Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 39 (1910), No. 1, 25--35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123374

kleinste Fläche etc.)

$$z = b\, lg\, (\sqrt{\varrho^2 + m^2} + \sqrt{\varrho^2 - b^2})$$

$$+ m\, arc\, tg \frac{m}{b} \sqrt{\frac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2 + m^2}} + mv + Const.,$$

a z toho plynou jako zvláštní případy rotační plocha řetězovky pro $m = 0$

$$z = b\, lg\, (\varrho + \sqrt{\varrho^2 - b^2}),$$

plocha to nalezena Meusnierem při otázce po min. plochách rotačních, a plocha šroubová pro $b = 0$

$$z = mv + Const.$$

Rotační plochy pro $m = 0$ skýtá

$$\varphi = \frac{1}{2} \int \frac{(\mu + ab)\, d\mu}{\sqrt{\mu\, [a^2 \mu - (\mu + ab)^2]}},$$

a tedy dlužno v obecném případě klásti jen $m = 0$:

$$\varphi = t\left(\frac{E}{K}\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right) + \sqrt{\alpha}\, \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}$$

$$- \sqrt{\alpha - \beta}\, \frac{H(t)\, H(t + K)}{\Theta(t)\, \Theta(t + K)}.$$

Je-li též $b = 0$, jest

$$\varphi = \int \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} = - \sqrt{a^2 - \varrho^2} = z$$

neb $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

1. V Gaussově dopisu Enckeovi (*14*) *) jest vyslovena věta, že počet $F(x)$ prvočísel menších než x jest přibližně roven integrálu

$$\int_2^x \frac{dx}{logx}.$$

---

*) Tyto číslice vztahují se k seznamu citovaných spisů, jenž jest uveden na konci.

Jako doklad připojuje Gauss tabulku obsahující hodnoty tohoto integrálu a funkce $F(x)$ (na základě tabulek *3* a *8*) do $x = 3{,}00.000$.

Dle jedné poznámky Dirichletovy (*10*) zabýval se prý již dříve Dirichlet důkazem oné věty, ale jeho důkaz není znám.

První práce, která obsahuje analytický důkaz o souvislosti funkce $F(x)$ s Gaussovým integrálem, pochází od Čebyševa (*67*, r 1848) Zde je dokázáno několik vět o funkci $F(x)$, které do jisté míry potvrzují Gaussovu větu.

V Čebyševově směru bylo později pokračováno a též mnohými jinými způsoby vyhledávány formule pro funkci $F(x)$.

Nejdůležitější resultáty v tomto oboru podává theorie Riemannova.

2. Riemann uveřejnil r. 1859 (*61*) objev podstatně nový. Odvodil totiž rovnici (43), která vyjadřuje *přesně* funkci $f(x)$, definovanou rovnicí

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots$$

Na pravé straně rovnice (43) vyskytuje se nekonečná řada integrallogarithmů, jichž argumenty závisí na nullových bodech jisté transcendentní celistvé funkce $\xi(t)$.

Důkaz řečené rovnice udává Riemann ve formě velice stručné a neúplné. Kratičké pojednání (*61*) bylo podnětem k velikým pracím, které vyplnily mezery původního důkazu tak, že nyní jest „Riemannova formule" (43) dokázána zcela přesně. Theorie funkce $F(x)$ jest obsažena v Riemannově formuli, z které se podařilo odvoditi některé důsledky; dále pokročiti v theorii funkce $F(x)$ bude možno, až se podaří blíže vyšetřiti nullové body funkce $\xi(t)$ (dle Hilberta (*27*) jest to jeden z hlavních problémů budoucí mathematiky).

V následujícím podávám referát o této theorii. Postup jest celkem týž jako v Riemannově originálním pojednání; kde jsou v jeho důkazech mezery, jak byly později odstraněny a co nového bylo k Riemannově theorii připojeno, jest na příslušných místech poznamenáno.

Funkce $\zeta(s)$ a $\xi(t)$.

3. Základem výpočtů Čebyševových i Riemannových jest t. zv. Eulerova rovnice (*11*)

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

ve které se vztahuje součin na všechna prvočísla od *2* počínaje (jednička se za prvočíslo nepovažuje); s jest komplexní číslo, jehož reální část jest větší než *1* (jinak by ani řada ani součin nebyly konvergentní). Řada jest (absolutně) konvergentní; konvergence (absolutní) součinu jest patrná, píšeme-li obecný člen v tvaru

$$1+\frac{1}{p^s-1}.$$

Důkaz napsané rovnice obdržíme snadno rozvinouce každý činitel součinu v geometrickou řadu; znásobíme-li pak v takto upraveném součinu

$$\prod_p \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right)$$

všechny nekonečné řady, obdržíme právě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

4. Funkce $\zeta(s)$ komplexní proměnné s definovaná rovnicí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \tag{1}$$

toliko pro hodnoty s, jejichž reální část jest větší než 1, existuje též pro hodnoty s, jichž reální část jest menší než 1. Aby to dokázal, zavádí Riemann v známé rovnici

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1}\, dx$$

(ve které se předpokládá r. č. $s > 1$) novou integrační proměnnou x' substitucí $x = n^2\pi x'$, $dx = n^2\pi\, dx'$ (n.. celé číslo); vychází

$$\frac{1}{n^s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}\, dx.$$

Napíšeme-li tuto rovnici pro $n = 1, 2, 3 \ldots$ a sečteme-li nekonečnou řadu takto vzniklých rovnic, vychází

$$\zeta(s)\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx, \tag{2}$$

kdež jest položeno

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}.$$

Z nauky o lineární transformaci funkcí theta jest známa rovnice

$$2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right), \tag{3}$$

kterou již dříve, než Jacobi soustavně zpracoval theorii eliptických funkcí, dokázali Cauchy (*7*) a Poisson (*60*). Derivace této rovnice dává

$$2\psi'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) - 2\psi'\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{5}{2}};$$

pro $x = 1$ obdržíme relaci

$$4\psi'(1) + \psi(1) = -\frac{1}{2}, \tag{4}$$

která spolu s rovnicí (3) bude sloužiti k transformaci integrálu (2).

Rozdělíme-li tento integrál na dva, z nichž jeden má meze $0, 1$ a druhý meze $1, \infty$, a dosadíme-li v druhém za funkci $\psi(x)$ výraz plynoucí z rovnice (3), vychází

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}} dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx.$$

Zavede-li se v druhém integrálu nová integrační proměnná x' rovnicí

$$x' = \frac{1}{x},\ dx = -\frac{dx'}{x'^2},$$

vychází $\left(\text{ježto třetí integrál dává } \frac{2}{s(s-1)}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\frac{1}{(s-1)s}$$
$$+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dx. \tag{5}$$

5. Násobme tuto rovnici výrazem $\frac{(s-1)s}{2}$; zavedouce novou proměnnou t rovnicí

$$s=\frac{1}{2}+ti,\quad t=\frac{i}{2}-is, \tag{6}$$

a tedy

$$x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}=x^{-\frac{3}{4}}\left(e^{i\frac{t}{2}\log x}+e^{-i\frac{t}{2}\log x}\right)$$
$$=2x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)$$

obdržíme dva výrazy pro Riemannovu funkci $\xi(t)$:

$$\xi(t)=\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{(s-1)s}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s), \tag{7}$$

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty\psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)dz. \tag{8}$$

Funkce

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}$$

stává se pro x nekonečně veliké nekonečně malou veličinou aspoň jako $e^{-\pi x}$; to vyplývá ze srovnání řady $\psi(x)$ s řadou

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-n\pi x}=\frac{1}{e^{\pi x}-1},$$

jež pro $x>1$ (tedy pro hodnoty v integračním intervallu integrálu (8)) má všecky členy, druhým počínaje, větší, než jsou stejnolehlé členy v řadě $\psi(x)$.

Integrál (8) má tedy smysl pro každou komplexní hodnotu proměnné t, t. j. $\xi(t)$ *jest celistvá transcendentní funkce* proměnné t. Poněvadž s a t souvisí lineárním vztahem (6), jest též pravá strana rovnice (7) celistvou transcendentní funkcí proměnné s. Tato rovnice psána ve tvaru

$$(s-1)\,\zeta(s)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}\,\xi(t)}{\frac{s}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \tag{9}$$

obsahuje definici funkce $\zeta(s)$ pro *všechny komplexní hodnoty* proměnné s.

Z theorie funkce gamma jest známo, že

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

jest celistvá funkce proměnné s, a že

$$\lim_{s=0}\frac{s}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=1. \tag{10}$$

Pravá strana rovnice (9) jest tedy číslo konečné pro každou konečnou hodnotu komplexní proměnné s, jinými slovy: funkce $\zeta(s)$, definovaná původně rovnicí (1) toliko pro hodnoty s s reální částí větší než 1, jest v celé rovině jednoznačná a konečná až na bod $s=1$, kde má pól prvního řádu.

Z rovnice (8) následuje, že

$$\xi\left(\pm\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}. \tag{11}$$

Je-li $t=\frac{i}{2}$, resp. $-\frac{i}{2}$, jest $s=0$, resp. 1. Z rovnice (9) obdržíme pro $t=\frac{i}{2}$ vzhledem k (10)

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2} \tag{12}$$

a pro

$$t=-\frac{i}{2}$$

$$\lim_{s=1}(s-1)\,\zeta(s)=\frac{\xi\left(-\frac{i}{2}\right)\,.\,2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=1,$$

poněvadž

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Residuum funkce $\zeta(s)$ v pólu $s = 1$ rovná se 1; jest tedy

$$\zeta(s+1) = \frac{1}{s} + P(s), \tag{13}$$

je-li $P(s)$ potenční řada konvergentní pro každé s.

6. Hermite (*26*, lettre 73; *25*) podal jednoduchý důkaz o existenci rozvoje (13):

Zavedeme-li do integrálu

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \, dx$$

novou integrační proměnnou x' rovnicí

$$x = nx', \; dx = n \, dx' \; (n \text{ celé číslo}),$$

vychází

$$\frac{1}{n^{s+1}} \cdot \Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-nx} x^s \, dx.$$

Součet nekonečné řady rovnic, jež obdržíme kladouce v této $n = 1, 2, 3 \ldots$, dává

$$\zeta(s+1)\,\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \, dx$$

aneb

$$\begin{aligned} \zeta(s+1) &= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty \frac{x^s \, dx}{e^x - 1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left(\int_0^1 \frac{x^s \, dx}{e^x - 1} + \int_1^\infty \frac{x^s \, dx}{e^x - 1} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Druhý integrál v závorce jest konečný pro každou hodnotu komplexní proměnné s; v integračním intervallu prvého integrálu platí známý rozvoj

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+B_1\frac{x}{2!}-B_2\frac{x^3}{4!}+\dots{}^{*)}, \tag{15}$$

ve kterém $B_1, B_2 \dots$ značí čísla Bernoulliova.

Z toho následuje integrací

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^s\,dx}{e^x-1}&=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}+\frac{B_1}{1.2\,(s+2)}\\&\quad-\frac{B_2}{1.2.3.4.(s+4)}+\dots\end{aligned} \tag{16}$$

Pravá strana této rovnice jest řada konvergentní pro každé s až na body $s=0, -1, -2, -3\dots$ a představuje analytickou funkci proměnné s, mající v těchto bodech póly prvého řádu; jiných singulárních bodů tato funkce v konečnu nemá. Avšak celistvá funkce

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}$$

má nullové body prvního řádu pro $s=-1, -2, -3\dots$, tedy funkce

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}+\frac{B_1}{1.2\,(s+2)}-\dots\right)$$

nemá v konečnu jiný singulární bod než pól 1. řádu $s=0$; residuum jest patrně $=1$.

7. Stieltjes (*26*, lettre 75) vypočítal obecné vzorce pro koëfficienty řady $P(s)$, jež se vyskytuje v rovnici (13). Výpočet Stieltjesův jest velmi zajímavý pro zvláštnost methody. Uvádím zde toliko výsledek a připojuji důkaz o konvergenci.

Dle Stieltjesa jest

$$\zeta(s)=\frac{1}{s}+C+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{C_n}{n!}s^n, \tag{17}$$

---

*) Rozvoj ten platí vůbec, je-li $|x|<2\pi$.

$$C = \lim_{r=\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r} - \log(r+1)\right],$$

$$C_n = \lim_{r=\infty}\left[\frac{(\log 2)^n}{2} + \frac{(\log 3)^n}{3} + \ldots + \frac{(\log r)^n}{r} - \frac{(\log(r+1))^{n+1}}{n+1}\right]. \tag{18}$$

Důkaz, že řada (17) jest konvergentní pro každou komplexní hodnotu proměnné s, lze vésti takto:

Budiž r celé číslo větší než 2 a n celé číslo ne menší než 1. Funkce

$$\frac{(\log k)^n}{k}$$

reální proměnné k ubývá v intervallu $2 \ldots r$, pročež platí nerovnosti

$$\int_2^{r+1} \frac{(\log k)^n}{k}\,dk < \sum_{k=2}^{r} \frac{(\log k)^n}{k} < \frac{(\log 2)^n}{2} + \int_2^{r+1} \frac{(\log k)^n}{k}\,dk.$$

Poněvadž

$$\int_2^{r+1} \frac{(\log k)^n}{k}\,dk = \frac{(\log(r+1))^{n+1}}{n+1} - \frac{(\log 2)^{n+1}}{n+1},$$

jsou předchozí nerovnosti equivalentní s nerovnostmi

$$-\frac{(\log 2)^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=2}^{r} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log(r+1))^{n+1}}{n+1} < \frac{(\log 2)^n}{2} - \frac{(\log 2)^{n+1}}{n+1}.$$

Z toho vyplývá, že číslo

$$C_n = \lim_{r=\infty}\left[\sum_{k=2}^{r} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log(r+1))^{n+1}}{n+1}\right]$$

jest obsaženo v intervallu

$$-\frac{(\log 2)^{n+1}}{n+1} \ldots \frac{(\log 2)^n}{2},$$

t. j. konverguje k nulle pro $\lim n = \infty$, ježto $\log 2 < 1$. Koëfficienty v řadě (17) jsou tedy co do absolutní hodnoty menší než stejnolehlé koëfficienty v řadě exponenciální.

Stieltjes (*26*, lettre 77) a Jensen (*29*) zabývali se jinými podobnými rozvoji funkce $\zeta(s)$.

8. Ke konci této kapitoly o funkcích $\zeta(s)$ a $\xi(t)$ uvádím ještě dvě transformace, které pocházejí od Riemanna a vztahují se na vzorce (14) a (8).

Vzorec (14) psaný v tvaru

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \tag{14'}$$

udává $\zeta(s)$ toliko v tom případě, že reální část veličiny s jest větší než 1.

Aby obdržel výraz platný pro celou rovinu, uvažuje Riemann integrál

$$\int_C \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\, dx,$$

vzatý podél čáry C, která jde těsně nad reální osou z nekonečna k bodu $x = 0$, obchází malým obloukem tento bod tak, aby zůstal stále po levé straně a jde pak zpět do $+\infty$ těsně pod reální osou. Čarou C se tedy vyjímá z roviny x úzký pruh, jenž obsahuje kladnou část reální osy a z bodů nespojitosti integrované funkce toliko bod $x = 0$.

Mnohoznačná funkce proměnné x

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\,log\,(-x)}$$

budiž tak determinována, aby $log\,(-x)$ byl reální pro reální záporné hodnoty x; tedy

$$log\,(-x) = log \mid x \mid + i\,(\psi - \pi),$$

značí-li $log \mid x \mid$ na pravé straně reální logarithmus v smyslu arithmetickém, a je-li

$$x = \mid x \mid e^{\psi i}, \quad 0 \leqq \psi < 2\pi.$$

Za těchto supposic má výraz

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\,log \mid x \mid + (s-1)\,(i\psi - i\pi)}$$

těsně nad kladnou reální osou, t. j. pro $lim\,\psi = 0$ hodnotu

$$e^{(s-1)\,log\,x - (s-1)\pi i} = x^{s-1}\, e^{-(s-1)\,\pi i} \tag{a}$$

a těsně pod kladnou reální osou, t. j. pro $\lim \psi = 2\pi$ hodnotu

$$e^{(s-1)\log x + (s-1)\pi i} = x^{s-1}\, e^{(s-1)\pi i}; \qquad (b)$$

v obou posledních vzorcích jakož i dále definujeme

$$x^{s-1} = e^{(s-1)\log x}, \ \log x \text{ reální.}$$

Část integrálu podél malého oblouku kolem $x = 0$ konverguje k nulle, stávají-li se rozměry oblouku nekonečně malé, a jest tedy dovoleno integrál původně podél křivky C vzatý nahraditi dvěma integrály, z nichž první jde z $x = +\infty$ do $x = 0$ s determinací (a) a druhý z $x = 0$ do $x = \infty$ s determinací (b), tedy

$$\int\limits_C \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \int\limits_\infty^0 \frac{x^{s-1} e^{-(s-1)\pi i}}{e^x - 1}\, dx + \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{(s-1)\pi i}}{e^x - 1}\, dx$$

$$= -\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx\, (e^{s\pi i} - e^{-s\pi i})$$

$$= 2i \sin s\pi \int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Na pravé straně vyskytuje se tentýž integrál jako v rovnici (14') pro $\zeta(s)$ na počátku tohoto odstavce uvedené; eliminujíce jej, obdržíme rovnici

$$\zeta(s) = \frac{i}{2\Gamma(s)\sin s\pi} \int\limits_C \frac{(-x)^{s-1}\, dx}{e^x - 1}, \qquad (19)$$

která poskytuje definici funkce $\zeta(s)$ pro libovolnou hodnotu komplexní proměnné s, neboť integrál nepozbývá významu pro žádnou konečnou hodnotu parametru s. (Pokračování.)

Věta o trojúhelníku.

Dr. K. Zahradník.

Dán budiž trojúhelník, jehož strany jsou a, b, c. Průseky přímky p se stranami buďtež $p \mid a = A$, $p \mid b = B$, $p \mid c = C$.

Uvažme vždy dva průseky na př. A, B. Veďme rovnoběžku a_b bodem A ku straně b trojúhelníka a podobně rovnoběžku b_a bodem B ku straně a. Průsek těch rovnoběžek budiž