Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 1, 94--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123340

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1905

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Výrazu pro obsah lze dáti patrně podobu

$$V = \frac{\pi}{24}[4a^2 - (n-m)^2]\sqrt{(m+n)^2 - 4a^2},$$

kdež ještě výrazy $4a^2 - (n-m)^2$, $(m+n)^2 - 4a^2$ známým způsobem na činitele rozložiti lze.

Jde-li jen o plášť p uvažovaného kužele, jest

$$p = P - \pi ab = \pi . \frac{m+n}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{n-m}{2}\right)^2}.$$

Úlohy.

Úloha 1.

Řešte soustavu rovnic

$$(x+y)(z+v) = \lambda$$
$$(x+z)(y+v) = \mu$$
$$(x+v)(y+z) = \nu$$
$$xyzv = \sigma^2$$

obecně i zvlášť pro hodnoty $\lambda = 162$, $\mu = 152$, $\nu = 140$, $\sigma = 30$.

Dr. *Marian Haas.*

Úloha 2.

Řešte soustavu rovnic

$$xy + zv = \lambda$$
$$xz + yv = \mu$$
$$xv + yz = \nu$$
$$x + y + z + v = 2s$$

obecně a zvlášť pro hodnoty $\lambda = 111$, $\mu = 84$, $\nu = 76$, $s = 14$.

Dr. *M. Haas.*

Úloha 3.

Řadu zvanou Fibonacciovu

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\ldots\ldots,$$

jejíž každý člen rovná se součtu dvou bezprostředně předcházejících, lze obdržeti sčítáním stejnolehlých členů dvou řad geometrických. Vyjádřiti na základě tom obecný člen této řady a součet prvých n členů, jakož i dokázati uvedenou vlastnost řady.

Prof. *Ant. Sýkora.*

Úloha 4.

Jest sestrojiti trojúhelník ABC, dány-li jsou střed P strany AB, vrchol C a průsečík výšek V.

Prof. *J. Schimek.*

Úloha 5.

V trojúhelníku různostranném spuštěny jsou výšky AA', BB', CC' a úseky stran BA', $A'C$, CB', $B'A$, AC', $C'B$ označeny a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Ustanoviti pomocí úhlů původního trojúhelníka úhly trojúhelníka o stranách $|a_1 - a_2|$, $|b_1 - b_2|$, $|c_1 - c_2|$. (Při tvoření rozdílů jest bráti zřetel na směry jednotlivých délek.)

r.

Úloha 6.

Hranami pravidelného čtyrstěnu veď roviny tak, aby obmezovaly krychli, a stanov její hranu.

Prof. *Ant. Sýkora.*

Úloha 7.

Dokázati jest, že všecky trojúhelníky vepsané do jedné a téže ellipsy a mající těžiště ve středu ellipsy mají stejný ploský obsah.

Dr. *M. Haas.*

Úloha 8.

Ustanoviti jest geometrické místo pro střed kruhu opsaného trojúhelníku, jehož těžiště jest ve středu dané ellipsy a vrcholy na obvodu jejím.

Dr. *M. Haas.*

Úloha 9.

Dokázati jest, že průsečíky tří tečen paraboly leží na kružnici procházející ohniskem.

Ant. Lochmann.

Úloha 10.

Sestrojiti průsečíky paraboly dané ohniskem a řídící přímkou s přímkou procházející ohniskem této paraboly.

Ant. Lochmann.

Úloha 11.

Přímka procházející průsečíkem A dvou kružnic protíná tyto ještě v bodech P, Q.

α) Kdy jest $\overline{PQ}$ *nejdelší a kdy nejkratší?*

β) Sestrojiti jest $\overline{PQ}$ *tak, aby byla bodem A půlena.*

Ant. Lochmann.

Úloha 12.

Řešiti jest rovnici

$$2^{\nu} \sin x \, . \cos 2x \, . \cos (2^2 x) \ldots\ldots \cos (2^{\nu-1} x) = 1.$$

Ant. Lochmann.

Úloha 13.

Dokázati jest správnost rovnice

$$\cos 20^0 \, . \cos 40^0 \, . \cos 60^0 \, . \cos 80^0 = \frac{1}{16}.$$

Ant. Lochmann.

Úloha 14.

Dokázati jest vztah)*

$$\frac{1}{2} tg \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} tg \frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3} tg \frac{x}{2^3} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2^{\nu}} tg \frac{x}{2^{\nu}} = \frac{1}{2^{\nu}} cot \frac{x}{2^{\nu}} - cot\, x.$$

r.

Úloha 15.

Dokázati jest vztah

$$\frac{1}{1 \, . \, n} + \frac{1}{2 \, . \, (n-1)} + \frac{1}{3 \, . \, (n-2)} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{n \, . \, 1} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right);$$

n číslo celé.

r.

Úloha 16.

Jest vyjádřiti ve tvaru co nejjednodušším výrazy

$$\alpha) \; 1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$\beta) \; 1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \ldots;$$

n číslo celé.

r.

* Z tohoto vztahu plyne snadno známá řada Eulerova.