František Hoza
O relativních chybách čísel neúplných. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 2, 53--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123286

O relativních chybách čísel neúplných.

Sepsal

F. Hoza,

ředitel vyšších realných škol v Hradci Králové.

(Dokončení.)

9. Nejčastěji bývá úlohou: *Z mezné hodnoty chyby relativní ustanoviti počet spolehlivých míst předloženého čísla.*

Vzorcem
$$\Delta = \frac{\alpha}{a \, . \, 10^n}$$
stanoví se taková prostá hodnota Δ, která zůstává vždy větší, než relativní chyba předloženého čísla. Jelikož však $\alpha < 10$, je též
$$\Delta < \frac{1}{a \, . \, 10^{n-1}} .$$

Dejme tomu, že mez relativní chyby dána jest ve formě
$$\Delta = \frac{1}{b \, . \, 10^r} .$$

Potom nutno, aby
$$\frac{1}{b \, . \, 10^r} < \frac{1}{a \, . \, 10^{n-1}} ,$$
čili
$$10^n < \frac{b}{a} 10^{r+1} .$$

Je-li tedy
$$b > a ,$$
lze učiniti
$$n = r + 1 .$$

Je-li však
$$b \lesseqgtr a ,$$
lze postaviti
$$n = r .$$

Odtud důležité pravidlo:

Je-li mez relativní chyby neúplného čísla dána zlomkem, jehož čitatel jest 1, a jehož jmenovatel psán jest jedinou číslicí s připojenými v pravo nullami, má neúplné číslo tolik spolehlivých míst, kolik null jest ve jmenovateli, avšak bude o jedno spolehlivé místo více, když první číslice jmenovatele bude větší než první platná číslice předloženého čísla.

Na př. 4·8346, s relativní chybou menší než $\frac{1}{1000}$, má 3 spolehlivá místa, avšak s relativní chybou menší než $\frac{1}{5000}$, má 4 spolehlivá místa.

10. Jsou-li α, β meze pro absolutní chyby čísel a, b, jest $a\beta + b\alpha$ mez pro absolutní chybu součinu ab, a tudíž mez pro relativní chybu téhož součinu:

$$\frac{a\beta + b\alpha}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Mez relativní chyby součinu dvou neúplných čísel rovná se součtu mezných hodnot pro relativní chyby obou činitelů.

Na př. součin zkrácených čísel

$$28{\cdot}426 \times 7{\cdot}086$$

je spojen s relativní chybou menší než

$$\frac{5}{200000} + \frac{5}{70000} < \frac{1}{10000},$$

a obsahuje tudíž 4 spolehlivá místa. —

Je-li číslo c spojeno s meznou chybou absolutní γ, je součin $(ab).c$ spojen s meznou chybou relativní $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}$. Platí tedy věta pro dva činitele odvozená též pro jakýkoli počet činitelů.

11. Podíl $\frac{a}{b}$ je spojen, jak známo, s meznou chybou absolutní $\frac{a\beta + b\alpha}{b^2}$. Dělíme-li tuto podílem $\frac{a}{b}$, obdržíme mez pro chybu relativní:

$$\frac{a\beta + b\alpha}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Mez pro relativní chybu podílu dvou čísel rovná se mezi pro relativní chybu součinu týchž čísel.

Na př. $\frac{28{\cdot}426}{7{\cdot}086}$; mez relativní chyby jest jako nahoře $\frac{1}{10000}$, a tudíž vyjdou dělením 4 spolehlivá místa.

12. Násobíme-li *úplné číslo číslem neúplným,* bude mez relativní chyby činitele neúplného spolu meznou hodnotou pro relativní chybu součinu. Nechať a značí první platnou číslici a m počet spolehlivých míst u činitele neúplného. Součin pak začínej číslicí b a měj n spolehlivých. Konečně ať α, β značí meze pro absolutní chyby těchto dvou čísel v jednotkách prvního místa nespolehlivého. Tu platí rovnice:

$$\frac{\alpha}{a \cdot 10^m} = \frac{\beta}{b \cdot 10^n},$$

$$10^n = \frac{a\beta}{b\alpha} 10^m.$$

Jelikož však
$$\frac{a\beta}{b\alpha} > \frac{1}{10^2}.$$

jest
$$10^n > 10^{m-2},$$

tedy
$$n > m - 2.$$

Součin úplného čísla s neúplným obsahuje aspoň tolik spolehlivých míst méně jednoho, kolik jich má činitel neúplný.

Avšak často se počet spolehlivých míst součinu úplně vyrovná počtu spolehlivých míst v činiteli neúplném. Na příklad $1485 \times 3{\cdot}1416$; relativní chyba jest menší než $\frac{1}{60000}$, a jelikož $6 > 4$, má součin 5 spolehlivých míst.

13. Násobme vespolek *dvě čísla neúplná* mající týž počet spolehlivých míst. První platné číslice jejich buďtež a, b, a počet spolehlivých míst budiž n. Mez Δ relativní chyby součinu stanoví se takto:

$$\Delta = \frac{1}{a \cdot 10^{n-1}} + \frac{1}{b \cdot 10^{n-1}} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Jelikož
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq 2,$$

jest
$$\Delta \leqq \frac{2}{10^{n-1}}$$

čili
$$\Delta \leqq \frac{1}{5 \cdot 10^{n-2}}.$$

Součin dvou neúplných čísel shodujících se co do počtu spolehlivých míst bude v nejhorším případě míti o 2 spolehlivá místa *méně, než každý z činitelů, avšak začíná-li součin ten v levo číslicí menší než 5, bude míti o 1 spolehlivé místo více.*

Na př. $28{\cdot}748 \times 3{\cdot}2506$ dá dozajista 3 spolehlivá místa, avšak $38{\cdot}748 \times 3{\cdot}1416$ dá 4 spolehlivá místa.

Jsou-li oba činitelé čísly zkrácenými, bude

$$\varDelta = \frac{5}{a\,.\,10^n} + \frac{5}{b\,.\,10^n} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{1}{2\,.\,10^{n-1}}.$$

Potom

$$\varDelta \leqq \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Součin dvou zkrácených čísel n-místých obsahuje vždy aspoň n — 1 spolehlivé místo.

Na př. $29{\cdot}264 \times 3{\cdot}1416$ dává 4 spolehlivá místa.

14. Mnohdy lze dané činitele vyvinouti na tolik míst, kolik jich třeba. V takovém případě můžeme napřed ustanoviti, kolik míst třeba v činitelích, aby vyšel součin v určitém počtu spolehlivých míst. Na př. $\pi\sqrt{2}$ jest vyvinouti na 4 desetinná místa. Součin bude patrně číslem pětimístým. Jelikož oba činitelé jsou čísly zkrácenými, dostačí, když každého vyvineme na 6 míst t. j. na 5 míst desetinných. Ovšem sluší poznamenati, že zkráceným násobením povstává chyba nová, která způsobuje, že poslední místo součinu nebývá spolehlivo. Proto vyviňme raději každého činitele na 7 míst, násobme pak zkráceně na 5 desetinných míst a v součinu vezměme z nejnižšího místa pouze opravu.

$$\pi = 3{\cdot}141592,$$
$$\sqrt{2} = 1{\cdot}414214,$$

$$\begin{array}{rl}
3{\cdot}1415 & 92 \\
41\,2414 & 1 \\
\hline
3\,1415 & \vert\, 9 \\
1\,2566 & \vert\, 4 \\
314 & \vert\, 2 \\
125 & \vert\, 6 \\
6 & \vert\, 3 \\
 & \vert\, 3 \\
 & \vert\, 1 \\
\hline
\pi\sqrt{2} = 4{\cdot}4429 & \vert
\end{array}$$

Jak lze vyšetřiti mez pro absolutní chybu vzešlou zkráceným násobením a dělením, o tom lze se poučiti z Algebry sepsané Fr. Machovcem.

15. Bývá též úlohou: Vypočísti hodnotu výrazu, jehož numerická data jsou dána, s přesností co možná největší.

Na př. $\frac{a}{b}$, když $a = 4{\cdot}723$, $b = 3{\cdot}1416$, kdež obě daná čísla jsou zkrácenými.

Nejprve určíme mez relativní chyby pro číslo výsledné:

$$\frac{5}{40000} + \frac{5}{300000} < \frac{1}{7000}.$$

Potom najdeme první platnou číslici v čísle výsledném. Zde jest to 1, tudíž méně než 7. A z toho soudíme na počet spolehlivých míst ve výsledku. Zde vyjdou 4 spolehlivá místa.

$$4{\cdot}723 : 3{\cdot}\underline{1}\underline{4}\underline{1}\underline{6} = 1{\cdot}503.$$

1 581
10
1

Při praktickém počítání netřeba vyšetřovati chyb absolutních, stačí, když určíme počet spolehlivých míst a potom počítajíce zkráceně vyvineme raději o jedno místo více, ze kterého vezmeme pouze opravu.

16. Povyšujíce číslo neúplné na *druhou mocnost*, násobíme je samo sebou.

Mez relativní chyby druhé mocniny obdržíme, když mez relativní chyby mocněncovy násobíme dvěma. Pak snadno určíme, kolik spolehlivých míst bude mocnina obsahovati. Na př. $3{\cdot}1416^2$ je spojena s meznou chybou relativní

$$\frac{10}{300000} = \frac{1}{30000},$$

pročež dá 4 spolehlivá místa. —

Povyšujíce číslo neúplné na *třetí mocnost*, násobme jeho meznou chybu relativní třemi, potom vyšetřeme první platnou číslici výsledku a konečně dle známého pravidla i počet spolehlivých míst. Ku př. $3{\cdot}1416^3$ je spojena s meznou chybou relativní $\frac{1}{20000}$, a dá tudíž 4 spolehlivá místa.

Užijeme-li při výpočtu zkráceného násobení, vyvineme vždy o 1 místo více a z toho vezmeme opravu.

17. *Druhou odmocninu* neúplného čísla lze ustanoviti na tolik spolehlivých míst, kolik připadá na polovinu mezné chyby relativní u daného odmocněnce.

Na př. $\sqrt{3{\cdot}1416}$ je spojena s meznou chybou relativní

$$\frac{5}{2\times 300000} < \frac{1}{100000},$$

a vyjde tudíž na 5 spolehlivých míst, z nichž 3 vyvineme spůsobem obyčejným a 2 spůsobem zkráceným:

$$\begin{array}{l} \sqrt{3{\cdot}1416} = 1{\cdot}7724 \\ 2\,1\underline{4} : 27 \\ \quad 251\underline{6} : 347 \\ \qquad 87 : 3\underline{5}\underline{4} \\ \qquad 16 \\ \qquad\;\, 2 \end{array}$$

K absolutní chybě ležící v daném čísle přistoupí pak ještě chyba spojená se zkráceným odmocňováním. Kterak se mezná hodnota této chyby ustanoví, o tom lze se poučiti z každé učebnice Algebry.

Podobně jest si počínati při odmocnině třetí. Vůbec z dosavadního patrno, že pravidla zde vyvinutá stačí úplně ve všech případech praktického počítání.

Příspěvek ku zkrácenému počítání.

Sepsal

Otakar Ježek,

s. professor real. gymnasia na Smíchově.

(Dokončení.)

III.

Řešme nyní obdobnou úlohu pro třetí mocnosť, t. j. „stanovme trojmoc nekonečného desetinného čísla

$$\pi = 3{,}1415926358979323846\ldots$$

na 0,00001 nadbytkem nebo nedostatkem přesně.“