Literatura

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, D207--D222

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123401

LITERATURA.

A. Recense vědeckých publikací.

Eduard Čech: Bodové množiny, část první. S dodatkem: O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné od **Vojtěcha Jarníka.** Knihovna spisů matematických a fysikálních, sv. 18. 1936. VIII, 275 str. Nákladem JČMF. Kč 68,—.

Tuto knihu považuji za mezník v české matematické literatuře, protože předně je to prvé české knižní dílo věnované úplně množinám, a to partiím jak pro další množinové studie tak pro aplikace nejdůležitějším, a protože za druhé je napsána tak, že svou logickou stavbou a propracovaností nejenom předčí všecky mně známé cizí knihy o týchž tématech, nýbrž že u čtenáře nadaného zálibou v abstraktním myšlení vzbudí, po případě zvýší pochopení a zájem pro množinový směr v matematice.

Pokusím se odůvodnit tato tvrzení tím, že povím něco o významu teorie množin, o obsahu této knihy a o způsobu, jakým je psána.

Pojmy (operace) a věty teorie množin jsou tak obecné, že se s ní setká konec konců každý matematik, který uvažuje o fundamentech svého specielního oboru; o tom svědčí také název „Fundamenta mathematicae" časopisu, který vychází od r. 1920 ve Varšavě a je věnován výhradně teorii množin a těm partiím matematiky (i logiky), které s ní úzce souvisí. Teorie reálných funkcí a topologie jsou s teorií množin spjaty tak, že je někdy věcí vkusu řadit větu nebo problém sem nebo tam. Tyto dva obory zatím nejvíc prokázaly plodnost a účinnost teorie množin. Ale teorie množin vnikla i do jiných partií analyse a geometrie, vnikla do algebry, do počtu pravděpodobnosti, do matematické fysiky; za zvláště bohatý rozvoj jí vděčí funkcionální analysa. A všude, kam zasáhla, se už udržela, protože přináší zdravý směr od kalkulu k idei, od chaosu speciálních výsledků k harmonii obecných teorémů, od zátěže vlastností pro jádro problému nepodstatných k ekonomii, pronikavosti a kráse abstraktního pojetí.

Obsah knihy je rozdělen na 4 kapitoly a dodatek. Kapitoly jsou rozděleny na paragrafy, na jejichž konci je vždy řada cvičení. Nehledě k dodatku kniha se rozpadá zřetelně na 3 části: úvod (kap. I), teorii metrického prostoru (kap. II a III) a teorii míry (kap. IV).

Úvod.[1]) Zde se probírají množinové operace, zobrazení a uspořádání.

[1]) Abych byl srozumitelný i čtenáři, který není s množinami obeznámen, uvádím toto: *Množina* je souhrn nějakých věcí. Je-li A množina a a věc, pak $a \in A$ (čti: a je *prvek* množiny A) značí, že věc a je v A. $\emptyset$ (čti: *prázdná* množina) je taková množina, která nemá žádných prvků. (a) značí množinu sestávající z jediného prvku, a to a. Jsou-li A, B množiny, pak značí: $A = B$, že A, B, jsou táž množina; $A \subset B$ (čti: A je *část* množiny B), že každý prvek množiny A je v B; $A + B$ (čti: *součet* množin A, B) množinu všech věcí, které jsou buď v A nebo v B (čtenář si domyslí vý-

Mimo to se zavádějí dvě logické operace, kterých se v celé knize užívá na prospěch zřetelnosti a stručnosti: *Prvá*: Jsou-li **A**, **B** dva výroky, pak **A** $\Rightarrow$ **B** značí, že z výroku **A** plyne **B**. (Na př. definice funkce f s konečnou variací v oboru $[\alpha, \beta]$ se dá vyslovit takto: při vhodném μ, $0 < \mu < +\infty$, platí:

$$\alpha \leqq a_1 < b_1 \leqq \ldots \leqq a_m < b_m \leqq \beta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{m} [f(a_i) - f(b_i)] \right| < \mu.$$

Druhá: Je-li předmětem úvah pevná množina P a je-li $\mathbf{V}(x)$ výrok mající smysl pro $x \in P$, pak $\underset{x}{\mathrm{E}}[\mathbf{V}(x)]$ značí množinu všech $x \in P$, pro něž $\mathbf{V}(x)$ je správný. (Na př. značí-li **R** množinu všech reálných čísel rozmnoženou o $\pm\infty$ a je-li **R** tou množinou P, pak při $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$ různé druhy intervalů se dají zapsat takto:

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\alpha < x < \beta],\ \underset{x}{\mathrm{E}}[\alpha < x \leqq \beta],\ \underset{x}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq x < \beta],\ \underset{x}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq x \leqq \beta].)$$

Z množinových operací uvádím *kartézský součin* $A \times B$ množin A, B, t. j. množinu všech párů (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$ (čtenář si domyslí, co značí $A_1 \times \ldots \times A_m$), který je silně zdůrazněn v celé knize a hraje v teorii míry fundamentální roli. (Na př. značí-li $\mathbf{E}_m$ m-rozměrný euklidovský prostor, je $\mathbf{E}_{m+1} = \mathbf{E}_m \times \mathbf{E}_1$.) Užití kartézského součinu ukáži na dvou věcech z úvodu: na definici *zobrazení* a na *cyklickém uspořádání*; paragraf o cyklickém uspořádání patří ke skvělým místům knihy a prozrazuje mistra syntetického úsudku.

Zobrazení množiny A do množiny B je část f kartézského součinu $A \times B$ taková, že ke každému $a \in A$ existuje přesně jeden $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$; tento b se značí $f(a)$; je-li $M \subset A$, pak průnik množin f a $M \times B$ se značí f_M a nazývá se *parciálním* zobrazením (tedy znak $f_M(a)$ nemá smyslu pro $a \in A - M$ a značí $f(a)$ pro $a \in M$).[2])

---

znam znaků $\sum_{n=1}^{m} A_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$); AB (čti: *průnik*) množinu všech věcí, které jsou jak v A tak v B (čtenář si domyslí význam znaků $\prod_{n=1}^{m} A_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$); $A - B$ (čti: *rozdíl*) množinu všech věcí, které jsou v A, ale nikoli v B. Že množiny A, B jsou *disjunktní*, značí, že $AB = \emptyset$. *Systém* je souhrn nějakých množin. Že množina M je *konečný* resp. *spočetný* (*disjunktní*) součet množin systému $\mathfrak{A}$, značí, že $M = \sum_{n=1}^{m} A_n$ resp. $M = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou (navzájem disjunktní) množiny systému $\mathfrak{A}$; čtenář si domyslí, co značí konečný nebo spočetný průnik množin systému $\mathfrak{A}$. — Názvu *bodové množiny* se užívá pro části takové množiny, která z toho neb onoho důvodu se nazve *prostorem* a jejímž prvkům se potom říká *body*. A právě úvahy o metrickém prostoru a míře jsou takové dva případy, kde základní množina úvah se nazývá prostor.

[2]) Podle této definice neexistuje zobrazení neprázdné množiny do prázdné množiny a zobrazení prázdné množiny do každé množiny je prázdná množina. Jestliže však každému prvku a množiny $A \neq \emptyset$ se přiřadí přesně jeden prvek $f(a)$ neprázdné množiny B, pak množina φ všech párů $[a, f(a)]$, kde $a \in A$, je ovšem zobrazením množiny A do B a může se značit f, protože $\varphi(a) = f(a)$ pro $a \in A$.

Cyklické uspořádání. Pro každou trojici (a, b, c) bodů dané kružnice nechť $(a, b, c)+$ značí, že $a \neq b \neq c \neq a$ a že a, b, c jdou po sobě v kladném smyslu. Pak platí: 1. $(a, b, c)+ \Rightarrow (b, c, a)+$; 2. nikdy není současně $(a, b, c)+$ i $(b, a, c)+$; 3. není-li ani $(a, b, c)+$ ani $(b, a, c)+$, pak není $a \neq b \neq c \neq a$; 4. $(a, b, c)+$, $(a, c, d)+ \Rightarrow (a, b, d)+$. — To, že množina všech trojic (a, b, c) bodů kružnice P takových, že je $(a, b, c)+$, je částí kartézského součinu $P \times P \times P$, a důsledky 1.—4. orientace kružnice jsou motivem těchto abstraktních definic: *cyklické uspořádání* (jakékoliv) množiny P je taková část $\mathbf{C}$ kartézského součinu $P \times P \times P$, že platí 1.—4., píše-li se tam $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ místo $(x, y, z)+$; jsou-li dále a, b různé prvky a $\mathbf{C}$ cyklické uspořádání množiny P, pak $J_{P,\mathbf{C}}(a, b) = J(a, b)$ (čti: *interval* množiny P při cyklickém uspořádání $\mathbf{C}$ s *počátkem* a a *koncem* b) značí $\mathrm{E}[(a, x, b) \in \mathbf{C}]$[3]); je-li konečně $\mathbf{C}$ cyklické uspořádání množiny P, pak $\mathbf{C}^*$ značí množinu všech $(a, b, c) \in P \times P \times P$ takových, že $(c, b, a) \in \mathbf{C}$. Dá se dokázat, že také $\mathbf{C}^*$ je cyklické uspořádání množiny P a že $\mathbf{C}^{**} = \mathbf{C}$; říká se, že $\mathbf{C}^*$ je *inversní* k $\mathbf{C}$ a že $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^*$ jsou *navzájem inversní.*[4]) — Abych ukázal vhodnost autorovy definice cyklického uspořádání, uvedu ještě následující větu, kterou končí I. kap.:

Předpoklad: Každému páru (a, b) různých prvků množiny P, mající aspoň 3 prvky, jsou přiřazeny její disjunktní části $P'_{a,b}$, $P''_{a,b}$, z nichž žádná neobsahuje ani a ani b, tak, že platí: 1. $P'_{b,a}$, $P''_{b,a}$ se liší od $P'_{a,b}$, $P''_{a,b}$ nejvýš pořadím; 2. $(a) + (b) + P'_{a,b} + P''_{a,b} = P$; 3. je-li $c \in P'_{a,b}$, pak z množin $P'_{a,c}$[5]), $P''_{a,c}$ lze zvolit množinu C' a z množin $P'_{c,b}$, $P''_{c,b}$ množinu C'' tak, že $P'_{a,b} = (c) + C' + C''$, při čemž součet je disjunktní.

Závěr: Existují právě dvě cyklická uspořádání množiny P taková, že pro každý pár (a, b) různých jejích prvků se intervaly $J(a, b)$, $J(b, a)$ liší nejvýš pořadím od $P'_{a,b}$, $P''_{a,b}$; a tato dvě cyklická uspořádání jsou navzájem inversní.

Smysl této věty je tento: Velmi obecný předpoklad se dá realisovat oblouky kružnice (bez koncových bodů) a závěr praví, že je to „v podstatě" jediná možná realisace. K tomu podotýkám, že promyšlení důkazu této věty, jehož obtíže jsou pouze logické, je výborným logickým cvičením a ovšem požitkem.

V úvodu na zobrazení navazují výklady o spočetných množinách a paragrafu o cyklickém uspořádání předchází paragraf o uspořádaných množinách, ve kterém je podáno m. j. abstraktní jádro Dedekindovy teorie iracionálních čísel.

Z obvyklých partií abstraktní teorie množin chybějí v úvodu dobré uspořádání[6]) a transfinitní čísla; o těchto věcech se však český čtenář může velmi dobře poučit z Jarníkova *Úvodu do teorie množství*, který tvoří dodatek k Petrovu *Počtu integrálnímu.*[7]) S tím souvisí, že kniha

[3]) Když P je kružnice a $(x, y, z) \in \mathbf{C}$ značí $(x, y, z)+$, pak $J_{P,\mathbf{C}}(a, b)$ je určitý z obou oblouků (bez koncových bodů), v něž body a, b roztínají kružnici P.

[4]) Za předpokladů v pozn. [3]) $(x, y, z) \in \mathbf{C}^*$ značí, že x, y, z jdou po sobě v záporném smyslu.

[5]) Protože v $P'_{a,b}$ není ani a ani b, je $a \neq c \neq b$.

[6]) Ale definice dobrého uspořádání nechybí.

[7]) Tento Jarníkův Úvod z r. 1931, bezvadný po stránce věcné a velmi ohleduplný k začátečníkovi, je prvou českou učebnicovou statí o teorii množin. Důkaz Zermelovy věty o dobrém uspořádání nenalezne sice český čtenář ani zde, ale za to o definici transfinitní indukcí se tu poučí dokonaleji než ve všech mi známých učebnicích o teorii množin.

neobsahuje teorie Borelových a analytických množin ani teorie Baireových funkcí. Ale o množinách prvé aditivní a prvé multiplikativní Borelovy třídy (t. j. o množinách F_σ a G_δ), jakož i o funkcích první Baireovy třídy najde čtenář všecky potřebné věci v kap. II, §§ 13—14, a na příslušných místech kap. III. Nedostatek dobrého uspořádání a transfinitních čísel v knize je ostatně užitečný pro přehled toho, co se dá z obvyklého obsahu teorie metrického prostoru podat bez těchto prostředků.[8])

Metrický prostor. K definici metrického prostoru se dospěje takto: Zobrazení množiny A do B se nazývá *funkce* resp. *konečná funkce* v oboru A, když B je R resp. E_1 (viz shora). *Metrika* v množině P je konečná funkce ϱ v oboru $P \times P$ taková, že platí: 1. $\varrho(x, x) = 0$; $x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > 0$; 2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$; 3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$. Množina P se nazývá *metrický prostor*, když byla zvolena metrika v P. Je-li P metrický prostor s metrikou ϱ a je-li $A \subset P$, pak výrok, že množina A je *vnořena* do P, znamená, že v A byla za metriku zvolena parciální funkce $\varrho_{A \times A}$. Je-li P resp. Q metrický prostor s metrikou ϱ resp. σ, pak výrok, že prostor P je *vnořen* do Q, znamená, že je $P \subset Q$ a že $\varrho = \sigma_{P \times P}$ (takže $x \in P$, $y \in P \Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho(x, y) = \sigma(x, y)$).

Důležitými příklady metrického prostoru jsou: 1. E_m (viz shora) s metrikou $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$; H (čti: *Hilbertův* prostor), t. j. množina všech takových posloupností $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ reálných čísel, pro které konverguje $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, s metrikou $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$; U (čti: *Urysohnův* prostor), t. j. množina všech těch $x \in \mathsf{H}$, pro něž je $| x_i | \leqq \frac{1}{i}$ při $i = 1, 2, \ldots$, vnořená do H.

Výklady o metrickém prostoru jsou rozděleny na kap. II (obecné metrické prostory) a III (speciální metrické prostory).

Obsah kap. II je nezbytný pro každého, kdo chce hlouběji vniknout do dnešní analysy, a jest užitečným „názorným“ podkladem pro abstraktnější hledisko *topologické*; viz k tomu Čechův referát o Kuratowského Topologii v 65. roč. Časopisu, str. D 184 n. Z pojmů zde probíraných uvedu především *homeomorfii*. K tomuto pojmu se dospěje takto: Budiž f zobrazení množiny A do množiny B takové, že ke každému $b \in B$ existuje přesně jeden $a \in A$ tak, že $(a, b) \in f$; pak f se nazývá *prosté* zobrazení množiny A *na* množinu B. Z této definice vyplývá: je-li f prosté zobrazení množiny A na B, pak množina všech párů (b, a), kde $(a, b) \in f$, je prosté zobrazení množiny B na A; toto nové zobrazení se značí f_{-1} (čti: zobrazení *inversní* k f). Zřejmě inversní zobrazení k f_{-1} je f. Budiž f opět zobrazení množiny A do B, ale tentokrát nechť A resp. B je metrický prostor s metrikou ϱ resp. σ; pak f se nazývá *spojité*, když platí: $\lim_{n=\infty} \varrho(x_n, x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{n=\infty} \sigma[f(x_n), f(x)] = 0$. A nyní: prosté zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q se nazývá *homeomorfní*, když jak f tak f_{-1} je spojité. Zřejmě je oprávněna definice: dva metrické prostory se nazývají

[8]) Na př. bylo nutno v teorii separabilního prostoru vypustit důkaz věty, že v separabilním prostoru ke každému $\delta > 0$ existuje spočetná bodová δ-síť (sr. F. Hausdorff, Mengenlehre (1927), str. 126).

homeomorfní, když existuje homeomorfní zobrazení jednoho na druhý.[9]) Je velkou předností knihy, že u všech pojmů zaváděných v kap. II a III se poznamenává, zda jsou či nejsou *topologickou* vlastností uvažovaného metrického prostoru, t. j. takovou, že nepomine, nahradí-li se uvažovaný metrický prostor homeomorfním; tím se čtenář připravuje na obecnější stanovisko *topologické* (viz shora).[10])

Uvedu ještě tyto pojmy z II. kap. Budiž P metrický prostor s metrikou ϱ. Pro $a \in P$ a $r > 0$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varrho(a, x) < r]$ se značí $\Omega_P(a, r)$ (čti: *sférické okolí* (v P) bodu a s *poloměrem* r).[11]) Budiž $A \subset P$. Pak A se nazývá: 1. *otevřená* (v P), když pro $a \in A$ je $\Omega_P(a, r) \subset A$ při vhodném r [12]); 2. $\mathbf{G}_\delta(P)$, když je spočetným průnikem otevřených množin[13]); 3. *řídká* (v P), když částí každého sférického okolí je takové sférické okolí O, že $AO = \emptyset$ [14]); 4. *první kategorie* (v P), když je spočetným součtem řídkých množin[15]).

V kap. III je po paragrafu věnováno prostoru úplnému, separabilnímu a kompaktnímu.

Z paragrafu o *úplném* prostoru zmiňuji se o pečlivém provedení konstrukce *úplného obalu* a důkazu *Lavrentěvovy věty*. Metrický prostor P s metrikou ϱ se nazývá *úplný*, když platí: je-li $\{x_n\}$ posloupnost bodů z P té vlastnosti, že pro $\varepsilon > 0$ existuje takový index p, že $m > p, n > p \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$ (*Cauchyova* podmínka), pak při vhodném $x \in P$ je $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(x_m, x) = 0$.[16]) Na základě této definice se rozumí *úplným obalem* metrického prostoru P úplný metrický prostor Q těchto vlastností: 1. P je vnořen do Q; 2. ke každému $x \in Q$ existuje taková posloupnost $\{x_n\}$ bodů z P, že $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, kde ϱ je metrika v Q. — Metrický prostor se nazývá *absolutní* $\mathbf{G}_\delta$, když je $\mathbf{G}_\delta(Q)$ pro každý Q, do něhož je vnořen. S tímto pojmem praví

[9]) Na př. kružnice a obvod čtverce, vnořeny do $\mathbf{E}_2$, jsou homeomorfní metrické prostory.

[10]) Mimo to se u topologických vlastností částí metrického prostoru poznamenává, zda ty vlastnosti závisí pouze na „tvaru" té části či na její „poloze" v metrickém prostoru; tím se autor dotýká principielního dělítka v topologické problematice. S tím souvisí tato zdařilá autorova terminologie: na př. německá literatura má proti dvojici termínů insichdicht — dicht dvojici separiert — nirgendsdicht; autor má místo toho dvojice: hustě rozložený — hustý a řídce rozložený — řídký.

[11]) Na př. pro $P = \mathbf{E}_3$ je $\Omega_P(a, r)$ koule o středu a a poloměru r bez povrchu.

[12]) Na př. sférické okolí je otevřená množina.

[13]) Na př. pro $a \in P$ množina (a) je $\mathbf{G}_\delta(P)$ podle $(a) = \prod\limits_{n=}^{\infty} \Omega_P\left(a, \frac{1}{n}\right)$.

[14]) Na př. rovina je řídká v $\mathbf{E}_3$ nebo pro $n = 1, 2, \ldots$ množina Z_n všech $\frac{m}{n}$, m celé, je řídká v $\mathbf{E}_1$.

[15]) Na př. množina všech racionálních čísel je první kategorie v $\mathbf{E}_1$, neboť podle pozn. [14]) je to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$.

[16]) Na př. $\mathbf{E}_1$ je úplný, ale množina všech racionálních čísel vnořená do $\mathbf{E}_1$ není úplný metrický prostor.

Lavrentěvova věta toto: Je-li f homeomorfní zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q, pak existují takové homeomorfní metrické prostory P_0, Q_0 a takové homeomorfní zobrazení φ prostoru P_0 na Q_0, že 1. P_0, Q_0 jsou absolutní $\mathbf{G}_\delta$, 2. P resp. Q je vnořen do P_0 resp. Q_0, 3. f je parciálním zobrazením φ_P. [17])

Z paragrafu o *kompaktním* prostoru upozorňuji na věty o prostoru P^K, který vedl k důležitým výsledkům jak v topologii tak ve funkcionální analyse (Banach, Borsuk, Eilenberg, Hurewicz, Jarník, Mazurkiewicz). Metrický prostor P s metrikou ϱ se nazývá *kompaktní*, když ke každé posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P existují posloupnost $\{x_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ z ní vybraná a bod $x \in P$ tak, že $\lim\limits_{\nu=\infty} \varrho(x_{n_\nu}, x) = 0$.[18]) Je-li K neprázdný kompaktní a P metrický prostor s metrikou ϱ, pak P^K je množina všech spojitých zobrazení prostoru K do P s metrikou σ[19]) takto definovanou: pro $(f, g) \in P^K \times P^K$ je $\sigma(f, g) = \max\limits_{x \in K} \varrho[f(x), g(x)]$, t. j. největší ze všech čísel $\varrho[f(x), g(x)]$, kde $x \in K$. Tuto definici podpírají tři věty: 1. $\varphi(x) = \varrho[f(x), g(x)]$ je konečná spojitá funkce v oboru K; 2. pro každou konečnou spojitou funkci φ v oboru K existuje $\max\limits_{x \in K} \varphi(x)$; 3. σ je metrika v P^K. Platí pak věta, že při úplném P prostor P^K je úplný. — Pro $K = [0, 1]$ (tato volba je přípustná podle pozn.[18])) a $P = \mathbf{E}_1$ je P^K množinou všech konečných spojitých funkcí v oboru $[0, 1]$ s metrikou $\sigma(f, g) = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} | f(x) - g(x) |$; tento speciální prostor P^K se značí C. Prostor C je úplný podle uvedené věty, neboť $\mathbf{E}_1$ je úplný podle pozn.[19])

Míra. Kap. IV, zabírající polovinu knihy, klade na čtenářovu soustředěnost ze všech kapitol největší požadavky, ale je nejbohatší a bude chloubou české matematické literatury. Vycházeje z předpokladů co nejobecnějších (t. j. takových, že z nich vzhledem k sledovanému cíli lze už sotva slevit), podává autor teorii míry a integrálu způsobem, který budí obdiv jak mohutnou koncepcí tak detailním provedením.

K pojmu míry dochází autor takto: Systém množin má podle definice *vlastnost* α, jestliže obsahuje $\emptyset$ a jestliže průnik a rozdíl kterýchkoli jeho dvou množin je disjunktním konečným součtem jeho množin. Systém množin se nazývá *těleso*, jestliže obsahuje $\emptyset$ a jestliže obsahuje součet a rozdíl kterýchkoli dvou svých množin. Systém $\mathfrak{A}$ s vlastností α není nutně tělesem, ale stane se jím, když se rozšíří o všechny konečné disjunktní součty svých množin; těleso takto vzniklé se značí $t(\mathfrak{A})$. — Je-li $\mathfrak{A}$ systém množin, pak funkce f v oboru $\mathfrak{A}$ se nazývá *aditivní*, když pro každý konečný disjunktní součet $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$ množin z $\mathfrak{A}$ je $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(A_i)$. Velmi důležitou pro teorii zde podávanou je tato *věta o rozšíření aditivní funkce*: je-li f konečná nezáporná aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$ s vlastností α, pak

[17]) Přehledně: netoliko lze každý metrický prostor vnořit do úplného (na př. do jeho úplného obalu), nýbrž homeomorfii každých dvou metrických prostorů lze rozšířit na homeomorfii dvou absolutních $\mathbf{G}_\delta$.

[18]) Z Bolzano-Weierstrassovy věty o omezené nekonečné množině vnořené do $\mathbf{E}_1$ plyne, že interval $(0, 1)$ není, ale $[0, 1]$ je kompaktním prostorem.

[19]) Upozorňuji, že podle pozn. [2]) $P = \emptyset \Rightarrow P^K = \emptyset \Rightarrow P^K \times P^K = \emptyset \Rightarrow \sigma = \emptyset$.

existuje přesně jedna konečná nezáporná aditivní funkce φ v oboru $t(\mathfrak{A})$, pro kterou parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{A}}$ je f. — Je-li $\mathfrak{A}$ těleso, pak funkce f v oboru $\mathfrak{A}$ se nazývá *σ-aditivní*, když je aditivní a pro každý spočetný disjunktní součet $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$ množin z $\mathfrak{A}$ je $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$.

Budiž nyní dána trojice $(P, \mathfrak{A}, \mu)$, v níž $P \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}$ je těleso v P(t. j. $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \subset P$) a μ je konečná nezáporná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$. Ke každé takové trojici lze vybudovat určitou teorii míry. Povím, jak v takové $(P, \mathfrak{A}, \mu)$-teorii čili v *teorii μ-míry v P nad* $\mathfrak{A}$ zní definice *měřitelné* množiny $M \subset P$ a její *míry*. Nazvu $\mathfrak{M}$ systém všech takových $M \subset P$, pro něž existuje taková posloupnost $\{A_n\}$, že

$$A_n \in \mathfrak{A} \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ a } M \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{*}$$

Protože systém $\mathfrak{M}$ obsahuje každý spočetný součet svých množin a rozdíl každých dvou svých množin, zřejmě pro $M \in \mathfrak{M}$ a pro každou posloupnost (*) množina $\sum_{n=1}^{\infty} A_n - M$ je také v $\mathfrak{M}$. Dosud nezasáhla funkce μ. Nyní pro $M \in \mathfrak{M}$ znakem $|M|$ se označí dolní hranice množiny všech čísel $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, kde $\{A_n\}$ splňuje (*), a za *měřitelnou* v teorii μ-míry v P nad $\mathfrak{A}$ se prohlásí každá taková $M \in \mathfrak{M}$, pro kterou při $\varepsilon > 0$ lze posloupnost (*) zvolit dokonce tak, že $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - M\right| < \varepsilon$; je-li množina $M \subset P$ měřitelná, pak číslo $|M|$ je její *měrou* v uvažované teorii.

Význam této abstrakce pro aplikace tkví však teprve v tom, že ke každým dvěma takovým teoriím míry, $(P, \mathfrak{A}, \mu)$-teorii a $(Q, \mathfrak{B}, \nu)$-teorii, lze přiřadit určitou teorii míry v kartézském součinu $P \times Q$; tuto teorii budu nazývat *složenou z daných dvou.* K ní se dojde takto: Jsou-li $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ dva systémy množin, pak $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ značí systém všech $S_1 \times S_2$, kde $S_1 \in \mathfrak{S}_1$, $S_2 \in \mathfrak{S}_2$, a jsou-li f_1, f_2 konečné funkce v oboru resp. $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, pak $f_1 \bullet f_2$ znamená funkci definovanou v oboru $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ takto: $f_1 \bullet f_2(S_1 \times S_2) = f_1(S_1) f_2(S_2)$ pro $S_1 \times S_2 \in (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$. O teorii $\mu \bullet \nu$-míry v $P \times Q$ nad $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ mluvit však zatím nelze, protože nevím ani, zda $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ je tělesem. Na štěstí však $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ má vlastnost α a $\mu \bullet \nu$ je konečná nezáporná aditivní funkce v oboru $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Podle uvedené věty o rozšíření aditivní funkce lze tedy $\mu \bullet \nu$ rozšířit v konečnou nezápornou aditivní funkci v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a o této rozšířené funkci $\mu \bullet \nu$ se dá dokázat, že je dokonce σ-aditivní v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.[20]) Teď lze mluvit o teorii $\mu \bullet \nu$-míry v $P \times Q$ nad $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$; tu rozumím teorií složenou z $(P, \mathfrak{A}, \mu)$-teorie a z $(Q, \mathfrak{B}, \nu)$-teorie.

1. aplikace. Budiž $\mathfrak{J}$ systém skládající se z $\emptyset$, ze všech jednobodových množin (a), $a \in \mathsf{E}_1$, a ze všech intervalů (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$. Budiž λ funkce v oboru $\mathfrak{J}$ definovaná takto: pro $A \in \mathfrak{J}$, když A je intervalem, budiž $\lambda(A)$ jeho délkou, jinak $\lambda(A)$ budiž nulou. Protože $\mathfrak{J}$ zřejmě není těleso, nelze mluvit o teorii λ-míry v E_1 nad $\mathfrak{J}$. Ale $\mathfrak{J}$ má aspoň vlastnost α a λ je konečná nezáporná aditivní funkce v oboru $\mathfrak{J}$. Opět lze tedy λ rozšířit v konečnou nezápornou aditivní funkci v oboru $t(\mathfrak{J})$ a tato roz-

[20]) To dokázali Z. Łomnicki a S. Ulam v r. 1934 (Fundam. Math. XXIII, str. 247—249).

šířená λ je dokonce σ-aditivní v oboru $t(\mathfrak{J})$. Lze tedy mluvit o $(\mathsf{E}_1, t(\mathfrak{J}), \lambda)$-teorii a to je *Lebesgueova teorie míry* v E_1. *Lebesgueova teorie míry* v E_{m+1} povstane pak indukcí jako teorie složená z Lebesgueových teorií v E_m a v E_1.

2. aplikace. Budiž dána $(P, \mathfrak{A}, \mu)$-teorie. Množinám měřitelným v této teorii budu říkat μ-měřitelné a množinám měřitelným v teorii složené z $(P, \mathfrak{A}, \mu)$-teorie a Lebesgueovy teorie míry v E_1 budu říkat měřitelné. Budiž f nezáporná funkce v oboru L, který je μ-měřitelnou množinou; pak f se nazývá *μ-měřitelná*, když množina $\underset{x \epsilon L}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ je μ-měřitelná pro každé $c \epsilon \mathsf{E}_1$. Platí věta, že pro každou nezápornou μ-měřitelnou funkci f v oboru L množina $\underset{(x,t) \epsilon P \times \mathsf{E}_1}{\mathrm{E}} [x \epsilon L, 0 \leqq t < f(x)]$ je měřitelná; její míra se nazývá *integrál funkce f v oboru L*. Pojem *m-rozměrného Lebesgueova integrálu* se odtud obdrží specialisací, dosadí-li se za $(P, \mathfrak{A}, \mu)$-teorii Lebesgueova teorie míry v E_m.

Tím končím malý výběr z témat IV. kap. Doufám, že čtenář nabyl aspoň jakési představy o pružnosti obecné teorie míry autorem podávané, v níž i dost abstraktní Lebesgueova teorie míry a integrálu se jeví jako velmi speciální případ.

Dodatek má dva cíle: 1. předvést čtenáři užití shora zmíněného prostoru C na důkaz existence konečné spojité funkce v oboru $[0,1]$, která nemá derivace v žádném bodě $x \epsilon (0, 1)$; 2. předvést čtenáři užití Lebesgueovy teorie míry a funkcí s konečnou variací na důkaz zobecněné Denjoyovy věty o derivovaných číslech.

Ad 1. Platí věta, že množina první kategorie v úplném neprázdném prostoru není celým prostorem. Protože jsme si nahoře všimli, že C je úplný, redukuje se důkaz na důkaz toho, že množina všech konečných spojitých funkcí v oboru $[0, 1]$, které tu anomalii nevykazují, je první kategorie v C.

Ad 2. V této větě se jedná o toto: Budiž f konečná funkce v oboru (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$, a budiž $x_0 \epsilon (a, b)$. *Derivovaným číslem funkce f v bodě x_0* se rozumí každé ze čtyř čísel $f^+(x_0), f_+(x_0), f^-(x_0), f_-(x_0)$, z nichž třebas třetí je definováno takto:

$$f^-(x_0) = \limsup_{h=0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A ta věta praví: Položí-li se

$$M_1 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f^+(x) = f_+(x) = f^-(x) = f_-(x) \neq \pm \infty],$$

$$M_2 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f^+(x) = -f_+(x) = f^-(x) = -f_-(x) = +\infty],$$

$$M_3 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f^+(x) = -f_-(x) = +\infty \neq f_+(x) = f^-(x) \neq -\infty],$$

$$M_4 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f^-(x) = -f_+(x) = +\infty \neq f^+(x) = f_-(x) \neq -\infty],$$

má množina $(a, b) - \sum_{n=1}^{4} M_n$ v Lebesgueově teorii míry v E_1 míru 0.

Sluší zdůraznit, že autor Dodatku podává ukázky z oboru, v němž sám s oblibou a úspěšně pracuje; srv. na př. práci Sur une propriété des fonctions continues v 65. roč. Časopisu. V témž ročníku nalezne čtenář práci B. Jurka, Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée, jíž bylo v Dodatku autorem použito v důkaze ad 2. [21])

Cvičení, jichž je hodně přes 300, jsou netoliko okrasou knihy, svědčíce o velmi zevrubných znalostech a šíři rozhledu svého autora, nýbrž jsou též nezbytným doplňkem díla, při jehož psaní šetřit místem bylo sotva příkazem posledním. Radím proto čtenáři, aby se jim nevyhýbal, nehledě k tomu, že se některým (hvězdičkou označeným) dobře vyhnout nemůže, ježto se jich užívá v textu. Cvičení nejen ozřejmí a upevní pojmy a vztahy textu, nýbrž jej namnoze prohlubují a rozšiřují; jsou věci, jež je dobré znát, a o nichž se nemluví leč právě ve cvičeních.

Jak jest kniha psána? Textu, kde se ani nedefinuje, ani nic netvrdí, co se pak dokáže, ani nedokazuje, takřka není. Kdo touží po autoru, který vše, s čím operuje, definuje, který v důkazech vyčerpá všechny logické možnosti, který svízelným místům důkazů neuniká obraty „zřejmě“ a „analogicky“, nýbrž jich užívá jen na místech zřejmých a analogických, ten nechť s důvěrou čte tuto knihu. Její sloh je prostý, naprosto jasný, ale velmi hutný. Nežádá nikde od čtenáře, aby si něco domýšlel vlivem zamlčených předpokladů nebo vlivem předpokladů neprávem zúžených nebo vlivem nepečlivé aplikace. Na druhé straně však povrchně knihu číst nedoporučuji; tím není řečeno, že by dokonalý rejstřík a dokonalá citace neumožňovaly pokročilému čtenáři rychlou orientaci. Na konec konstatuji, že je prostě úžasné porovnat tyto tři faktory: počet stran, bohatství látky, dokonalé důkazy.

Přeji knize, této krásné a dokonalé knize, aby došla velkého rozšíření a zájmu, aby byla pozorně čtena a aby se dnešní matematické generaci stala dílem standardním.*) *M. Neubauer.*

R. Fürth: Einführung in die theoretische Physik. Wien 1926. XIV, 483 str. Cena váz. Kč 247,50.

Autor, profesor experimentální fysiky na německé universitě pražské, zamýšlí vydati dvousvazkový Úvod do fysiky; přítomná kniha je jeden jeho díl; druhý díl, Úvod do experimentální fysiky, vyjde v nejbližší době. Celé dílo má poskytnouti těm, kdož začínají studovati fysiku, úhrnný obraz dnešního stavu fysiky napsaný s jednotného hlediska a zároveň podati základ pro podrobnější studium jednotlivých oborů fysiky, které dnes bez specialisace není možné. Je to pokus vyžadující dobrých znalostí výsledků i metod fysiky experimentální i teoretické; není pochybnosti, že autor je svou činností vědeckou, stejně úspěšnou na poli experimentálním i teoretickém, i svou činností učitelskou plně k němu legitimován.

Od ostatních učebnic toho druhu liší se Fürthova kniha na první pohled uspořádáním látky. Po první kapitole, v níž autor vymezuje úkol teoretické fysiky a podává přehled vývoje jejích metod, následuje pět kapitol rázu matematického. Je v nich vyložen vektorový a tensorový počet, teorie polí (pole nevírová, vírová a rovinná pole vektorová), kinematika jednoho bodu a bodových soustav rozpojitých i spojitých (teorie lineárních deformací), teorie vlnivého pohybu jednorozměrného i prostorového (vlnová rovnice, interference, ohyb atd.) a vlnivých polí (eikonal, princip Huygensův a Fermatův) a konečně zvlášť pěkně zpracovaná kapitola

[21]) Jako malý příklad autorovy logické korektnosti uvádím, že i nepatrná mezera Banachovy argumentace v důležité jeho práci v C. R. 173 (1921), str. 457—459, nalezla „ošetření“ v pomocné větě **D 4·6**.

*) Se souhlasem autorovým upozorňujeme na tyto tři drobnosti: Na str. 14., ř. 13. zdola čti „přirozených čísel 1, 2, 3, . . .“ místo „celých čísel 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, . . .“. Na str. 162 jsou týmž číslem **20·4·5** označeny *dvě* věty; při citátech na str. 252. (ř. 13. a 7. zdola) je míněna druhá z těchto vět. Na str. 267., ř. 7. vypadlo ze znaku lim písmeno l. *Red.*

zabývající se fysikální statistikou (počet pravděpodobnosti, rozpojité a spojité pravděpodobnostní funkce). Byla to dobrá myšlenka, že autor tyto formální základy teoretické fysiky shrnul a oddělil od výkladů čistě fysikálních; dosáhl tím větší stručnosti a přehlednosti ve vlastní části knihy, mimo to je čtenář hned s počátku upozorněn na to, co je v jednotlivých úvahách povahy formální, a co se opírá o experimentální zkušenost.

Ostatních patnáct kapitol knihy — skoro více než tři čtvrtiny celého díla — obsahuje vlastní látku teoretické fysiky. Ani tu se autor nedrží obvyklého, historisujícího postupu, při kterém se napřed probírá t. zv. klasická fysika, a po ní, odděleně a často jen jako dodatek, fysika moderní, nýbrž seznamuje čtenáře s větami kvantové mechaniky a statistiky co možná brzo. Obraz dnešního stavu fysiky, jak jej podává kniha, je následkem toho značně jednotnější a ucelenější.

Stručný obsah oněch kapitol je tento. V první kapitole je probrána mechanika hmotných bodů a tuhých těles, a to nejdříve obecné věty, potom některé jednoduché pohyby jediného hmotného bodu, pak statika soustavy hmotných bodů a konečně dynamika tuhého tělesa (otáčení kolem pevné osy, moment setrvačnosti, volné osy, precese a nutace setrvačníku). Další kapitola přináší mechaniku pružných těles skupenství pevného; zase napřed obecné věty, potom statiku pružných těles (v tom torsi kruhového válce a ohyb prutů) a dynamiku pružných těles (podélné kmity prutů, příčné kmity strun, elast. vlny v nekonečném prostředí, elast. ráz). Následuje mechanika kapalin a plynů, obsahující hydrostatiku a aerostatiku, dynamiku kapalin a plynů bez vnitřního tření (Eulerovy rovnice, Bernoulliova rovnice, Magnusův efekt, víry, vlny velmi malé amplitudy), dynamiku viskosních kapalin (Stokesovy rovnice, laminární tok trubicí) a kapilaritu. Potom přechází autor k mechanice atomu; vykládá nejdříve kvantovou mechaniku konservativních systémů (vlny de Broglieovy, Schrödingerova rovnice pro jediný hmotný bod, její řešení, vlnová rovnice pro několik hmotných bodů), pak kvantovou mechaniku systémů nekonservativních (Schrödingerova rovnice v případě závislosti na čase, její řešení, věta o pohybu těžiště, postupné vlny de Broglieovy, Heisenbergovy relace) a konečně speciální problémy atomové mechaniky (lineární harmonický oscilátor, rotátor, Keplerův pohyb, vznik molekul, radioaktivní rozpad). Obsahem další kapitoly je klasická termodynamika; jsou v ní odvozeny všechny tři hlavní věty a podány některé aplikace, kromě toho je k ní připojena stručná teorie tepelného vedení a difuse s nejdůležitějšími aplikacemi. Následuje kapitola věnovaná statistické mechanice; v ní autor podává nejdříve teorii časových souborů (Liouvilleova věta, soubor mikrokanonický a kanonický, věta o stejném rozdělení kinet. energie, střední hodnoty a kolísání fázových funkcí), potom statistickou formulaci hlavních vět termodynamiky a konečně teorii souborů prostorových (v ní statistiku Boseovu-Einsteinovu a Fermiovu-Diracovu). Potom přichází kinetická teorie hmoty; nejdříve statistická teorie plynů a kapalin (Maxwellův zákon pro rozdělení rychlostí, kolísání hustoty, specifické teplo plynů, stavová rovnice ideálního plynu a rovnice van der Waalsova, degenerace plynů), pak kinetická teorie plynů (kinet. odvození stavové rovnice ideálního plynu, počet rázů za sekundu, volná dráha, vnitřní tření, vedení tepla, difuse, Brownův pohyb) a statistická teorie skupenství pevného (teorie specif. tepla, tepelné vedení kovů, tepelná roztažnost). Další tři kapitoly obsahují elektrostatiku, magnetostatiku a elektrodynamiku dějů stacionárních i nestacionárních, celkem v obvyklém rozsahu; autor dospívá až k Maxwellovým rovnicím pro tělesa v klidu a odvozuje některé důsledky z nich plynoucí (elektrodynamické potenciály, větu Poyntingovu, elektromagn. impuls, Maxwellův tensor napětí). Následuje kapitola nazvaná optika vln a paprsků; ta obsahuje teorii elektromagnetických vln v homogenním a isotropním prostředí (vlny v isolátorech, vlnové pole Hertzova dipolu, harmonické vlny ve vodičích, světelný tlak), potom teorii elektromagnetických vln v prostředích nehomogenních a anisotropních (Fresnelovy vzorce pro amplitudy vlny odražené a lomené, dvojlom v jednoosých krystalech) a na konec teorii optického zobrazení (zobrazení sférickým zrcadlem, lámavou plochou kulovou, tenkou čočkou, tlustou čočkou a centrovanými systémy čoček, hranol). Další kapitola obsahuje elektronovou teorii a speciální teorii relativnosti. Autor zabývá se nejdříve elektromagnetickým polem pohybujících se elektronů (magn. pole elektronu rotujícího, elektromagn. pole elektronu pohybujícího se malou rychlostí, jeho energie, hybnost a hmota, působení pole na pohybující se elektron), pak je podáno odvození Maxwellových rovnic z elektronové teorie. Ze speciální teorie relativnosti je vyložena Lorentzova transformace a některé její důsledky (adiční teorém rychlostí, strhování světla, Dopplerův princip, aberace) a je odvozena pohybová rovnice jediného hmotného bodu. Další kapitola přináší kinetickou teorii vedení a vzniku elektrického proudu; obsahuje elektronovou teorii kovů (vedení el. proudu v kovech, zákon Wiedemannův-Franzův, Richardsonův efekt, teorie Voltova potenciálního rozdílu a termoproudů), pak teorii elektrolytů a vedení ve vakuu a v plynech. Následuje statistická teorie elektromagnetických dějů v tělesích, a to statistická teorie magnetismu (diamagn., paramagn., feromagn.), statistická teorie dielektrik (polarisace dielektrika v konstantním poli a ve střídavém poli vysoké frekvence, disperse). Poslední kapitola obsahuje teorii záření a spekter; nejdříve některé obecné věty z teorie spekter, pak speciální problémy (spektra vodíku a prvků podobných vodíku, spektra Röntgenova, pásová, zjev Zeemanův a Starkův), na konec pak statistickou teorii tepelného záření (černé záření, Planckův zákon).

Celkem podává Fürthova kniha mnohem více než jiné knihy mající stejný účel, a to zvláště, pokud jde o otázky souvisící s kvantovou mechanikou a fysikální statistikou, k níž ostatně autor sám svými pracemi hodně přispěl. Svou úrovní vyniká značně nad běžné učebnice. Vzhledem k výběru látky a způsobu podání lze ji dobře doporučiti ke studiu především posluchačům fysiky ve vyšších semestrech, jakož i všem, kdož pracují v oborech příbuzných a chtějí se seznámiti s metodami a výsledky současné dnešní teoretické fysiky. Již dnes možno říci, že po vyjití druhého svazku, obsahujícího fysiku experimentální, dostane se fysikální literatuře učebnicové díla zvlášť cenného a záslužného. *Záviška.*

G. Bruhat: Cours de Physique générale. Recueil de problèmes. VIII + 357 p., Paris, 1936. Kč 82,50.

Kniha obsahuje sbírku úloh ze všech oborů fysiky. Otázky jsou obšírně vysloveny; úloha skládá se obyčejně z několika, někdy i z většího počtu otázek. Řešení následuje hned za úlohou. Autor se často odvolává na své dříve vydané učebnice mechaniky, thermodynamiky, optiky a nauky o elektřině; pokročilejší student nemusí však nutně vzíti k ruce právě tyto knihy, chce-li se zabývati úlohami uvedenými v nové knize. Není pochybnosti, že tato pečlivě sepsaná kniha dobře poslouží účelu, který autor v předmluvě uvádí: obeznámiti studenty, kteří nejsou ještě vycvičeni v řešení fysikálních úloh, s metodami řešení. Autor neuvádí řešení v podobě úplných odpovědí na položené otázky, nýbrž podává, někde podrobně, jinde zase stručněji, celkový přehled postupu, kterým se má úloha rozřešiti. *Bohuslav Hostinský.*

Ch. Fabry: Physique et astrophysique. Bibliothèque de Philosophie scientifique. 284 str. Paris, 1935. Kč 18,—.

Kniha podává velmi přístupně a srozumitelně psané výklady o tom, co je to hmota a energie, o transmutaci atomů, o světle a o záření, o různých směrech ve výkladu světelných zjevů, o složení atmosféry, o světle oblohy, o kosmických paprscích a o některých aplikacích (osvětlování, optický průmysl). Autor, jenž je mistr v optickém badání, osvědčil se zde i jako mistr v populárním výkladu. Podle začátku předmluvy tato kniha, kde se mluví o fysice a o astrofysice, není určena ani pro fysiky ani pro astronomy. Neuchází se o nic jiného než o to, aby vzbudila trochu zájmu pro tyto dvě vědy u osob, které jich neznají a aby jim dala představu o kráse těch věd. Jak to udělat? Metodický výklad, sebe stručnější, vyžaduje celých svazků a u těch, kteří neznají ani začátků, nelze žádat, aby si ke čtení našli čas a aby věnovali úsilí nutné k pochopení. Zbývá jen jedna cesta: vybrati příklady a vyložiti to, co bylo nalezeno při řešení určitých otázek. Přes to, že se uchýlím poněkud od autorova názoru zde vysloveného, doporučuji tuto skvěle napsanou knihu nejenom jako spis pro širší kruh čtenářů, nýbrž i jako znamenitý úvod ke studiu optiky těm, kteří mají v úmyslu fysiku odborně studovati. *Bohuslav Hostinský.*

Oeuvres de G. Humbert publiées par les soins de P. Humbert et de G. Julia. 573 str. Tome II. Paris 1936. Kč 300,—.

První svazek Humbertových spisů, jenž vyšel r. 1929, obsahuje hlavně práce vztahující se k algebraickým křivkám a k Abelovu theorému. P. Painlevé, jenž napsal k prvnímu dílu předmluvu, ve které ocenil dílo Humbertovo, vyjádřil se o další skupině jeho prací, týkajících se singulárních Abelových funkcí, příslušných algebraických ploch a aritmetických forem, které jim odpovídají, takto: „Pokud budou žíti lidé schopní pěstovati matematiku, budou milovati a obdivovati dokonalost takového díla.“ Právě tyto práce jsou nyní znova otištěny ve druhém svazku sebraných spisů. Celý svazek je vyplněn otisky několika rozsáhlých pojednání, uveřejněných původně v Journal des Mathématiques pures et appliquées v letech 1893—1901, o obecné teorii hypereliptických ploch, o Kummerově ploše, o zvláštní ploše šestého stupně a o singulárních funkcích Abelových.

Bohuslav Hostinský.

B. Recense didaktických publikací.

Sir James Jeans: Tajemný Vesmír. (The Mysterious Universe). Přeložil Zdeněk Kopal, vydal Jos. Štorek, Praha 1936. Stran 144, cena brož. 24 Kč, váz. 32 Kč.

Jeansova kniha Tajemný Vesmír zaujímá ve světové, populárně vědecké literatuře výjimečné a zvláštní postavení. Rozvoj moderní fysiky vedl k tolika neočekávaným převratům a otřásl tolika zdánlivě nevyvratitelnými základními pojmy, že objevy, jež exaktní vědy nahromadily v první třetině tohoto století, musely způsobiti i mohutný reflex na příbuzné obory filosofie (noetiku) — a vzbuditi i živý zájem vzdělané veřejnosti. Na rozdíl od minulých dob a k prospěchu věci ujali se tentokráte úkolu interpretů ti nejpovolanější matematikové a fysikové sami; Eddington, Dirac, Planck, Weyl a jiní pokusili se dáti výsledkům svých badání přístupný slovní výraz a smysl, ať příležitostně či v celých dílech.

Siru Jamesu Jeansovi, velikému anglickému fysikovi, jehož hlavní dílo spadá do oboru teorie plynů a do kosmogonie, se to podařilo skvěle. Jeho Tajemný Vesmír (Cambridge University Press, 1930), kde se autor pokusil podati přístupným způsobem obraz, jak nám dnes moderní fysika vykládá Vesmír a jeho makrokosmické a mikrokosmické děje, se stal nejúspěšnější knihou tohoto druhu; za necelých sedm let bylo jen v anglickém originále rozebráno kol 200.000 výtisků a byl přeložen do sedmnácti jazyků; úspěch jistě příznačný a alespoň v oboru exaktních věd neobvyklý!

Nic nemůže lépe přiblížiti ráz líčení a vlastní autorovo stanovisko než slova předmluvy: „Každý si dnes uvědomuje, že nové objevy v astronomii a ve fysice jsou s to hluboce změniti naše názory na Vesmír jako celek a na význam lidského života. Jádro této otázky patří nakonec rozhovorům filosofů, ale dříve než mají filosofové právo mluviti, musí se zeptati na vše, co věda dosud o věci ví; na zjištěná fakta i předběžné domněnky. Tehdy, a jedině tehdy, může hovor řádně přejíti do oboru filosofie. Asi s takového hlediska jsem psal tuto knihu a nejednou jsem váhal, mohu-li něčím odůvodniti příspěvek k velikému množství toho, co již o tomto předmětu bylo napsáno. Nemohu si činiti nárok na žádné zvláštní postavení kromě příslovečně nebezpečného postavení pouhého diváka; nejsem filosofem ani vzděláním, ani sklony, a moje vědecké práce již po mnoho let neopustily arény, kde závodí fysikální teorie."

Prvá kapitola „Umírající slunce" je úvodem, lícícím náhodnost a téměř naprostou bezvýznamnost života v nepředstavitelně velikém, hrozivém a životu nepřátelském Vesmíru. V kapitole druhé „Nový svět moderní fysiky" seznamuje autor čtenáře s revolučními objevy experimentální fysiky z konce minulého století a ukazuje, jak selhal princip kausality. Podání je podivuhodně jasné, formálně i myšlenkově bezvadné a dokonalé. Autor srovnává vždy, v čem se nové myšlenkové proudy liší od starých a v čem se stýkají; vrací se tu s oblibou často až k Newtonovi a dokazuje (s jistou dávkou patriotismu), jak často Newton anticipoval vývoj moderní fysiky — mnohokráte jistě mimoděk. Kapitola třetí „Hmota a záření" je do jisté míry vyvrcholením knihy. Autor demonstruje dualismus záření — jako vln a částeček — a opíraje se o mnoho dokladů z fysiky mikrokosmu i astrofysiky, vede čtenáře k základním představám vlnové mechaniky a dnešních názorů na podstatu hmoty a záření. Kapitola čtvrtá „Relativita a éter" podává neobyčejně jasně nárys hlavních pojmů teorie relativity, uvádí do tajů čtyřrozměrného prostoročasu a pod tímto zorným úhlem vysvětluje některé rysy moderní kosmogonie.

„Poslední kapitola stojí na poněkud jiné půdě. Každý má právo odvodit si své vlastní názory z fakt, které mu předkládá moderní věda. Tato kapitola obsahuje prostě výklad, který bych já, cizinec v oboru filosofie, připojil k vědeckým faktům a domněnkám, o nichž se mluví v hlavní části knihy. Mnoho lidí nebude zde se mnou souhlasit — ale právě proto jsem ji psal" — přiznává sir Jeans v závěru předmluvy. Dodejme, že, i když s ním všichni nebudou souhlasiti do důsledku, zaujme tato část knihy svým suggestivním a přesvědčivým slohem i toho, kdo se na ryze theistický výklad celého dění dívá s jiného stanoviska.

V. Nechvíle.

Sir Arthur Eddington: Hvězdy a Atomy. (Stars and Atoms). Přeložil Zdeněk Kopal, vydal Jos. Štorek, Praha 1936. Stran 160, cena brož. 20 Kč, váz. 28 Kč.

Eddingtonova kniha se od Jeansova spisu, o němž bylo právě referováno, liší zásadně. Především tematem. Bylo-li snahou Jeansovou v rámci populárního výkladu načrtnouti dnešní stav moderní fysiky i s příslušnými astronomickými důsledky, přestává Eddington v této knize na populárním výkladu vybraných partií z astrofysiky. Avšak prvé nahlédnutí do knihy nás přesvědčí, že obsah „Hvězd a Atomů" je neméně zajímavý. Kniha je rozdělena na čtyři hlavní části. V prvé podává autor nárys svých teorií o termodynamice a vnitřní stavbě hvězd — oboru, který Eddington vlastně vytvořil a je v něm světovou autoritou. Část druhá, „Některé nové výzkumy" názorně ukazuje užití teorie v praxi. Část třetí „O stáří hvězd" je věnována některým problémům kosmogonie a část čtvrtá pojednává o rozptýlené hmotě v prostoru mezihvězdném. Celek nepředstavuje žádnou souvislou učebnici; jsou to spíše vybrané kapitoly o nejzajímavějších otázkách moderní astrofysiky, celkem volně spolu souvisící.

Jak již názvy jednotlivých kapitol (Příběh o Algolu, Povídka o průvodci Siriově, Cepheidy jako normální svíčky) naznačují, je kniha psána ve formě causerií; vznikla také z přednášek. Stejně jako Jeans i Eddington je skvělým stylistou, i nejspolehlivější partie vykládá s obdivuhodnou lehkostí a přehledem. Na rozdíl od Jeanse, který píše vážně, někdy až téměř s pathosem, je styl Eddingtonův usměvavý, veselý, někdy až s rozpustilostí hraničící. Třeba však přiznat, že vědec zůstává vždy nad spisovatelem v převaze a nedá se nikdy vésti elegancí metafory na úkor věcné přesnosti.

Jako předcházející spis Jeansův, nesou i Eddingtonovy „Hvězdy a Atomy“ pečeť své pohnuté doby, tak bohaté na překvapení. „Hvězdy a Atomy“ nejsou knihou nejnovější; anglický originál vyšel r. 1926 a vývoj astrofysiky prošel od té doby nejedním novým obratem. Tím více musíme obdivovat badatelský cit autora, s jakým i na tak ožehavém poli dovedl vybrat pro svoji knihu partie, jichž obsah dodnes neztratil v ničem na ceně. Některé nové objevy, jež přineslo uplynulých deset let, vyložil sir Eddington v nové předmluvě, kterou se vzácnou ochotou napsal pro české vydání, ale většina problémů, jež nadhodil zejména v kapitolách věnovaných stáří hvězd, zůstává záhadná a nerozřešená dodnes.

Oba překlady p. Zd. Kopala jsou zdařilé, uvážíme-li veliké slovní bohatství angličiny. Je velikou radostí čísti obě knihy v originále, pro skvělou angličinu, pro úchvatný styl a pro myšlenky, jež trvale utkví v paměti. Rovněž radostný dojem máme i ze čtení české stylisace, jež, až na některá přehlédnutí, je velmi krásná, i když není vždycky doslovná, a představuje úctyhodný výkon. Cítíme z ní mladé a prudké nadšení pro astronomii a vědy příbuzné, jakož i snadnost, s jakou se překladatel dovedl čtenáři přiblížiti. Myslím, že mu můžeme k oběma překladům blahopřáti. *V. Nechvíle.*

Max Born: The Restless Universe. Přel. W. M. Deans. London and Glasgow 1935. Str. 278, VIII tab. na křídovém papíře, 120 obr. a 7 filmů. Cena asi 60 Kč.

Anglický vzdělaný laik nemůže si stěžovati na nedostatek populární literatury, z níž by se mohl poučiti o pokroku fysiky v posledních desítiletích. A. Eddington, W. Bragg a J. Jeans vynaložili jistě nemálo úsilí, aby i širší kruhy seznámili aspoň s hlavními myšlenkami moderních fysikálních teorií. Že se jim to znamenitě podařilo, jest všeobecně známo. Do této kategorie literatury patří i kniha M. Borna, který nyní působí v Cambridgi. To, že vyšla v listopadu 1935 již ve třetím vydání (první vyd. v říjnu 1935), je jistě nejlepším dokladem toho, s jakým zájmem se setkala tato kniha.

V prvních dvou kapitolách seznamuje autor čtenáře-neodborníka s těmi fysikálními zjevy a teoriemi, kterých potřebuje pro vlastní výklad „o nepokojném světě“ atomů a jejich částic (kinetická teorie plynů, statistické pojetí fysikálních zákonů, elektromagnetické pole a j.). V dalších třech kapitolách je pak podán pěkný přehled vývoje fysiky dvacátého století a příslušných teorií od vzniku kvantové hypothésy a její aplikace na stavbu atomu přes vlnovou mechaniku až k nové kvantové teorii a vlnové mechanice. Těchto několik slov snad stačí pro informaci těch kolegů, kteří by se o tuto knihu zajímali.

Pozoruhodnou novinkou v této knize je 7 filmů (mutoscopic pictures), kterých autor užil pro objasnění výkladu tam, kde chtěl demonstrovati kinematiku určitého zjevu. Časově rozvinuté schematické obrazce jsou kresleny na okraji knihy tak, že při rychlém listování vznikne dojem pohybujícího se obrazu. *F. Veselý.*

C. Původní publikace československých matematiků a fysiků.

E. Čech: Úvod do theorie homologie. Spisy. Brno, č. **184** (1933), 36 str.

E. Čech: Užití teorie homologie na teorii souvislosti I. Spisy Brno, č. 188 (1933), 40 str.

E. Čech: Sur les continus Péaniens unicohérents. Fund. Math. **20** (1933), 232—243.

E. Čech: Über einen kurventheoretischen Satz von Ayres. Ergebnisse eines math. Kolloquiums **5** (1933), 24—25.

E. Čech: Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes. Ergebnisse eines math. Kolloquiums 5 (1933), 29—31.

E. Čech: Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité. Annals of Math. (2) **34** (1933), 621—730.

E. Čech: Sur la décomposition d'une pseudovariété par un sous-ensemble fermé. Comptes Rendus **198** (1934), 1342—1345.

E. Čech: Sur les arcs indépendants dans un continu localement connexe. Spisy Brno, č. **193** (1934), 10 str.

E. Čech: Sur les nombres de Betti locaux. Annals of Math. (2) **35** (1934), 678—701.

E. Čech: Sur la connexité locale d'ordre supérieur. Compositio Mathematica **2** (1935), 1—25.

E. Čech: Les groupes de Betti d'un complexe infini. Fundam. Math. **25** (1935), 33—44.

E. Čech: On general manifolds. Proceedings of the National Academy of Sciences **22** (1936), 110—111.

E. Čech: On pseudomanifolds. Lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., Fall term 1935, mimeographed.

E. Čech: Über die Bettischen Gruppen kompakter Räume. Ergebnisse eines math. Kolloquiums **7** (1936), 47—50.

E. Čech: Multiplications on a complex. Annals of Math. **37** (1936), 681—697.

E. Čech: Accessibility and homology. Recueil mathématique Moscou, nouvelle série **1** (43) (1936), 661.

Fr. Erhart: Kritická (zvuková) rychlost plynu a její $\sqrt{2}$-násobek v úvahách o energii v plynu obsažené. Techn. přehled **8** (1937), č. 10—12.

Fr. Erhart: Kritická a zvuková rychlost v teorii nestacionárního rázu vodního a plynového. Strojn. Obzor 1936, č. 21—23.

Z. Horák: Teplotní koeficienty tepelné vodivosti práškových hmot. Techn. Obzor **17** (1937), 68—71, 85—89.

J. Klapka: Příspěvek k metrické teorii zborcených ploch. Sborník vys. šk. tech. v Brně, XI, **40** (1937).

B. Pavlík: Beitrag zur Untersuchung der Biegungsschwingungen bei parallelogrammartigen Platten mit freien Rändern. Ann. d. Phys. **28** (1937), 353—360.

V. O. Zich: O bezespornosti logistických systémů. Česká Mysl **32**, 215—222.

Kritika důkazu bezespornosti logistických systémů, v nichž je formalisována aritmetika, se stanoviska interpretace formule.

V. O. Zich: Definice „smyslu“ věty ve formalisovaných systémech. Česká Mysl 32, 38—52.

Rozšíření a zobecnění Carnapova smyslu věty (Gehalt). Kdežto Carnapova definice respektuje pouze třídu „důsledků“ věty, tato definice užívá podstatně „okolí“ věty, autorem definovaného, jež teprve stanoví „smysl“. Odvozeny některé formální důsledky definice a dokázáno, že Carnapova definice je specielním případem této.

D. Publikace redakci zaslané.

F. Čuřík: Počet vyrovnávací. Metoda nejmenších čtverců v nauce a užití. 1936. 4° 248 str. Kč 114,—.

S. Fišer - J. Hadrava: Úkryty civilního obyvatelstva proti leteckým útokům. 1937. 8° 114 str. 7 obr. 11 příl. váz. Kč 30,—.

B. Tolman: Zakládání staveb. Díl II, sv. 4: Základová půda a její ohledání. Zakládání na půdách málo únosných. Praha 1937. 4° 112 str. 213 obr. Česká matice technická. Kč 33,—.

J. Žďárek: Řešení okapů. Praha 1937. 8° 72 str. 123 obr. Kč 10,— Technické příručky, č. 1.

O. Blüh: Einführung in die Physik. 1937. 4° 16,582 str. 543 obr., váz. Kč 182,—.

W. F. Osgood: Functions of real variables. Peking 1936. 8° 12,399 str.

W. F. Osgood: Functions of complex variables. Peking 1936. 8° 8,257 str.