Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 89--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123279

Úloha 18.

Dvě shodné paraboly parametru p mají společný vrchol; osy jich tvoří úhel α. V kterém úhlu protínají se obě křivky a jakou plochu omezují? Prof. *A. Strnad.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Zpráva c. k. českého realného a vyššího gymnasia v Kolíně za školní rok 1888 přináší dva kratší články, které napsal *Václav Tlučhoř.*

a) Linearní sestrojení polu a poláry kuželosečky určené linearními podmínkami. (3 strany.)

Dané podmínky lze vždy tak upraviti, že jest kuželosečka určena dvěma tečnami s příslušnými body dotyčnými a k tomu ještě buď bodem neb tečnou. Pan spisovatel ukazuje, kterak můžeme za těchto podmínek sestrojiti k danému polu poláru aneb naopak, a sice užitím věty: Poláry libovolného bodu vzhledem k osnově kuželoseček dvojnásob se dotýkajících protínají se v jednom bodě dotyčné tětivy. Sestrojení tohoto užito pak v několika zvláštních případech, kdy kuželosečka dána jest na př. polohou i délkou dvou sdružených průměrů aneb oběma asymptotami a bodem a pod. Všechny tyto snadné úlohy rozřešeny zcela případně konstrukcemi jednoduchými; složitější a obsažnější úvahy nalézáme v článku druhém.

b) O rovinné křivce 6ho řádu se 4mi dvojnými body a její degeneraci při problemu nadoskulačních kuželoseček. (5 stran.)

Zde nejprve ukázáno, že svazek kuželoseček a prométná s ním involuce tečen libovolné kuželosečky vytvořují křivku 6ho stupně se 4mi body dvojnými ve vrcholech svazku. Dán-li svazek kružnic a zvláštní s ním projektivná involuce tečen paraboly, rozpadne se ona křivka 6ho stupně v osamělý dvojný bod v úběžnou přímku a v cirkulárnou křivku 3ho stupně. Případ tento se vyskytne, hledáme-li geometrické místo pro ohniska nadoskulačních kuželoseček v společném bodě dotyčném; zmíněná křivka 3ho stupně jest tu Queteletova fokála, která má ve společném bodě kuželoseček bod dvojný. Mimo to ukázáno, že osy těchto kuželoseček obalují určitou parabolu, jejíž řídicí přímka jest zároveň geom. místem jich středů.

Naznačivše takto zcela stručně obsah pěkného tohoto článku, dovolíme si připojiti dvé malých poznámek. Zdá se nám, že lépe jest na místě jmena řád křivky užívati po příkladě předních našich geometrů (viz na příklad Cremona - Weyr) názvu, stupeň (Ordnung) a jmeno řád ponechati k označení pojmu který u křivek prostorových německým termínem Rang se vystihuje. Queteleta nenazvali bychom francouzským mathematikem; byltě rodem i veškerým působením svým Belgičanem.

Na konec podotýkáme, že oba články, pečlivě zpracované methodou synthetickou, vhodným jsou příspěvkem ku theorii kuželoseček.

Prof. *A. Strnad.*

B. Recense knih.

Základové počtářství národohospodářského čili juridicko-politické arithmetiky. Sepsal a příslušnými tabulkami opatřil *Dr. F. J. Studnička.* Část I. 1887.; část II. 1888. Spisů musejních číslo CLIX. v Praze. V kommissi u Fr. Řivnáče.

Dílo to věnované *JUDr. Fr. L. Riegrovi*, jakožto nejstaršímu českému spisovateli národohospodářskému, vydáno nákladem *Matice České* a má za účel, jak pan autor sám podotýká v předmluvě, vyplniti citelnou mezeru v naší literatuře mathematické, jsouc prvním českým spisem o počtářství národohospodářském.

Vzhledem k tomu, že spis ten má jednak hověti nárokům theorie, pokud jest obvyklou na obchodních akademiích a v bankovních pracovnách atd., na druhé straně však, což důležitější, praxi samé, byl veden pan autor snahou, vyložiti jasně podstatu každého úkolu, odvoditi jednoduše vzorce jej řešící a objasniti jej pečlivě volenými příklady, čímž poskytnuta možnosť i těm, kteří nedovedou odvození vždy sledovati, použiti nabytých vzorečků takřka jako nějakých receptů.

Spis sám rozdělen na čtyři knihy, z nichž první jedná o některých počtech mnohočlenných, druhá o počtech na jednoduchém výnosu procentním založených, třetí o počtech spořitelních a čtvrtá o počtech bankovních. K praktickým výpočtům slouží dvanáct částečně původních tabulek.

První kniha obsahuje v § 1. počet řetězový a příslušné příklady. Dále v § 2. počet průměrný a sice jednoduchý i složitý. V poznámce určen též průměr nekonečně mnoha nekonečně malých veličin a zmíněno použití křivek autografy opsaných. V § 3. následuje vývoj a příklady počtu spolkového, jednoduchého i složitého a konečně v § 4. obšírný výklad počtu allegačního, při kterémž rozlišovány případy, že směšujeme dvě, tři, čtyři a konečně libovolný počet látek. Neurčitost řešení omezena předpokládáními běžnými v praxi.

V knize druhé jest nám zabývati se jednoduchým počtem procentovým. Po výměrech základních veličin následují známé základní vzorečky pro úroky ze sta, na sto a ve stu. V § 6. o jednoduchém úročení jednajícím, uvedeny rozličné obvyklé lhůty roční a vzorečky k vypočítání úroků pro lhůty ty. Při té příležitosti poukázáno k tabulce I. obsahující jednoduché úroky ze 100 zl., 1000 zl. a 5000 zl. pro jednotlivé měsíce a dny. Použití tabulky objasněno, jako vůbec v celém spise, určitými příklady.

Dále následují vzorečky k vypočtení jistiny, procent a času s příklady, při nichž částečně užito vlašské praktiky. V poznámce uvedeny vzorce pro srážku (rabatt, diskont atd.) a sice přesný Hoffmanův a méně správný Carpzova. Následující § 7. jedná o úročení složitém. Vzorečky pro konečnou jistinu vyvinuty pro období celoroční, půlletní, čtvrtletní, měsíční a konečně pro libovolný počet ročních lhůt. Příslušní úročitelé výstupní t. j. čísla, jimiž musíme násobit původní jistinu, abychom obdrželi konečnou, tvoří tabulku II. Příklady provedeny i logarithmicky i pomocí tabulky II., při čemž též vyšetřeno v poznámce první, v kterém případě jest rozdíl výsledků největší. V druhé poznámce zodpověděna otázka, ve kterém čase se nějaká jistina při složitém úrokování zdvojnásobí a obecně *n* krát zvětší, a jaký vliv zde má lhůta úroční. V poznámce třetí objasněno úročení, při němž se platí úroky předlhůtně a pomocí tabulky II. převedeno dle Spitzera úročení takové na dřívější polhůtní.

§ 8. zabývá se úlohou opačnou, vypočítati nynější hodnotu jistiny později splatné; úlohu řešící úročitelé sestupní t. j. čísla, jimiž musíme násobiti konečnou jistinu, abychom obdrželi původní, tvoří tabulku III. V § 9. jest obsažen výpočet procenta, času a počtu ročních lhůt při složitém úročení. Při poslední úloze lze lehce přejíti k případu nekonečně malých lhůt, čímž obdržíme nepřímo základní rovnici pro nepřetržité úročení. Vzorec ten vyvinut v § 10. ještě přímou cestou dvěma způsoby a pro praktické výpočty přidána tabulka IV., jež obsahuje mocniny základu přirozených logarithmů. Spisovatel hájí vřele úročení nepřetržité co jedině oprávněné, porovnává výsledky rozličného spůsobu úročení graficky, podává dále vzorečky pro výpočet všech základních veličin při nepřetržitém úročení a neopomíjí srovnati výsledky s úročením obyčejným.

V odstavci 11. stanovena lhůta, ve které se mají zaplatiti úhrnně rozličné v různých lhůtách splatné obnosy — tedy t. zv. průměrná lhůta, při čemž šetřeno rozdílu, úrokujeli se jednoduše neb složitě. V prvním případě podána dvě řešení, jež souvisí se vzorci Hoffmanna a Carpzova, z nichž první, přesnější, obsahuje druhý jako zvláštní případ. Při úročení složitém zase vytčen zvlášť případ úročení nepřetržitého, nabyté vzorce specialisovány pro případ stejných lhůt a splátek a konečně zjednána přibližná řešení proměnou jistých veličin v konvergentní řady. Z diskusse vzorců a provedených příkladů patrno, jak závisí průměrná lhůta na způsobu úročení.

Kniha třetí jedná o počtech spořitelních a sice v § 12. především o střádání peněz kapitalisováním úroků pravidelných, stejných vkladů spořitelních, při čemž rozlišovány tři případy. První jest onen, že lhůty, ve kterých se děje ukládání, rovnají se lhůtám, ve kterých se děje kapitalisování úroků, při čemž zvlášť vytčen ještě onen případ, že se dva různé vklady střídají; druhý a třetí případ nastane, jest-li tyto lhůty jsou větší, potažmo menší než lhůty ukládání, v posledním případě vzat zase zřetel k úročení nepřetržitému. Střádatelé t. j. čísla, jimiž musíme násobit jednotlivý vklad, abychom obdrželi výnos vkladů, tvoří tabulku V. Z příkladů provedených budiž vytčen, mnoholi by ušetřil professor ukládáním kvinkvenálek.

§ 13. jedná o střádání peněz kapitalisováním úroků pravidelných, nestejných vkladů, jež se buď stejnoměrně zvětšují neb zmenšují. Případ druhý souvisí těsně s prvým. Příslušní složití střádatelé t. j. čísla, jimiž musíme násobit první vklad, abychom obdrželi výnos všech vkladů, tvoří tabulka VI.

§ 14. obsahuje výpočet velikosti vkladů a procent z daného výnosu konečného jakož i počtu n vkladních lhůt; předposlední úkol řeší zvláštní rovnice $n+1$ stupně, jejíž vlastnosti diskutovány, jmenovitě, že má vždy jeden reálný, positivní od jedničky rozdílný kořen, jenž řeší úlohu, což jest ještě pro jednodušší případy znázorněno graficky. Na to přikročeno k přibližnému řešení rovnice dvěma způsoby, z nichž poslední jest použitím tabulky V. velice jednoduchý. Konečně řešena táž úloha pro nepřetržité úročení a výsledky zase srovnány.

V knize poslední vyloženy základy počtů bankovních.

§ 15. jedná o počtu úmorním čili amortisačním a důchodním čili rentovém. Předeslav výklad o podstatě umořování dluhu a obvyklostí sem spadajících, vyjadřuje p. spisovatel rovnicemi základní vlastnosti úmoru; stanoví výrazy pro úrok i úmor na konci libovolné lhůty, velikost annuity, jíž se má daný obnos v určitém čase umořiti; vyvinuje výraz pro zásobitele t. j. číslo, jímž musíme annuitu, jinak rentu násobit, abychom obdrželi původní dluh, jinak kapitál.

Tabulka VII. udává hodnoty zásobitelů. Dřívějšího vzorce pro výpočet annuity použito v jiném tvaru, při čemž intervenuje zvrácená hodnota zásobitele, mořitel t. j. číslo, jímž musíme násobit původní obnos, abychom obdrželi annuitu. Hodnoty mořitele sestaveny v tabulce VIII. Mimo to uveden výraz pro zbývající obnos na konci libovolné platební lhůty.

Když byly objasněny tytéž problémy pro případ, že se annuity mají skládati na počátku jednotlivých lhůt, řešena další úloha, vypočítati počet lhůt a konečně procento, jímž se původní obnos umořuje a sice zase pomocí vyšší algebraické rovnice, jež jest podobna výše uvedené.

V poznámce připomenut zvláštní případ, že původní dluh obnáší 100 zl., čímž se mnohé z předcházejících vzorců valně zjednoduší; jmenovitě odvozen důležitý výraz pro první úmor, jehož hodnoty tvoří tabulku IX. Z téhož vzorce vyjádřen čas, v němž lze určitou annuitou umořiti dluh 100 zl., a pro výraz ten sestavena tabulka X. Konečně přidány textu dva plány, dle nichž se umořují půjčky u české banky hypoteční.

§ 16. zabývá se kursovní hodnotou dlužních úpisů. Po udání obvyklostí, jež se týkají velikosti procent a annuit, následují výměry nominální, effektivní a kursovní hodnoty půjčky. Pro poslední stanoven všeobecný vzorec a jeho zjednodušení pro případ stejných annuit, a konečně vyvinut vztah pro kursy ekvivalentní čili paritu.

§ 17. jedná o slosování akcií a dlužních úpisů vůbec. Jest zde zmínka o způsobu, jakým se může mořiti dluh slosováním akcií a sice jednoduchým neb složitým dle toho, jsouli annuity stejny neb nestejny. Pro první případ provedeny nutné výpočty všeobecně a přidány jakožto příklady dva slosovací plány, z nichž poslední, Spitzerův, podává obraz, kterak se umořoval dluh akciového podniku dráhy arcivévody Karla Ludvíka v Haliči.

O druhém případě pojednáno v § 18., jenž se zabývá slosováním dlužních úpisů za zvláštních podmínek, k nimž mezi jiným náleží, že splátka na úpis připadající obsahuje mimo původní hodnotu též jednoduchý úrok, dále že se vylosované úpisy vyznamenávají premiemi, aneb že na ně co vnadidlo připadne malá neb velká výhra a konečně, že v prvních letech se umořuje malý počet akcií, a teprve v pozdějších letech se zvětšuje úmorová část. K praktickému řešení úloh sem spadajících přidány tabulky XI. a XII. Když byly dotyčné výpočty obecně provedeny, objasněny jsou — jak důsledně v celém spise — velice zajímavými příklady a sice: státní půjčka bez premie i s premií, slosovací plány velké půjčky vídeňské kommuny a společnosti koňských drah tamže.

Z předcházející úvahy patrno, že spis vyniká bohatostí látky pečlivě sestavené a nárokům praktika i theoretika velkou měrou vyhovující.

Jako předcházející spisy páně autorovy vyznamenává se i tento jasnou, přesnou, úsečnou mluvou, jednoduchostí a průzračností mathematikých vývojů, bohatostí a účelností příkladův.

Prof. *Miloslav Pelíšek.*

Elemente der mathematischen Krystallographie in neuer leichtfasslicher Darstellung. Nach den Vorträgen von Dr. *Johann Krejčí,* Professor an der k. k. böhm. Karl-Ferdinand'schen Universität in Prag, herausgegeben von Friedrich Katzer. Leipzig. In Com. bei Wilh. Opetz. 1887. Cena 5 marek.

S obzvláštním potěšením vyhovuje podepsaný vyzvání vážené redakce tohoto časopisu, aby o díle svrchu uvedeném krátce pohovořil, protože jest mu tím poskytnuta příležitost na místě kompetentním odkázati ku přednostem spisu, při jehož uspořádání k tisku příliš nepatrnou měl účasť, než aby si za obsah jeho směl osobovati vůbec jaké zodpovědnosti sám. Nezapomenutelný prof. Krejčí až do poslední chvíle takřka věnoval postupu díla všechnu pozornost a nejednou vyhledávání nových method mathematických a opětované přepracování jednotlivých statí označil za nejmilejší svou zábavu a zotavení. Vydání spisu na veřejnosť krutá smrt však nedala mu dočkati se.

Dílo zabírající 215 stran největší osmerky a sprovozené osmi tabulemi se 302 vyobrazeními, rozvrženo jest na tři hlavní oddíly. První podává všeobecný přehled tvarů krystallových; druhý jedná o povšechných rovnicích krystallografických a třetí obsahuje podrobný výpis jednotlivých soustav. Rozumí se, že tento oddíl poslední s velikým objemem shrnuté v něm látky naplňuje stran nejvíce; ale jádro a váha díla, najmě se stanoviska mathematického, spočívá v oddíle druhém. Neboť věty a rovnice tu povšechně vyvozené doznávají při jednotlivých soustavách pouze zvláštního upotřebení nebo bližšího vymezení.

Jest v něm vyvozena především rovnice *plochy krystallové*, vzorec pro *délku normaly,* rovnice *průsečnice dvou rovin*, rovnice *pásmová,* totiž rovnice pro několik ploch se souběžnými hranami; dále následuje rovnice *hrany,* t. j. úhlu sevřeného dvěma plochami krystallu, pak rovnice *hran v pásmu,* jichžto obou vyvození jest obtížno a k jasnému pochopení větších mathematických vědomostí vyžaduje nežli Krejčí předpokládá. Zavedení determinantů tu má jen vliv na zjednodušení výsledků. Konečná stať věnována jest rovnici *srostlicové,* které Krejčí sám připisuje veliký význam. Úkolem rovnice té jest dle něho: vyznačiti vztahy všech ploch srostlice k témuž základnímu šestistěnu (jenž vůbec pokládá se za prvotvar). Rovina srůstu, oběma individuím srostlým společná, půlí úhel srostlicový. Zavede-li se pomocná rovina, na rovinu srůstu kolmá a zároveň v pásmu obdobných ploch jednotníků srostlých ležící, pak lze problém srostlicový převésti na řešení čtyřplochového pásma, sestávajícího z plochy na krystallu v původní poloze, z roviny srůstu, z plochy na druhém jednotníku srostlicovém a z roviny pomocné (ku rovině srůstu kolmé), čímž úkol ovšem jest usnadněn. To jest základ Krejčího způsobu řešení srostlic, jenž pospolu s celkem též samostatným vyvozením rovnic hranových po přednosti dílu vtiskuje znamení původnosti.

Samostatnost značnou měrou prozrazuje také ve třetím oddíle probírání *soustavy rhomboëdrické* čili stejnoklonné a to nejen ze stránky mathematické, přilínající celkem přece jen ku povšechným výkladům předeslaným, nýbrž také ve příčině fysikalní, protože při výpisu dirhomboëdrické tetartoëdrie naskytuje se Krejčímu příležitost na křemeni vysvětliti svůj názor o cirkulární a elliptické polarisaci. Týž záleží v podstatě v tom, že molekulám krystallovým připisuje se tetraidická podoba taková, že poměr dvou hran jest 1 : 4 *m* a že hranám těm osy pružnosti jsou úměrny. Neboť cirkulární polarisace vzniká ve dvojlomných krystallech tím, že ve dvou na sobě kolmých (při elliptické polarisaci v šikmých) směrech pružnost vykazuje poměr 1 : 4 *m*, čímž rychlost výchvějů světelných v jednom směru o čtvrt vlny se zdržuje. Aby podmínce té bylo vyhověno, k tomu jest dle Krejčího potřebí takového uspořádání molekul krystallových, jakéž pouze u tetartoidických hrání se naskytuje, z čehož plyne, že křemen, který kruhovou nebo vlastně elliptickou polarisací se vyznačuje, *nemůže býti enantihemiëdrický,* nýbrž musí býti enantitetartoidický, třebať že srostlicový ráz nebo dirhomboëdrie tetartoidickou povahu zastírává. Protože tedy dle Krejčího křemen tetartoidickým býti musí, nadchází proň také nutnost jiného odvozování ploch nežli vůbec jest obvyklo. Za tvar základní třeba prý bráti plochy *s*, jež Naumann prý mylně připisuje pyramidě (2P2), kdežto v skutku přísluší rhomboëdru. Vzhledem k tomuto tvaru základnímu vypočítává Krejčí značky 46 tvarů na křemeni se vyskytujících.

Ve fysikálném ohledě povšimnutí hodny jsou také Krejčího vývody, jež připojuje k rozboru mnohonásobných srostlic Phillipsitu, o kterém jedná se při soustavě rhombické, ačkoli dle Grotha jest nepochybně jednoklonný. Opětovaným srůstem dvojčatným zvýšuje se totiž symmetrie srostlic tak, že souměrným skladem i jednoklonných šestistěnů lze dospěti k regulérním tvarům (u Phillipsitu ku dvanáctistěnu kosočtverečnému), a naopak meroëdrickým rozkladem tvarů krychlových dodělati se lze hexaidů klinogonalných. Z toho vyvozuje Krejčí, že při posudku pravého prvotvaru srostlicových komplexů polysynthetických nutno přihlédnouti jediné k rationalitě tak, že dá-li se na př. základní tvar od regulérního prvotvaru rationelně odvoditi, také k soustavě krychlové jest jej čítati, ať už jeho úhly hranové odkazují k jakémukoli systému klinogonálnímu. Následkem toho chce krystally Phillipsitu (vedle jiných minerálů), protože od regulérního hexaëdru rationelně dají se odvoditi, zařaditi do soustavy krychlové, z čeho pak dále odvozuje také výklad pro optické abnormity některých minerálů, které přes svou podobu krychlovou vyznačují se dvojlomností. — Myšlénka tuto dotčená zvláště důkladně rozvinuje se povšechněji při soustavě trojklonné, kde při výpočtu krystallů modré skalice (chalkanthitu) především poukazuje se k tomu, že chalkanthit přes svůj nápadný trojklonný tvar nijak nepřináleží k absolutně triklinické soustavě, nýbrž že vznikl trojklonně meroëdrickým vývojem z regulérních elementů plošných; z čehož dále povšechně se vyvozuje, že „všechny soustavy krystallografické odvoditi lze z krychlově uspořádané skupiny bodů molekulárných nebo-li z krychle.“ Pro každý krystall kterékoli soustavy bylo by dle toho lze z krychle vyvoditi prvotvar jeho plochám odpovídající, načež krystallisovaná hmota od amorfní prostě dala by se rozlišiti tím, že v oné uspořádání molekul jest kubické, v této však nahodilé.

S těmi a podobnými, do ostatních výkladů vpletenými náhledy možno se spřáteliti, třebať částečně odporují jinak odůvodnitelným názorům běžným, což dokonce mohlo by sváděti k nespravedlivému úsudku o díle, které v podstatě své přece má *oprávněné nároky na pochvalu.* Že substrat příkladů konkretních vzat skoro venkoncem ze starých, ovšem základních spisů; že dána většinou přednost starým měřením krystallů; že ve výpisu soustav jednotlivých obnoven system diklinický, jehož krystallografická realita dokazuje se z vlastností základního hexaidu a vyslovuje se domněnka, že některé odrůdy Mikroklinu (živce) soustavě té přísluší; že projekce tvarů krystallových pominuto skoro úplně, protože celá Krejčího methoda čelí ku *přímému* provedení výpočtů, ale přece jisté projekce, jakožto podkladu výpočtů, někdy pohřešovati nemůže; toto vše jest menšího dosahu a nepadá vůči *přednostem* Krejčího spisu tuze na váhu.

Ku přednostem sluší výklady při vší stručnosti jasné a příjemně čitelné; všude projevující se snaha uvésti učně přímo do věci samé beze všech zbytečně učených oklik; přehledné uspořádání látky; provedený převod krystallografických značek Naumannových na Millerovy a naopak, zvláště při soustavě stejnoklonné důležitý; dále hojnost příkladův úplně provedených a podrobné probírání srostlic. V druhé řadě jest také uvésti nové krátké označení ploch a četná vyobrazení, která na významu bohužel poněkud ztrácejí, protože jsou příliš drobná. Také na konci díla připojený přehled trigonometrických a triëdrických vzorců a jiných vět pomocných zasluhuje uznání, protože i začátečníku porozumění pochodů mathematických v knize umožňuje.

Úhrnný soud o posmrtném díle prof. Jana Krejčího, kterým i do širších kruhů jako krystallograf se uvedl, nechci vysloviti jinak než na jiném váženém místě učinil posuzovatel velmi povolaný: *Krejčího dílo výborně se hodí k uvedení do mathematické krystallografie* a může býti tedy co nejlépe doporučeno.

Bedřich Katzer.