Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Velísek

Určení ploch šroubových, jichž totální a střední křivost vázány jsou lineární relací

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 1, 15--25

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123372`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1910

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Konečně kolmice spuštěná s bodu dříve stanoveného ${}^3d_1$, omezujícího rychlost bodu d_1 ke spojnici $\overline{d_1{}^4p'}$, protíná normálu sestrojenou v bodu tomto křivky $\check{S}_1$ *v hledaném středu křivosti* s.

Určení ploch šroubových, jichž totální a střední křivost vázány jsou lineární relací.

Fr. Velísek v Praze.

Plocha šroubová budiž dána rovnicemi

$$A)\qquad x = \varrho \cos v,\ y = \varrho \sin v,\ z = mv + \varphi(\varrho),$$

z čehož plynou pro hlavní poloměry křivosti R_1, R_2 tyto relace:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\varphi'[\varrho^2(1+\varphi'^2) + 2m^2] + \varrho\varphi''(\varrho^2 + m^2)}{[m^2 + \varrho^2(1+\varphi'^2)]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{\varrho^3\varphi'\varphi'' - m^2}{[m^2 + \varrho^2(1+\varphi'^2)]^2}.$$

Oba poloměry jsou funkce jeden druhého. Abychom to vyjádřili, můžeme říci, že existuje relace jistá mezi jich součtem a součinem, či mezi střední a totální křivostí. Určíme všechny plochy šroubové, kdy poslední relace jest lineární. Plochy parallelní k ploše šroubové jsou opět plochy šroubové, možno tedy odvoditi plochy šroubové, jichž totální a střední křivost jsou vázány lineární relací, z ploch šroubových o konstantní křivosti totální. (Ossian Bonnet, Nouvelles Annales de Mathématiques 1853, p. 433).

Budiž dána relace

$$\frac{M}{R_1R_2} + N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + P = 0, \tag{1}$$

kde M, N, P jsou dané konstanty. Bude tudíž $\varphi(\varrho)$, určující tvořící profil plochy šroubové, určeno differenciální rovnicí:

$$M\frac{\varrho^3\varphi'\varphi'' - m^2}{[m^2 + (1+\varphi'^2)\varrho^2]^2}$$

$$+ N\frac{\varphi'[\varrho^2(1+\varphi'^2) + 2m^2] + \varrho\varphi''(\varrho^2 + m^2)}{[m^2 + \varrho^2(1+\varphi'^2)]^{3/2}} + P = 0.$$

První integraci lze snadno provésti (L. Raffy, Bull. de la Soc. Math. de Franç. t. XIX.), ježto výrazy u M, N mají resp. tvar:

$$-\frac{1}{2\varrho}\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho^2}{m^2+\varrho^2(1+\varphi'^2)}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho^2\varphi'}{\sqrt{m^2+\varrho^2(1+\varphi'^2)}},$$

a tudíž, označíme-li integrační konstantu Q, obdržíme

$$-\frac{M\varrho^2}{m^2+\varrho^2(1+\varphi'^2)}+\frac{2N\varrho^2\varphi'}{\sqrt{m^2+\varrho^2(1+\varphi'^2)}}+P\varrho^2+Q=0.$$

Rovnice ukazuje, že případy pro totální neb střední křivost konstantní vedou k elliptickým integrálům. Theorem Bonnetův ukazuje, že tomu tak jest i v případě obecném.

Nechť pro obecnou plochu šroubovou

$$x_1=\varrho\cos v+lf_0\cos(f_1+v),\ y_1=\varrho\sin v+lf_0\sin(f_1+v),$$
$$z=mv+\varphi+lf_2,$$

kde f_0, f_1, f_2, φ jsou funkce ϱ, l libovolná konstanta, vede integrace rovnice 1. na quadraturu. Pro součinitele první a druhé základní formy theorie ploch

$$\Sigma dx^2=E\,d\varrho^2+2F\,d\varrho\,dv+G\,dv^2,$$
$$-\Sigma dx\,dX=D\,d\varrho^2+2D'\,d\varrho\,dv+D''\,dv^2,$$

obdržíme:

$$\begin{aligned}
E &= l^2(f'^2_0+f^2_0f'^2_1+f'^2_2)+2l(f'_0\cos f_1-f_0f'_1\sin f_1+\varphi'f'_2)\\
&\qquad +1+\varphi'^2,\\
G &= l^2f^2_0+2l\varrho f_0\sin f_1+\varrho^2+m^2,\\
F &= l^2f^2_0f'_1+l(\varrho f_0f'_1\cos f_1-f_0\sin f_1+\varrho f'_0\sin f_1+mf'_2)\\
&\qquad +m\varphi'\\
D &= l^3(f_0f'_0f''_2-f_0f''_0f'_2+f^2_0f'^2_1f'_2)+l^2(\varrho f'_0f''_2\cos f_1\\
&\quad -\varrho f_0f'_1f''_2\sin f_1+f_0f''_2\cos f_1+\varphi''f_0f'_0-\varrho f''_0f'_2\cos f_1\\
&\quad +2\varrho f'_0f'_1f'_2\sin f_1+\varrho f_0f''_1f'_2\sin f_1+\varrho f_0f'^2_1f'_2\cos f_1\\
&\quad -\varphi'f_0f''_0+\varphi'f^2_0f'^2_1-mf_0f'_0f''_1-2mf'^2_0f'_1+mf_0f''_0f'_1\\
&\quad -mf^2_0f'^3_1)+l(\varrho\varphi''f'_0\cos f_1-\varrho\varphi''f_0f'_1\sin f_1+\varphi''f_0\cos f_1\\
&\quad +\varrho f''_2-\varrho f''_0\varphi'\cos f_1+2\varrho\varphi'f'_0f'_1\sin f_1+\varrho\varphi'f_0f''_1\sin f_1\\
&\quad +\varrho\varphi'f_0f'^2_1\cos f_1-mf''_0\sin f_1-2mf'_0f'_1\cos f_1\\
&\quad -mf_0f''_1\cos f_1+mf_0f'^2_1\sin f_1)+\varrho\varphi'',
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D' = {} & l^3 f_0^2 f'_1 f'_2 + l^2 (\varrho f'_0 f'_2 \sin f_1 + \varrho f_0 f'_1 f'_2 \cos f_1 \\
& - f_0 f'_2 \sin f_1 + f_0^2 f'_1 \varphi' - m f'^2_0 - m f_0^2 f'^2_1) + l (\varrho \varphi' f'_0 \sin f_1 \\
& + \varrho \varphi' f_0 f'_1 \cos f_1 - \varphi' f_0 \sin f_1 - 2m f'_0 \cos f_1 \\
& + 2m f_0 f'_1 \sin f_1) - m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D'' = {} & l^3 f_0^2 f'_2 + l^2 (\varphi' f_0^2 + 2\varrho f_0 f'_2 \cos f_1 - m f_0^2 f'_1) + l (\varrho^2 f'_2 \\
& + 2\varrho \varphi' f_0 \cos f_1 - m\varrho f'_0 \sin f_1 + m f_0 \sin f_1 \\
& - m\varrho f_0 f'_1 \cos f_1) + \varrho^2 \varphi',
\end{aligned}
$$

kde poslední veličiny jsou bez faktora $(EG - F^2)^{-\frac{1}{2}}$

Utvoříme-li výrazy pro součin a součet hlavních poloměrů křivosti, objeví se $R'_1 R'_2$ ve tvaru zlomku, jehož čitatel jest vzhledem k l stupně 8-ho, jmenovatel 6-ho. Určíme-li pak libovolné funkce f_0, f_1, f_2 tak, aby součinitelé l^8 v čitateli a l^6 ve jmenovateli tohoto zlomku byli rovnými, obdržíme relaci,

$$
\text{I.} \qquad f_0 (f'^2_0 + f'^2_2)^2 = f'_2 (f'_0 f''_2 - f''_0 f'_2),
$$

a z podmínky, by součinitelé při f''_1 a f''_2 — při platnosti relace I. — v koëfficientu l^5 ve jmenovateli přešli v 0, plynou vztahy resp.

$$
\text{II.} \qquad m f'_0 - \varrho f'_2 \sin f_1 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III.} \qquad & \left(\varrho f'_0 f'_2 + f_0 f'_2 + 2\varrho f'_0 f'_2 + \frac{3\varrho f_2 f'^2_2}{f_0} \right) \cos f_1 \\
& - \varrho f_0 f'_1 f'_2 \sin f_1 + \varphi' f_0 f'_0 - m f_0 f'_0 f'_1 + 2\varphi' f_2 f'_2 \\
& - 2m f'_1 f_2 f'_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Rovnice I. dává, klademe-li

$$
f_0 = \psi (f_2)
$$

a označíme

$$
\frac{d\psi (f_2)}{df_2} = \psi' (f_2) \text{ krátce } \psi'
$$

$$
\psi (1 + \psi'^2)^2 = - \psi'',
$$

z čehož jako nejjednodušší partikulární integrál plyne

$$
f_0^2 = 1 - f_2^2.
$$

Relace II. pak dává

$$
\sin f_1 = - m \frac{\sqrt{1 - f_0^2}}{\varrho f_0}, \quad \cos f_1 = - \frac{\sqrt{(m^2 + \varrho^2) f_0^2 - m^2}}{\varrho f_0}.
$$

Dosadíme-li vypočtené veličiny do relace III., obdržíme snadně

$$f_0 f'_0 \left(\varphi' - \frac{\sqrt{(m^2 + \varrho^2) f_0^2 - m^2}}{\varrho \sqrt{1 - f_0^2}}\right) = 0.$$

Neklademe-li f_0 konstantou, obdržíme:

$$f_0^2 = \frac{m^2 + \varrho^2 \varphi'^2}{m^2 + \varrho^2 (1 + \varphi'^2)}$$

a z toho:

$$f_2^2 = \frac{\varrho^2}{m^2 + \varrho^2 (1 + \varphi'^2)}, \quad tg f_1 = \frac{m}{\varrho \varphi'}.$$

Dosadíme-li příslušné výrazy do $R'_1 R'_2$, $R'_1 + R'_2$, plyne snadno, že koëfficienty v předložené rovnici

$$PR'_1 R'_2 + N(R'_1 + R'_2) + M = 0$$

jsou resp. při l^2: P, při $l : 2N + P(R_1 + R_2)$, a prostý člen

$$PR_1 R_2 + M + N(R_1 + R_2),$$

kde R_1, R_2 značí hlavní poloměry křivosti plochy A. Funkce f_0, f_1, f_2 jsou pak totožny s kosiny normály této plochy, a to buď ve smyslu kladném neb záporném, dle volby znamení těchto funkcí. Substitucí touto tedy přecházíme k theoremu Bonnetovu při ploše šroubové, a volíme-li libovolnou dosud konstantu l tak, že

$$N + lP = 0,$$

redukuje se řešení rovnice 1. na řešení

$$PR_1 R_2 + M - \frac{N^2}{P} = 0.$$

Stačí tudíž vyhledati plochy šroubové o konstantní křivosti totální, vyjímaje případ, kdy $P = 0$, t. j. pro konstantní křivost střední.

Klaďme

$$\frac{N^2 - PM}{P^2} = a^2,$$

pak jest

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\varrho^3 \varphi' \varphi'' - m^2}{[m^2 + \varrho^2 (1 + \varphi'^2)]^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$- \frac{1}{2\varrho} \frac{d}{d\varrho} \frac{\varrho^2}{m^2 + \varrho^2 (1 + \varphi'^2)} = \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{a^2 b - \varrho^2}{a^2} = \frac{\varrho^2}{m^2 + \varrho^2 (1 + \varphi'^2)},$$

kde b značí integrační stálou. Pro funkci φ, nehledíme-li na addiční konstantu, obdržíme

$$\varphi = \int \frac{\varrho^4 + \varrho^2 (a^2 + m^2 - a^2 b) - a^2 b m^2}{\varrho \sqrt{(a^2 b - \varrho^2)(\varrho^4 + \varrho^2 (a^2 + m^2 - a^2 b) - a^2 b m^2)}} d\varrho.$$

Zavedeme novou proměnnou substitucí $\varrho^2 = u$, a klademe $a^2 b = c$

$$\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 + u(a^2 + m^2 - c) - m^2 c}{u \sqrt{(c - u)(u^2 + u(a^2 + m^2 - c) - m^2 c)}} du.$$

Kořeny trinomu k čitateli mohou býti imaginárními jen pro $c < 0$, tedy při $b > 0$ pro plochy konstantní křivosti negativní.

Za účelem redukce dlužno tedy rozeznávati případy $c > 0$, $c < 0$.

I. $c > 0$: kořeny, které krátce označíme α, β, jsou oba reelní.

II. $c < 0$: α, β jsou buď reelní neb imaginární, dle tohoto schematu:

1.	$c > 0$,	$a^2 > 0$,	pak	$\alpha > 0$,	$\beta < 0$	
2.	$c > 0$,	$a^2 < 0$,	„	$\alpha > 0$,	$\beta < 0$	
3.	$c < 0$,	$a^2 > 0$,	„	$\alpha < 0$,	$\beta < 0$	neb α, β jsou imaginární.
4.	$c < 0$,	$a^2 < 0$,	„	$\alpha > 0$, / $\alpha < 0$,	$\beta > 0$ / $\beta < 0$	

Pohybuje se tedy vždy positivní u pro realitu odmocniny v případě 1. a 2. v mezích

$$\alpha < u < c, \text{ neb } \alpha > u > c.$$

Případ 3. nedává při reelních kořenech reelní plochy, v případu 4. jest u v mezích ($\alpha < 0$, $\beta < 0$ nemožno)

$$\alpha > u > \beta.$$

Imaginární α, β nejsou přípustny, má-li plocha býti reelní.

Obdržíme tudíž všechny případy z

$$\alpha > u > c,$$

když vyměníme α s c, resp. c s β.

$$\varphi = \int \frac{(u - \alpha)(u - \beta)\, du}{\mu \sqrt{(c - u)(u - \alpha)(u - \beta)}}$$

Za příčinou transformace na Riemannovu irracionalitu nechť odpovídají hodnoty nové proměnné ω:

$$\infty,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},$$

resp. hodnotám u

$$\beta,\quad c,\quad \alpha,\quad \infty,$$

což odpovídá substituci

$$u = \frac{c - \beta\, k^2\omega}{1 - k^2\omega},$$

kde

$$k^2 = \frac{\alpha - c}{\alpha - \beta} < 1.$$

Obdržíme

$$u - \alpha = (\alpha - c)\frac{\omega - 1}{1 - k^2\omega},\quad u - \beta = \frac{c - \beta}{1 - k^2\omega},$$

$$u - c = \frac{(c - \beta)\, k^2\omega}{1 - k^2\omega},$$

$$\varphi = \frac{k\,(c - \beta)\sqrt{\alpha - c}}{2}\,.$$

$$\cdot \int \frac{(\omega - 1)\, d\omega}{(1 - k^2\omega)(c - k^2\omega)\sqrt{\omega(1 - \omega)(1 - k^2\omega)}}.$$

Rozložíme-li část racionální ve dva částečné zlomky, obdržíme

$$\varphi = \frac{\sqrt{\alpha - \beta}}{2} \int \frac{\dfrac{1 - k^2}{1 - k^2\omega} - \dfrac{c - k^2\beta}{c^2 - \beta\, k^2\omega}}{\sqrt{\omega\,(1 - \omega)(1 - k^2\omega)}}\, d\omega.$$

Poněvadž ω se pohybuje v mezích $0 \ldots 1$, můžeme pro redukci na tvar Legendreův klásti

$$\omega = \sin^2\vartheta.$$

Označíme-li ještě $\dfrac{-\beta\, k^2}{c} = n$, $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta} = \varDelta\vartheta$, obdržíme

$$\varphi = (1 - k^2)\sqrt{\alpha - \beta}\int \frac{d\vartheta}{\varDelta^3\vartheta}$$

$$- \frac{(c - k^2\beta)\sqrt{\alpha - \beta}}{c}\int \frac{d\vartheta}{(1 + n\,\sin^2\vartheta)\,\varDelta\vartheta}\,.$$

Budiž

$$\int \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} = t, \text{ z čehož } \vartheta = amt,$$

pak jest:

$$\frac{d\,(k\,.\,t)}{dk} = \int \frac{d\vartheta}{\Delta^3\vartheta} = \frac{E\,(amt)}{k'^2} - \frac{k^2\,snt\,cnt}{k'^2\,dnt},$$

kde

$$E\,(\vartheta) = E\,(amt) = \int dn^2\,t\,dt,\; k'^2 = 1 - k^2.$$

V integrálu

$$\int \frac{d\vartheta}{(1 + n\,sin^2\,\vartheta)\,\Delta\vartheta}$$

jest n positivní. Pro redukci tedy klademe při reelním ψ

$$n = -\,k^2\,sn^2\,i\,\psi = k^2\,tg^2\,am\,(\psi,\,k'),$$

a při užití symbolů Jacobi-ho

$$\int \frac{d\vartheta}{(1 + n\,sin^2\,\vartheta)\,\Delta\vartheta} = t + \frac{tg\,am\,i\,\psi}{dn\,i\,\psi}\,\Pi\,(t,\,i\,\psi).$$

Použijeme-li známých relací (viz ku př. Thomae: Sammlung von Formeln 1905), kde k vůli jednoduchosti klademe

$$Z_{01} = Z,\; \Omega_{01}^{(u,v)} = \frac{1}{2}\,lg\,\frac{\Theta\,(u - v)}{\Theta\,(u + v)},\quad (\Theta_{01} = \Theta),$$

a značíme totální integrály prvního a druhého druhu pro modul k: K resp. E, pro modul k': K' resp. E', obdržíme:

$$E\,(amt) = -\frac{E}{K}\,t + Z\,(t),\; snt = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H\,(t)}{\Theta\,(t)},$$

$$cnt = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H\,(t + K)}{\Theta\,(t)},\; dnt = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta\,(t + K)}{\Theta\,(t)},$$

$$Z\,(t) = \frac{\Theta'\,(t)}{\Theta\,(t)},\, i\,\Pi\,(t,\,i\,\psi) = i\,t\,Z\,(i\,\psi) + \frac{1}{2}\,i\,lg\,\frac{\Theta\,(t - i\,\psi)}{\Theta\,(t + i\,\psi)},$$

$$i\,Z\,(i\,\psi) = -\,tg\,am\,(\psi,\,k')\,.\,dn\,(\psi,\,k') + \frac{\pi\,\psi}{2\,K\,K'} + Z\,(\psi,\,k'),$$

tedy:

$$i\,\Pi\,(t,\,i\,\psi) = \frac{\pi\,\psi\,t}{2\,K\,K'} - t\;tg\;am\,(\psi,\,k')\;dn\,(\psi,\,k')$$

$$+ \frac{\Theta'\,(\psi,\,k')}{\Theta\,(\psi,\,k')}\,t + \frac{1}{2}\,i\;lg\,\frac{\Theta\,(t - i\,\psi)}{\Theta\,(t + i\,\psi)},$$

kde poslední výraz samozřejmě jest reelní. Můžeme tedy vyjádřiti φ ve funkci Θ o reelním parametru:

$$\varphi = (1 - k^2)\sqrt{\alpha - \beta}\left[\frac{E\,(amt)}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2}\,\frac{snt\;cnt}{dnt}\right]$$

$$- \frac{(c - k^2\beta)\sqrt{\alpha - \beta}}{c}\left[t + \frac{tg\;am\;i\,\psi}{dn\;i\,\psi}\,\Pi\,(t,\,i\,\psi)\right].$$

Budiž $b = 0$, pak i $c = 0$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{u + a^2 + m^2}{u\sqrt{-(u + a^2 + m^2)}}\,du.$$

Zde tedy je plocha reelní jen pro $a^2 < 0$, $u < -a^2 - m^2 > 0$

$$\varphi = 2\Big[\sqrt{-a^2 - m^2 - u}$$

$$- \sqrt{a^2 - m^2}\;l\,\frac{\sqrt{a^2 - m^2} - \sqrt{-a^2 - m^2 - u}}{u^{1/2}}\Big].$$

Budiž $m = 0$, t. j. budiž plocha rotační

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{u + a^2 - c}{\sqrt{u\,(c - u)\,(u + a^2 - c)}}\,\partial u.$$

V případě tomto jest $\alpha = c - a^2$, $\beta = 0$, tudíž potřebí jen v obecném výsledku dosaditi $\beta = 0$, $n = 0$ t. j. $\psi = 0$, a tím druhý integrál ve φ přejde v integrál prvního druhu t.

Je-li $c = 0$, $m = 0$,

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{u + a^2}{u\sqrt{-(u + a^2)}}\,du,$$

což jest možno jen pro plochy totální křivosti negativní.

$$\varphi = \frac{1}{2}\;arc\;sin\,\frac{u}{a} - a\;l\,\frac{a - \sqrt{a^2 - u}}{\sqrt{u}}.$$

Krátce se ještě zmíníme o případu, kdy v rovnici (1) $P = 0$, kterýžto se nedá odvoditi redukováním na případ totální křivosti konstantní. Rovnice (1) pak se dá psáti:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{a}=\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho^2\varphi'^2}{\sqrt{m^2+\varrho^2(1+\varphi'^2)}},$$

z čehož plyne

$$\frac{\varrho^2\varphi'}{\sqrt{m^2+\varrho^2+\varrho^2\varphi'^2}}=\frac{\varrho^2+ab}{a},$$

kde b opět integrační konstanta. Zavedeme-li

$$\varrho^2=\mu,$$

obdržíme

$$\varphi=\frac{1}{2}\int\frac{(\mu+ab)(\mu+m^2)}{\mu\sqrt{(\mu+m^2)[a^2\mu-(\mu+ab)^2]}}d\mu.$$

Faktor $\mu+m^2$ jest positivní, nemohou tedy opět pro realitu plochy vystupovati kořeny imaginární. Buďtež kořeny

$$(\mu+ab)^2-a^2\mu=0,\ \alpha,\ \beta,$$

při čemž možno vždy předpokládati $\alpha>\beta$. Případ $\alpha<0$, $\beta<0$ samozřejmě vyloučen, a poněvadž μ jest vždy positivní,

$$\alpha>\mu>\beta.$$

Případ tento spadá opět pod dřívější, při čemž nejmenší kořen jest $-m^2$. Redukujeme na tvar normální tak, aby si odpovídaly body rozvětvovací

$$\mu\ \ldots\ -m^2,\ \beta,\ \alpha,\ \infty$$

$$\omega\ \ldots\ \ \infty,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},$$

čemuž odpovídá substituce

$$\mu=\frac{\beta+m^2k^2\omega}{1-k^2\omega},\quad k^2=\frac{\alpha-\beta}{m^2+\alpha}.$$

Tedy

$$\varphi=\frac{1}{2}\frac{\beta+m^2}{\sqrt{\alpha+m^2}}\int\frac{\frac{1}{1-k^2\omega}+\frac{ab}{\beta+m^2k^2\omega}}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-k^2\omega)}}d\omega.$$

Poněvadž ω jest v mezích 0 — 1, zavedeme

$$\omega=\sin^2\vartheta$$

$$\varphi=\frac{m^2+\beta}{\sqrt{m^2+\alpha}}\int\frac{d\vartheta}{\Delta^3\vartheta}+\frac{ab(m^2+\beta)}{\sqrt{m^2+\alpha}}\int\frac{d\vartheta}{(\beta+m^2k^2\sin^2\vartheta)\Delta\vartheta}.$$

Klademe-li pro

$$n = \frac{m^2 k^2}{\beta} > 0, \quad n = -k^2 sn^2\, i\,\psi,$$

$$\varphi = \frac{m^2 + \beta}{\sqrt{m^2 + \alpha}} \left[\frac{E\,(amt)}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{snt\; cnt}{dnt} \right]$$

$$+ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \frac{m^2 + \beta}{\sqrt{m^2 + \alpha}} \left[t + \frac{tg\; am\; i\,\psi}{dn\; i\,\psi}\, \Pi\,(t, i\,\psi) \right],$$

což vše možno vyjádřiti opět funkcí Θ.

Je-li $b = 0$, jest $\alpha = a^2$, $\beta = 0$, tedy

$$\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{\mu + m^2}{\sqrt{(\mu + m^2)\, \mu\, (a^2 - \mu)}}\, d\mu.$$

Dlužno tedy ve výrazu hořejším pro φ dosaditi $\beta = 0$, $\alpha = a^2$, $n = \infty$, $\psi = K$.

$$\varphi = \sqrt{m^2 + a^2}\, \frac{E}{K}\, t - a\, \frac{H\,(t)\, H\,(t + K)}{\Theta\,(t)\, \Theta\,(t + K)} + \sqrt{a^2 + m^2}\, \frac{\Theta'\,(t)}{\Theta\,(t)}.$$

Pro plochy o střední křivosti nullové, t. j. pro minimální plochy šroubové jest $\frac{1}{a} = 0$

$$\varphi = b \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2}}\, d\varrho,$$

kde $\varrho > b$. Integrace se provede substitucí $\varrho^2 = \mu$.

$$\varphi = \frac{b}{2}\, lg\, \frac{\sqrt{\varrho^2 + m^2} + \sqrt{\varrho^2 - b^2}}{\sqrt{\varrho^2 + m^2} - \sqrt{\varrho^2 - b^2}}$$

$$+ m\; arc\; tg\, \frac{m}{b} \sqrt{\frac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2 + m^2}}.$$

Týž výsledek plyne též integrací rovnice pro plochy minimální, hledáme-li plochy v semipolárních souřadnicích z, ϱ, v tak, aby

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho\, \partial v} = 0.$$

Najdeme tak všechny plochy min. šroubové, jichž tvořící profil dán funkcí φ, a tedy z samo (Scherk: Bemerkungen über die kleinste Fläche etc.)

$$z = b\, lg\,(\sqrt{\varrho^2 + m^2} + \sqrt{\varrho^2 - b^2})$$

$$+ m\, arc\, tg \frac{m}{b} \sqrt{\frac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2 + m^2}} + mv + Const.,$$

a z toho plynou jako zvláštní případy rotační plocha řetězovky pro $m = 0$

$$z = b\, lg\,(\varrho + \sqrt{\varrho^2 - b^2}),$$

plocha to nalezena Meusnierem při otázce po min. plochách rotačních, a plocha šroubová pro $b = 0$

$$z = mv + Const.$$

Rotační plochy pro $m = 0$ skýtá

$$\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{(\mu + ab)\, d\mu}{\sqrt{\mu\,[a^2\mu - (\mu + ab)^2]}},$$

a tedy dlužno v obecném případě klásti jen $m = 0$:

$$\varphi = t\left(\frac{E}{K}\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right) + \sqrt{\alpha}\,\frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}$$

$$- \sqrt{\alpha - \beta}\,\frac{H(t)\,H(t+K)}{\Theta(t)\,\Theta(t+K)}.$$

Je-li též $b = 0$, jest

$$\varphi = \int \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} = -\sqrt{a^2 - \varrho^2} = z$$

neb

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. V Gaussově dopisu Enckeovi (*14*) *) jest vyslovena věta, že počet $F(x)$ prvočísel menších než x jest přibližně roven integrálu

$$\int_2^x \frac{dx}{log x}.$$

*) Tyto číslice vztahují se k seznamu citovaných spisů, jenž jest uveden na konci.