Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Philipp Bock

Die Temperaturverteilung in einem rechteckigen Querschnitt, wenn die Temperatur an der Berandung vorgegeben ist

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 4, 296--304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123405

Die Temperaturverteilung im einem rechteckigen Querschnitt, wenn die Temperatur an der Berandung vorgegeben ist.

Ph. Bock, Brünn.

(Eingegangen am 22. April 1937).

In der vorliegenden Arbeit soll die Temperaturverteilung in einem Rechteck untersucht werden, wenn die Temperatur an den Rändern vorgegeben ist. Die Randtemperatur setzen wir als eine Temperaturschwankung an, deren Amplitude längs des Randes eine zu den Mittellinien des Rechteckes symetrische Verteilung aufweist. Diese Amplitudenverteilung und die Kreisfrequenz ν der Temperaturschankungen wollen wir als gegeben ansehen. Bei der weiteren Auswertung der Lösung werden wir dann insbesondere annehmen, daß die Amplitude der Temperaturschwankung A längs des ganzen Randes konstant ist. Diese Annahme entspricht der Vorstellung, daß das Rechteck in ein räumlich homogenes Feld von Temperaturschwankungen eingebettet ist. Die Integration der Wärmeleitungsgleichung geht unter den gegebenen Randbedingungen so vor sich, daß die Lösung durch Überlagerung von zwei Teillösungen gebildet wird. Die Teillösung u_1 und u_2 werden in der Form von unendlichen Reihen ausgedrückt.

I.

Die Wärmeleitungsgleichung hat im Falle rechtwinkliger kartesicher Koordinaten die Gestalt.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

wobei, wie üblich u die Temperatur, t die Zeit und l eine Materialkonstante bedeuten. Den rechtwinkligen Querschnitt mit den Seiten $2a$ und $2b$ legen wir so in das Koordinatensystem, daß die Achsen des Systems mit den Mittellinien des Rechteckes zusammenfallen.

Wir setzen die Lösung der Differentialgleichung (1) nach dem Vorgang D. Bernoullis in bekannter Weise an, und zwar

$$u = XYT, \tag{2}$$

wobei X nur eine Funktion von x ist, Y nur von y und T nur von t abhängig sind.

Die entsprechenden Gleichungen sind daher

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{3'}$$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \tag{3''}$$

$$T = e^{i\nu t}. \tag{3'''}$$

Damit die Gleichung (1) erfüllt sei, muß zwischen den Konstanten λ, μ und ν die Beziehung

$$\mu^2 + \lambda^2 = -\frac{i\nu}{l} \tag{4}$$

bestehen.

Liegt nun etwa die erste Randwertaufgabe vor, d. h. soll

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x = -a & u(-a, y; t) & = g(y)\, e^{i\nu t} \\ \text{„ } x = a & u(a, y; t) & = g(y)\, e^{i\nu t} \\ \text{„ } y = -b & u(x, -b; t) & = f(x)\, e^{i\nu t} \\ \text{„ } y = b & u(x, b; t) & = f(x)\, e^{i\nu t} \end{array}\right\} \tag{5}$$

sein, wobei $f(x)$ und $g(y)$ vorgegebene, wegen der in der Einleitung gekennzeichneten Symmetrie der Randbedingungen, gerade Funktionen sind und ν die vorgegebene Kreisfrequenz bedeutet, so verfahren wir folgendermaßen.

Wir bilden zunächst eine Lösung u_1, die den nachstehenden Randbedingungen genügt:

$$\begin{array}{ll} \text{für } x = \pm a \text{ sei } u_1 = 0 & \text{für alle } y \text{ und } t \\ \text{„ } y = \pm b \text{ sei } u_1 = f(x)\, e^{i\nu t} & \end{array} \tag{5'}$$

Hierauf bilden wir eine Lösung u_2 mit den entsprechenden Randbedingungen. Es sei

$$\begin{array}{ll} \text{für } x = \pm a & u_2 = g(y)\, e^{i\nu t} \\ \text{„ } y = \pm b & u_2 = 0 \quad \text{für alle } x \text{ und } t. \end{array} \tag{5''}$$

Man sieht sofort, daß die Lösung der durch (5) gekennzeichneten Randwertaufgabe u sich additiv aus u_1 und u_2 zusammensetzt:

$$u = u_1 + u_2. \tag{6}$$

Wir bestimmen zunächst u_1.

Diese Lösung wird additiv aus einer Reihe von Termen der

Form (2) zusammengesetzt. Der von x abhängige Faktor eines dieser Terme genügt der Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{3'}$$

deren allgemeines Integral

$$X = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

ist. Die Randbedingungen (5′) verlangen, daß X für $x = \pm a$ verschwinde. Daraus ergibt sich

$$c_1 = 0, \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2a}\pi.$$

Den willkürlichen konstanten Faktor setzen wir

$$c_2 = 1,$$

so daß die Lösung von (3′) schließlich

$$X_n = \cos \frac{2n+1}{2a}\pi x \tag{7}$$

wird.

Der symmetrischen Anordnung des Querschnittes und der Randbedingungen und damit auch der Temperaturwellen entsprechend, ist X_n eine gerade Funktion von x.

Die Lösung der Gleichung (3″)

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \tag{8}$$

ist gegeben durch

$$Y_n = c_n^{(1)} \sin \mu_n y + c_n^{(2)} \cos \mu_n y \tag{9}$$

wobei nach (4)

$$\mu_n = \sqrt{-\frac{i\nu}{l} - \lambda^2_n}$$

ist. Die Teillösung u_1 hat daher zunächst die Gestalt

$$u_1 = e^{i\nu t} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \{c_n^{(1)} \sin \mu_n y + c_n^{(2)} \cos \mu_n y\}. \tag{10}$$

Die so erhaltene Lösung passen wir nun den Randbedingungen

$$y = \pm b, \; u_1 = f(x)\, e^{i\nu t}$$

an. Es müssen demnach

$$\text{für } y = \pm b, \; u = f(x)\, e^{i\nu t}$$

folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2a}\pi x \{-c_n^{(1)} \sin \mu_n b + c_n^{(2)} \cos \mu_n b\}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \{c_n^{(1)} \sin \mu_n b + c_n^{(2)} \cos \mu_n b\}.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$c_n^{(1)} = 0$$

und

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(2)} \cos \mu_n b \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten dieser Fourier'schen Reihe geht in der üblichen Weise vor sich und ergibt die Gleichung

$$c_n^{(2)} \cos \mu_n b = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \, dx.$$

Führt man die analoge Rechnung für u_2 durch, wobei der entsprechende Ansatz für u_2

$$u_2 = e^{i\nu t} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y \{c_n^{(3)} \sin \lambda_n x + c_n^{(4)} \cos \lambda_n x\} \quad (12)$$

mit

$$\lambda_n = \sqrt{-\frac{i\nu}{l} - (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4b^2}}$$

lautet, so erhält man bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$x = a, \quad u_2 = g(y) e^{i\nu t}$$

für die Konstanten $c_n^{(3)}$ und $c_n^{(4)}$ die Werte:

$$c_n^{(3)} = 0$$

und

$$c_n^{(4)} \cos \mu_n a = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} g(y) \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y \, dy.$$

Setzen wir insbesondere

$$f(x) = g(y) = A$$

als eine Konstante voraus, um unter dieser Voraussetzung die Lösung explicite darstellen zu können, so ergeben sich für die Koeffizienten $c_n^{(3)}$ und $c_n^{(4)}$ die beiden Ausdsücke

$$c_n^{(2)} \cos \mu_n b = (-1)^n \frac{4A}{(2n+1)\pi}$$

und

$$c_n^{(4)} \cos \lambda_n a = (-1)^n \frac{4A}{(2n+1)\pi}.$$

Werden diese Koeffizienten in die Gleichungen (10) und (12) eingesetzt, so ergibt sich der Wert für die Lösung u. Die Gesamttemperatur

$$u = u_1 + u_2$$

ist daher

$$u = e^{i\nu t} \cdot \frac{4A}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{a} \frac{\pi}{2} x \cos \mu_n y}{(2n+1) \cos \mu_n b} + \right. \tag{13}$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{b} \frac{\pi}{2} y \cos \lambda_n x}{(2n+1) \cos \lambda_n a} \right].$$

Die Lösung unseres Problems erscheint somit als Überlagerung zweier Lösungen. Die physikalische Bedeutung der Zusammensetzung der Lösung aus zwei Teillösungen u_1 und u_2 kann in diesem Falle genau so diskutiert werden, wie es in einer früheren Arbeit des Verfassers geschah.*)

II.

Entwicklung der Lösung in eine Fouriersche Doppelreihe.

Es ist selbstverständlich, daß die gewonnene Lösung in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelt werden kann. Um die Fouriersche Doppelreihe des Lösungsanteiles u_2 herzustellen, müssen wir den von x abhängigen Bestandteil dieser Teillösung in eine Reihe von der Form

$$\frac{\cos \lambda_m x}{\cos \lambda_m a} = \sum_{n=0}^{\infty} d \cos \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a}$$

entwickeln. Die Bestimmung der Konstanten d_n in der üblichen Weise liefert die Entwicklung

$$\frac{\cos \lambda_m x}{\cos \lambda_m a} = 2 \sum_{n}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - \lambda_m^2 a^2}. \tag{14}$$

Ganz entsprechend können wir den analogen Term in der zweiten Teillösung darstellen. Es ist

$$\frac{\cos \mu_n y}{\cos \mu_n b} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{b}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - \mu_n^2 b^2}. \tag{15}$$

Wenn man diese Reihenentwicklung in die Gleichung (13) einsetzt,

*) F. Bock, Časopis pro pěst. mat. a fys. 66 (1937), 159.

so ergibt sich für die Temperatur u folgende Fouriersche Doppelreihe:

$$u = e^{i\nu t} \frac{4A}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left[(m+\frac{1}{2})^2 a^2 + (n+\frac{1}{2})^2 b^2\right] \cos (n+\frac{1}{2}) \frac{\pi x}{a} \cos (m+\frac{1}{2}) \frac{\pi y}{b}}{\left[(m+\frac{1}{2})^2 a^2 + (n+\frac{1}{2})^2 b^2 + \frac{i\nu a^2 b^2}{l\pi^2}\right] (m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}.$$

Bei der Ableitung dieser Doppelreihe wurde die Vertauschung zweier Grenzprozesse vorgenommen. Wenn man die Zulässigkeit dieses Vorganges, was im Einzelnen nicht ausgeführt werden soll, untersucht, so findet man, daß die Vertauschung der Grenzübergänge wegen der gleichmäßigen Konvergenz der auftretenden Reihen sicher gestattet ist, wenn x und y auf ein ganz im Inneren des Rechteckes gelegenes Gebiet beschränkt werden.

Es wäre möglich gewesen gleich vom Anfang an die Lösung in dieser Form darzustellen; daß hier die in Abschnitt 1 durchgeführte Herleitung vorgezogen wurde, kann dadurch gerechtfertigt werden, daß die zur rechnerischen Auswertung der Ergebnisse ohnedies bequemeren einfachen Reihen in diesem besonderen Falle rascher konvergieren als die Doppelreihe. Daß dies tatsächlich der Fall ist, kann man daran ersehen, daß die Glieder der Reihe (13) mit wachsenden n (für $|y| < b$) exponentiell abnehmen, während die Abnahme der Glieder der Doppelreihe mit wachsenden n nur wie eine Potenz dieser Größen erfolgt.

III.

Der Sonderfall $\nu = 0$.

In diesem Abschnitte soll gezeigt werden, daß die im Abschnitte I erhaltene Lösung (13) im Sonderfalle $\nu = 0$, welcher dem stationären Zustand entspricht und sich auf die Konstante A reduziert durch Jacobische Thetafunktionen ausgedrückt werden kann.

Wir wollen die Lösung für die Frequenz $\nu = 0$ mit u_0 und die entsprechenden Teillösungen mit u_{10} bezw. u_{20} bezeichnen, wobei wieder

$$u_0 = u_{10} + u_{20}$$

ist. Umformung der Teillösung u_{10} liefert

$$u_{10} = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{a} \frac{\pi}{2} x \cos \frac{2n+1}{a} \frac{\pi}{2} y}{(2n+1) \cos i \frac{2n+1}{a} \frac{\pi}{2} b}$$

Wir formen den Nennerausdruck

$$\cos i\,\frac{(2n+1)\,\pi}{2}\,\frac{b}{a}$$

folgendermaßen um. Es ist

$$\cos i\,\frac{(2n+1)\,\pi}{2}\,\frac{b}{a}=\frac{e^{-(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}+e^{(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}}{2}=$$

$$=(-1)^n\,i\,\frac{1-(-e^{-\frac{\pi b}{a}})^{2n+1}}{2\,(-e^{-\frac{\pi b}{a}})^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man

$$\sqrt{-e^{-\frac{\pi b}{a}}}=q_1$$

so nimmt u_{10} folgende Gestalt an:

$$u_{10}=\frac{4A}{i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_1^{\,n+\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{(2n+1)\,\pi}{2a}(x+iy)+\cos\frac{(2n+1)\,\pi}{2a}(x-iy)\right]}{(2n+1)\,(1-q_1^{\,2n+1})}.$$

Diese unendliche Summe läßt sich nach Jacobi mittels der Formel*)

$$\log\vartheta_0(v,q)=Q-2\sum_{m}^{1,\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cdot\frac{\cos 2mv\pi}{m}\tag{16}$$

summieren, wobei Q eine von v unabhängige Größe bedeutet. Die Reihe für $\log\vartheta_0(v,q)$ konvergiert, wenn

$$|\mathfrak{Im}\,v|<\left|\frac{\log q}{2\pi}\right|$$

ist. Weiters kann man für den $\log\vartheta_0(v+\frac{1}{2},q)$ schreiben:

$$\log\vartheta_0(v+\tfrac{1}{2},q)=Q-2\sum_{1,\infty}^{m}(-1)^m\frac{q^m}{1-q^{2m}}\cdot\frac{\cos 2mv\pi}{m}\tag{17}$$

Subtrahiert man die Gleichungen (16) und (17), so erhält man die Beziehung:

$$\log\frac{\vartheta_0(v+\frac{1}{2},q)}{\vartheta_0(v,q)}=\log\frac{\vartheta_3(v,q)}{\vartheta_0(v,q)}=4\sum_{m}^{1,\infty}\frac{q^{2m+1}\cos 2\,(2m+1)\,v\pi}{(2m+1)\,(1-q^{2(2m+1)})}.$$

Bei der Subtraktion hebt sich nämlich jedes zweite Glied weg und es bleiben nur die mit ungeraden Zeigern versehenen Glieder stehen. Nach diesen Umformungen erscheint die Teillösung u_{10} in der Form

*) Vergl. z. B. A. Kneser, Integralgleidrungen, 2 Aufl. S. 160.

$$u_{10} = \frac{4A}{\pi i} \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right)}. \tag{10''}$$

In ähnlicher Weise bestimmen wir die zweite Teillösung u_{20}. Es ist

$$u_{20} = \frac{4A}{i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)}{b}\frac{\pi}{2} y \cos i \frac{(2n+1)}{b}\frac{\pi}{2} x}{(2n+1) \cos i \frac{2n+1}{b}\frac{\pi}{2} a}. \tag{12'}$$

Die analoge Umformung wie bei u_{10} führt diesen Ausdruck über in

$$u_{20} = \frac{4A}{i\pi} \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_3\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_0\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}$$

wobei jetzt q_2 den Wert

$$q_2 = \sqrt{-e^{-\frac{\pi a}{b}}}$$

hat. Daher ergibt sich für die Gesamtlösung

$$u_0 =$$

$$\frac{4A}{\pi i} \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_3\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_0\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}.$$

Andererseits muß sich diese Lösung, wie schon am Anfang des Abschnittes erwähnt wurde, auf eine Konstante, nämlich

$$u_0 = A$$

reduzieren. Sonach muß daher zwischen den hier auftretenden Thetafunktionen, die vielleicht nicht uninteressante Beziehung

$$\frac{\vartheta_3\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_3\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_0\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)} = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

bestehen, die also in einer physikalisch sinnvollen Weise abgeleitet erscheint.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Prof. Dr. Rudolf Weyrich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie den Herrn Dr. F. Schobilk und A. Erdélyi für ihre wertvollen Ratschläge meinen besten Dank aussprechen.

Brünn, im April 1937.

*

Rozdělení teploty v pravoúhlém průřezu, na jehož obvodě je teplota dána.

(Obsah předešlého článku).

V předešlém článku je řešena úloha stanoviti rozdělení teploty v pravoúhlém průřezu, je-li dána teplota na jeho obvodě. Řešení je provedeno pro případ, že teplota je periodickou funkcí času, a že její hodnoty na obvodě jsou rozděleny symetricky vzhledem k přímkám spojujícím středy protilehlých stran. Jako speciální případ je stanoveno rozdělení teploty, je-li amplituda teplotních oscilací ve všech bodech obvodu stejná, teplota v těchto bodech závisí tedy jen na čase. To nastane, je-li pravoúhlý vodivý válec vložen do homogenního periodického tepelného pole.