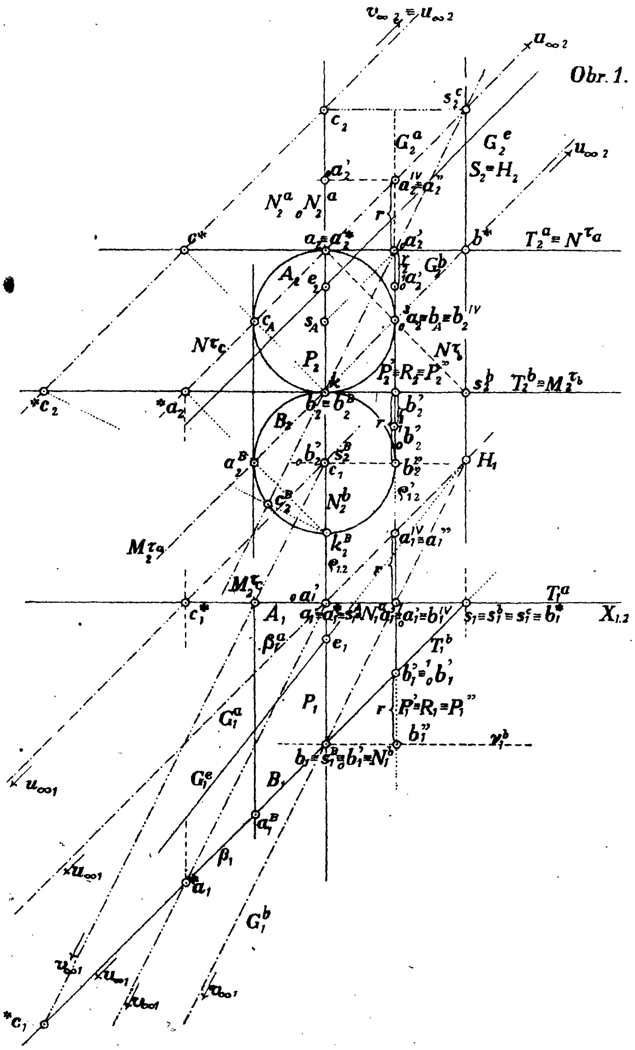
Napsal prof. *Bedřich Procházka.*

Cylindroid Frézierův budiž určen kružnicí A, ležící v nárysně, a ellipsou B, nalézající se v rovině svislé β, svírající s nárysnou úhel 45° a promítající se do této průmětny v kružnici $B_2 \cong A$ (viz obraz 1.), jejíž střed s_2^B leží se středem s_A ve přímce svislé. Rovina řídící ϱ této sborcené plochy bude tudíž kolmá k ose X, a její přímka povrchová P, procházející nejvyššími body a, b obou křivek řídících, již budeme zváti v r c h o l o v o u, bude — ježto vzdálenost průmětů s_1^A, s_1^B, jakož i bodů s_A s_2^B učiněna zde rovnou 2-násobnému poloměru kružnice A, — s oběma průmětnami svírati úhel 45°.

1. Abychom sestrojili h l a v n í t e č n u G_a cylindroidu v bodě a, sestrojíme*) v bodech a, b kuželoseček A, B tečny T_a, T_b. Před-

*) Bedřich P r o c h á z k a: „*Příspěvek ke strojení oskulačních hyperboloidů ku plochám sborceným*"; uveřejněno v „Rozpravách České Akademie", třída II., ročník VI., čís. 15., na str. 23.

pokládajíce, že se přímka F nekonečně málo pošine po kružnici A a tečně T_b, zůstávajíc rovnoběžna s rovinou řídící $\varrho \perp x$, zvolme rychlost $\overline{aa'}$ bodu a v tečně T_a, na př. rovnou poloměru r kružnice



Obr. 1.

A a stanovme rychlost $\overline{bb'}$ bodu b v tečně T_b, jakožto úsečku, kterou rovina ϱ_b procházející bodem a' a rovnoběžná s rovinou ϱ, na ní odetíná. Hyperbolický paraboloid, určený kinematicky kružnicí,

A a tečnou T_b při rychlostech $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ bodů a, b v tečnách T_a, T_b, dotýká se cylindroidu dle přímky P a oskuluje v bodě a: má tudíž s ním v tomto bodě stejnou křivost a jeho povrchová přímka druhé soustavy jest druhou hlavní tečnou G_a cylindroidu v bodě a.*)

Abychom tuto přímku G_a dotyčného paraboloidu stanovili, použijeme následní kinematické konstrukce.**) Ze zvolené rychlosti $\overline{aa'}$ stanovíme rychlost $\overline{a'{}_0{}^1a'}$, s kterou se bod a' pohybuje při otáčení tečny T_a kol bodu a jakožto polovinu úsečky $\overline{a_0{}^2a'} \perp T_a = r$, omezené kolmicí $\overline{a^2{}_0a'}$ spuštěnou s bodu a ku spojnici $\overline{s_A a'}$.***) Mimo to mezným bodem b' sestrojené rychlosti $\overline{bb'}$ vedeme rovinu σ, rovnoběžnou s rovinou tečnou $\tau_a \equiv (T_a P)$, v bodě a se cylindroidu dotýkající, a stanovíme její průsečík b' s přímkou $\overline{b_0 b'}$, rovnoběžnou s normálou N_a, sestrojenou v bodě a kružnice A.†) Za tím účelem sestrojíme (viz obr. 2.) průsečík b'' přímky $R \equiv \overline{b'b''}$, rovnoběžné s přímkou P a bod b' obsahující s rovinou ν_b, procházející bodem b a rovnoběžnou s rovinou nárysnou. Ježto přímka R — dle dřívější volby přímky vrcholové P — s oběma průmětnami úhel 45° svírá, obdržíme průmět b''_2, přeneseme-li úsečku $\overline{b'_1b''_1} = r\,(b''_1 \equiv (R_1\,\nu_1{}^b))$ v příslušném směru od bodu b'_2 na průmět R_2 tak, aby též úsečka $\overline{b'_2b''_2} = r$ (viz znázorňující obraz 2.). Potom přímka $\overline{b''{}_0b'} \parallel T_a$ protíná přímku $\overline{b_0b'} \parallel N_a$ v žádaném bodě $_0b'$ ($_0b'_1 \equiv b_1$, $_0b'_2 \equiv s_2{}^B$). Bodem $_0{}^1a'$ vedená rovnoběžka $\overline{_0{}^1a'\,a^{IV}}$ s přímkou $\overline{a_0b'}$ protíná přímku P', bodem a' procházející a rovnoběžnou s poučkou P, v bodě a^{IV}, určujícím s bodem a hledanou hlavní tečnu G_a cylindroidu v bodě a.

Ježto úsečka $\overline{a'{}_0{}^1a'}$ je rovna polovině úsečky $\overline{b_0b'}$, je úsečka $\overline{a'a^{VI}}$, vzhledem ku podobnosti vzniknuvších trojúhelníků $ab\,{}_0b'$, $a^N a'{}_0{}^1a'$, rovna $\frac{1}{2}\,\overline{ab}$ a tudíž $\overline{a'_1\,a_1{}^{IV}} = \overline{a'_2\,a_2{}^{IV}} = \frac{1}{2}\,\overline{a_1b_1} = \frac{1}{2}\,\overline{a_2b_2} = r$, z čehož plyne, že průměty $G^a{}_1$, $G^a{}_2$ jsou spolu rovnoběžny svírajíce s $X_{1\cdot2}$ úhel 45°.

1'. Že konstrukce tato je správná, zřejmo z toho, že i jiné konstrukce hlavní tečny G_a dospívají k témuž výsledku. Provedeme nejjednodušší z nich, totiž konstrukci Rohn-Papperitzovu.††) Užívajíce

*) Tamtéž odstavec 7., na str. 16.

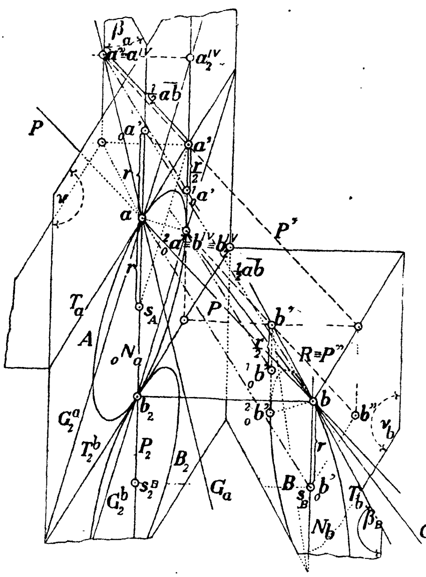
**) Bedřich Procházka: „*Vybrané statě z deskriptivní geometrie*"; nákladem České Matice technické, Praha 1918, svazek VI., odst. 335, případ IIIb, na str. 146.

***) Tamtéž, odstavec 335., případ Ia, na str. 125.

†) Tamtéž, odstavec 335, případ IIIb, na str. 146.

††) Dr. Karl Rohn a Dr. Ervín Papperitz: „*Lehrbuch der darstellenden Geometrie*", 3. vyd., III. svazek, na str. 217.

této přihlížíme k tomu, že svazek rovin tečných $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \ldots$ o ose P je projektivný s řadou bodů dotyčných $a, b, c, \ldots$ na přímce P*) a tudíž také k řadě bodů $a, b_A, c_A, \ldots$, v nichž protíná svazek nárysných stop $N_{\tau a}, N_{\tau b}, N_{\tau c}, \ldots$ onoho svazku rovin tečných kružnici A. V každé z rovin tohoto svazku, na př. τ_d, dotýkající se plochy v bodě d přímky P (v obraze není vyznačen) a protínající kružnici A v bodě d_A, ležící spojnice $\overline{dd_A}$, dotýká se plochy sborcené v bodě prvém a protíná kružnici A v bodě druhém. Otáčí-li se tato rovina τ_d kolem přímky P, až dospěje do roviny tečné τ_a, splynou současně body d a d_A s bodem a a přímka $\overline{dd_A}$ v této poloze se stane tudíž hlavní



Obr. 2.

tečnou G_a cylindroidu. Promítneme-li však řadu bodů $a, b_A, c_A \ldots$ na kružnici A ležící, v nichž svazek stop $N_{\tau a}, N_{\tau b}, N_{\tau c}, \ldots$ tuto křivku protíná, s libovolného bodu jejího na tečnu T_a (v obraze s bodu k diametrálného k bodu a) vznikne na této řada $a, {}^*b, {}^*c, {}^* \ldots$ která

*) Bod c zvolen tak, aby $\overline{ac} = -\overline{ab}$ a pomocí hyperbolického paraboloidu dotýkajícího se cylindroidu dle přímky P a určeného tečnami T_a, T_b a řídicí rovinou $\varrho \perp X$ stanovena stopa N_{τ_c} roviny tečné τ_c následovně: Mezi přímkami 2. soustavy tohoto paraboloidu bude též přímka $S \perp \pi$, jejíž průmět $S_1 \equiv (T_1{}^a T_1{}^b)$. Přímku soustavy prvé $\overline{cs_c}$ bodem c procházející, ježto řídicí rovinou první jest průmětna π, jest rovnoběžná s touto rovinou (tudíž $\overline{c_2 s_2{}^c} \parallel X_{12}$) a protíná přímka S v bodě s_c. Spojnice $\overline{as_c}$ jest stopou $N_{\tau c}$ roviny tečné τ_c a svírá s P_2 úhel 45°. Mimo to jest $N_{\tau a} \equiv T_a$ a $N_{\tau b} \equiv \overline{as_b}$, kde s_b je nárysnou stopou tečny T_b.

je též projektivnou s řadou $a, b, c, \dots$ na přímce P. Ježto však bodu a příslušný bod a^* se s ním ztotožňuje, jsou tyto řady zároveň perspektivnými a spojnice $\overline{bb,^*}\ \overline{cc,^*} \dots$ homologických bodů těchto řad protínají se tudíž v témže bodu u — středu perspektivném, — i hlavní tečna G_a bude procházeti.

Ježto jsou tyto spojnice $\overline{bb,^*}\ \overline{cc,^*}$ — jak z konstrukce vyplývají (viz obraz), — spolu rovnoběžny, a tudíž jejich průsečík bodem úběžným $u\infty$, jest přímka G_a s těmito spojnicemi rovnoběžna. Zároveň zřejmo z obrazu, že průměty touto konstrukcí $G_1{}^a$, $G_2{}^a$ docílené jsou též spolu rovnoběžny a svírají s $X_{1.2}$ úhel 45, jak bylo dříve konstrukcí kinematickou odvozeno.

2. Abychom stanovili hlavní tečnu G_b, příslušnou bodu b vrcholové površky F uvažovaného cylindroidu geometrií kinematickou, zvolíme opět jistou rychlost $\overline{bb'}$ bodu b v tečně T_b (viz obraz 1) třeba onu z konstrukce předchozí vyplývající, a stanovíme stejným způsobem příslušnou rychlost $\overline{aa'}$ bodu a v tečně T_a, rovněž s dřívější rychlostí $\overline{aa'}$ se shodující (odstavec 1.). Potom sestrojíme na základě středu křivosti ellipsy B v jejím vrcholu b rychlost $\overline{b'_0{}^1b'}$ bodu b' při otáčení tečny T_b kol bodu b touže konstrukcí jako rychlost $\overline{a'_0{}^1a'}$ bodu a' tečny T_a v odstavci 1. Shledáme, že rychlost tato $\overline{b^1b'}$ vzhledem k tomu, že poloosa hlavní ellipsy B obnáší $r\sqrt{2}$, rovna $\frac{r}{2}$.

Abychom stanovili příslušnou rychlost $\overline{a_0a'}$ bodu a v normále N_a rovnoběžné s normálou N_b ellipsy B a totožné s normálou N_a kružnice A, sestrojíme bodem a' rovinu φ rovnoběžnou s rovinou tečnou $\tau_b \equiv (PT_b)$, kteráž normálu ${}_0N_a$ v bodě ${}_0a'$ protíná (viz obr 2.). Za tím účelem sestrojená rovina $\beta_a \parallel \beta_B$ protíná rovinu φ v přímce $\overline{a''_0a'}$, procházející průsečíkem a'' přímky $P' \equiv \overline{a'a''} \parallel P$ $(\overline{a_2'a_2''} = \overline{a_1'a_1''} = r)$ (obr. 1.) s rovinou β_a a rovnoběžně s tečnou T_b $(\overline{a_2''a_2'} \parallel T_{2b})$.

Potom přímka $\overline{o^1b'b^{IV}} \parallel \overline{b_0a'}$*) protíná přímku $F_r'' \equiv R$ procházející bodem b a rovnoběžnou s površkou F, v bodě b^{IV} $(\overline{b'b^{IV}} = \frac{1}{2}\overline{ab}$ a tudíž $\overline{b'_1b_1{}^{IV}} = \overline{b'_2b_2{}^{IV}} = \frac{1}{2}\overline{a_1b_1} = r)$. Přímka $\overline{bb^{IV}}$ jest potom hlavní tečnou G_b cylindroidu v bodě b.

2'. Sestrojujíce tuto přímku G_b konstrukcí Rohn-Papperitzovou, přihlížíme opět ku svazku rovin tečných $\tau_a, \tau_b, \tau_c \dots$ o ose P a ku svazku jejich stop $M_{\tau a}, M_{\tau b}, M_{\tau c}, \dots$ v rovině β_B (viz obr. 1.). Průsečíky

*) Z obrazu 2. zřejmo, že spojnice $\overline{b_0a'}$ je rovnoběžna se spojnicí $\overline{a_0b'}$, tudíž též $\overline{{}_0{}^1b'b^{IV}} \parallel \overline{{}_0{}^1a'a'^{IV}}$ a vzhledem k tomu, že $\triangle\, b'_0b'b^{IV} \cong \triangle\, a'_0{}^1a'a^{IV}$ také $\overline{b'b^{IV}} = \overline{a'a^{IV}}$.

$a_B, b, c_B, \ldots$ těchto stop s ellipsou B promítneme s bodu k_B, diametrálného k bodu b této ellipsy, na tečnu T_b do bodů $*a, *b, *c, \ldots$ Spojnice těchto bodů s homologickými body $a, b, c, \ldots$ projektivné řady P se protínají, jsouce rovnoběžny v bodě v_∞, který s bodem b určuje hlavní tečnu G_b, totožnou s onou prvou konstrukcí docílenou.

3. Z konstrukce obou hlavních tečen G_a a G_b je zřejmo, že průmět $G^b{}_2$ je rovnoběžný s průmětem $G^a{}_2$ a tudíž lze nárysně promítající rovinu některé z těchto přímek pokládati za řídící rovinu přímek jedné soustavy oskulačního hyperbolického paraboloidu. Ježto rovina $\varrho \perp X$ jest řídící rovinou přímek druhé soustavy této plochy, jest průsečík přímek $G^a{}_1$, a $G^b{}_1$ průmětem půdorysným jedné z těchto přímek $H \perp \pi$. Vzhledem k tomu budou půdorysné průměty všech hlavních tečen sestrojených v bodech vrcholové přímky P-cylindroidu procházeti bodem H_1 ($\overline{a_1H_1} = b_1a'_1$) a nárysné průměty jejich budou rovnoběžny s nárysným průmětem $G^a{}_2$ svírajíce s $X_{1 \cdot 2}$ úhel 45°.

*

Le paraboloïde hyperbolique osculateur du cylindroïde de Frézier.

(Extrait de l'article précédent.)

Du problème qui demande de construire l'hyperboloïde osculateur d'une surface gauche, des géomètres éminents se sont occupés: Éd. Weyr, J Šolín, J. Sobotka,*) A Mannheim et K. Rohn, qui ont résolu ce problème à fond. La construction donnée dans cet article, et appliquée au cylindroïde de Frézier, repose sur les principes de la géométrie cinématique (exposés au VI tome de l'oeuvre de l'auteur: „Vybrané stati z deskriptivní geometrie" p. 224) et résout le problème d'une manière simple, qui s'accorde, d'ailleurs, au point de vue graphique, parfaitement avec la construction de Rohn**) reposant sur les principes de la géométrie projective.

O úhlu dvou rovin v prostoru čtyrrozměrném.

Napsal Dr. *Lad. Seifert* v Brně.

Nazývejme, jak je zvykem, lineární prostor trojrozměrný obsažený ve prostoru čtyrrozměrném prostě **prostorem**, lineární prostor dvourozměrný **rovinou**. Body společné dvěma prostorům

*) J. Sobotka: „Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide windschiefer Flächen" (Rapports de la société royale tchèque des sciences, 1893). „Zur Konstruktion von Oskulationshyperboloiden an windschiefen Flächen" (l. c. 1903). „Zur Konstruktion der Oskulationshyperboloide von Regelflächen" (l. c. 1907).

**) Rohn-Papperitz: „Lehrbuch der darstellenden Geometrie", t. III., p. 227.