František Josef Studnička

Methodický příspěvek ku počtu integrálnímu. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 4, 228--232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123355

$$\frac{1+\alpha}{\beta}=-\frac{a^2-a+b^2}{b},$$

nous nous trouvons ramené à la formule

$$\log(a+ib)$$
$$=\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-a+b^2}{b}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-1}{b}\right].$$

Je remarquerai encore q'en faisant:

$$x=\frac{a^2-a+b^2}{b},\quad y=\frac{a-1}{b},$$

on a:

$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{b}{a},$$

de sorte que le coefficient de i est bien l'un des arcs ayant pour tangente $\frac{b}{a}$; on voit facilement qu'en supposant a positif, ce sera l'arc minimum compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Methodický příspěvek ku počtu integrálnímu.

Podal

prof. dr. F. J. Studnička.

Jednoduchý jest zajisté integrační úkol, určiti hodnotu

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx,$$

kdež $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou algebraické funkce racionální a celistvé; přijdeť se všeobecně na typické integrály

$$\int\chi(x)\,dx,\ \int\frac{dx}{a+bx},\ \int\frac{dx}{(a+bx)^n},$$
$$\int\frac{dx(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)}{a+2bx+cx^2},\ \int\frac{dx(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)}{(a+2bx+cx^2)^n},$$

z nichž první tři stanoviti neposkytuje žádných obtíží, jelikož $\chi(x)$ jest téhož rázu jako $\varphi(x)$, poslední pak dva vyžadují pouze delších obratů, aby se přišlo k cíli, jakýž tu představuje příslušný vzorec redukční.

Poněvadž v tomto případě posledním vede složité transformování k výsledku jednoduchému,*) možná předpokládati, že dosavadní methody nejsou nejpřiměřenější, a že tedy nějakým novým spůsobem přijde se zajisté rychleji k cíli,**) což i následující odvození dokazuje.

1. Po krátké úvaze přijde se přímo ku poznání, že první integrál, jejž zde máme na zřeteli, uvésti možná na tvar

$$\int \frac{dx(A + Bx)}{a + 2bx + cx^2} = \alpha\, l\, T + \beta \int \frac{dx}{T} ,$$

zavedeme-li tu označení

$$T = a + 2b\,x + cx^2,$$

takže třeba jen určiti součinitele α, β, aby se přišlo k hledanému vzorci rekukčnímu.

Derivujeme-li na obou stranách, bude

$$A + Bx = 2\,\alpha\,(b + cx) + \beta,$$

z čehož porovnáním plyne

$$A = 2\alpha b + \beta,$$
$$B = 2\alpha c,$$

takže jednoduchým řešením obdržíme

$$\alpha = \frac{B}{2c} , \quad \beta = \frac{Ac - Bb}{c} ,$$

načež původní vzorec náš se promění v

*) Viz *Studnička* „O duchu mathematickém a některých jeho zjevech“. Časop. VIII. pag. 85.

**) Viz *Studnička* „O počtu integrálním“ pag. 24., anebo nejnovější spis *Laurent* „Traité d'analyse“, Tome III. pag. 37., kdež se týž složitý postup uvádí co „nouvelle méthode“.

$$\int \frac{dx\,(A+Bx)}{a+2bx+cx^2} = \frac{B}{2c}\, l\,(a+2bx+cx^2) + \frac{Ac-Bb}{c}\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}.\text{*)}$$

2. Podobným, avšak složitějších výpočtů vyžadujícím způsobem možná určiti poslední integrál.

Zde taktéž vede krátká úvaha ku poznání, že vzorec redukční v tomto případě musí míti tvar

$$\int \frac{dx\,(A+Bx)}{(a+2bx+cx^2)^n} = \frac{\alpha+\beta x}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}} + \gamma \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}},$$

takže jen ustanoviti třeba hodnoty neurčitých součinitelů α, β, γ, aby vzorec náš byl přímo upotřebitelný.

Užijeme-li tedy dřívějšího kratšího označení a derivujeme-li pak na obou stranách, obdržíme k tomu cíli

$$\frac{A+Bx}{T^n} = \frac{T^{n-1}\beta - 2(n-1)T^{n-2}(b+cx)(\alpha+\beta x)}{T^{2n-2}} + \frac{\gamma}{T^{n-1}},$$

načež bude, odstraníme-li jmenovatele

$$A+Bx = (\beta+\gamma)\,(a+2bx+cx^2) - (2n-2)\,(b+cx)(\alpha+\beta x);$$

a spořádáme-li na pravé straně podle mocnin proměnné x, obdržíme podle methody o neurčitých součinitelích tři lineární rovnice a sice

$$\begin{aligned} -(2n-2)\,b\alpha + \qquad\qquad a\beta + a\gamma &= A, \\ -(2n-2)\,c\alpha - (2n-4)\,b\beta + 2b\gamma &= B, \\ -(2n-3)\,c\beta + c\gamma &= 0, \end{aligned}$$

*) Téhož obratu možná užiti při rekurrentním vzorci podobném

$$\int \frac{dx\,(A+Bx)}{\sqrt{T}} = \alpha\sqrt{T} + \beta\int\frac{dx}{\sqrt{T}},$$

jakož se i k cíli takto přijde u vzorce

$$\int x dx\,\sqrt{T} = \alpha\int\sqrt{T}\,dT + \beta\int dx\sqrt{T} \text{ a j. p.}$$

z nichž se snadným spůsobem určí neznámé dosud hodnoty součinitelů α, β, γ.

Budeť tu determinant soustavy této

$$\delta = \begin{vmatrix} -(2n-2)\,b, & a & , a \\ -(2n-2)\,c, & -(2n-4)b, & 2b \\ 0 & , -(2n-3)\,c, & c \end{vmatrix} = (2n-2)\begin{vmatrix} b, & 0, & a \\ c, & (2n-2)b, & 2b \\ 0, & (2n-2)c, & c \end{vmatrix}$$

a vyčíslíme-li, zkrátivše co možná,

$$\delta = (2n-2)^2\, c(ac-b^2).$$

Čitatel neznámé veličiny první bude pak

$$-(2n-2)\begin{vmatrix} \mathrm{A}, & 0, & a \\ \mathrm{B}, & b, & 2b \\ 0, & c, & c \end{vmatrix} = c(2n-2)(\mathrm{A}b-\mathrm{B}a);$$

a podobně se obdrží pro druhou neznámou

$$-(2n-2)\begin{vmatrix} b, & \mathrm{A}, & a \\ c, & \mathrm{B}, & 2b \\ 0, & 0, & c \end{vmatrix} = c(2n-2)(\mathrm{A}c-\mathrm{B}b),$$

jakož i pro neznámou třetí

$$-(2n-2)\begin{vmatrix} b, & a & \mathrm{A} \\ c, & -(2n-4)b, & \mathrm{B} \\ 0, & -(2n-3)c, & 0 \end{vmatrix} = (2n-2)(2n-3)\,c\,(\mathrm{A}c-\mathrm{B}b).$$

I jest tedy podle výsledků těchto

$$\alpha = \frac{\mathrm{A}b-\mathrm{B}a}{(2n-2)(ac-b^2)},$$

$$\beta = \frac{\mathrm{A}c-\mathrm{B}b}{(2n-2)(ac-b^2)},$$

$$\gamma = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{\mathrm{A}c-\mathrm{B}b}{ac-b^2},$$

takže náš redukční vzorec obdrží tvar

$$\int\frac{dx(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)}{(a+2bx+cx^2)^n} = \frac{\mathrm{A}b-\mathrm{B}a+(\mathrm{A}c-\mathrm{B}b)x}{(2n-2)(ac-b^2)(a+2bx+cx^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{\mathrm{A}c-\mathrm{B}b}{ac-b^2}\int\frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{n-1}}.$$

A z tohoto všeobecného tvaru možná pak zjednati si spůsobem zcela jednoduchým, položí-li se

$$A = 1,\quad B = 0,$$
$$a = 1,\quad b = 0,\quad c = \pm 1,$$

vzorec zvláštní velmi užitečný

$$\int \frac{dx}{(1 \pm x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)(1 \pm x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1 \pm x^2)^{n-1}},$$

kterýž se obyčejně napřed vyvinuje, aby se dlouhými transformacemi na předcházející všeobecný přišlo.

Konečně budiž tu ještě poznamenáno, že této methody možná užiti s nemalým prospěchem i v četných jiných případech podobných.

Položíme-li na př.

$$\int e^x x^n dx = e^x \left[x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n\right],$$

obdržíme, derivujíce na obou stranách,

$$e^x x^n = e^x \left[\begin{array}{r|l|l|l} x^n + \alpha_1 & x^{n-1} + \alpha_2 & x^{n-2} + \alpha_3 & x^{n-3} + \ldots + \alpha_n \\ n & (n-1)\,\alpha_1 & (n-2)\,\alpha_2 & \qquad\qquad \alpha_{n-1} \end{array}\right],$$

z čehož plyne porovnáním součinitelů

$$\alpha_1 = -n,$$
$$\alpha_2 = -(n-1)\,\alpha_1,$$
$$\alpha_2 = -(n-2)\,\alpha_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_k = -(n-k+1)\,\alpha_{n-1},$$

takže znásobíme-li na obou stranách, vznikne vzorec

$$\alpha_k = (-1)^k n^{k|-1},$$

načež integrál náš jest přímo určen, aniž bychom obvyklého integrování po částech byli potřebovali.

Jiný zajímavý příklad poskytuje vzorec

$$\int \frac{(f + g \cos x)dx}{(a + b \cos x)^{n+1}} = \frac{\alpha \sin x}{(a + b \cos x)^n} + \int \frac{(\beta + \gamma \cos x)\,dx}{(a + b \cos x)^n}.$$