Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Příspěvek k nauce o determinantech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 4, 241--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123431`

Příspěvek k nauce o determinantech.

Podává

prof. dr. F. J. Studnička.

Při mathematických výrazech zasluhují zvláštní pozornosti případy takové, kde nabývají význačných hodnot, především tedy, kdy se *annullují*; neb v takovémto případě plyne z okolnosti této theoreticky závažné i praktický prospěch ten, že není třeba přímým vyčíslením teprve ku poznání annullujícího výsledku dospěti.

A co všeobecně, platí i zvláště o výrazech determinantních, takže v rozvoji nauky jejich soustavně se vyvinují všechny případy, kdy příslušná hodnota jest nullou, kterýchžto případů jest, jakož známo, celá již řada vytčena, aniž by dalo se tvrditi, že jest již vyčerpána, ač kořen všech jest týž.

V následujících řádcích upozorňuji opět na jeden případ zvláštní téhož rázu, an zasluhuje tím větší pozornosti, čím snadněji se přehlédne. Všeobecně možná příslušnou poučku vyjádřiti takto:

Determinant stupně n-tého se annulluje, představuje-li $k < n$ soulehlých prvků všech sloupců (nebo řádků) o sobě po každé vzatých arithmetické řady nanejvýš stupně $(k-2)$ho.

Podlé toho jest na př.

$$\begin{vmatrix} 2, & 4, & 1, & 6 \\ 5, & 3, & 7, & 1 \\ 3, & 1, & 2, & 3 \\ 4, & -1. & 3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

poněvadž u všech sloupců představuje *prvý*, *třetí* a *čtvrtý* prvek arithmetické řady stupně prvého; jestiť

$$\begin{array}{llllll} \text{u řady} & 2, & 3, & 4 & \text{stálý rozdíl} & 1, \\ \text{„} & 4, & 1, & -2 & \text{„ „} & -3, \\ \text{„} & 1, & 2, & 3 & \text{„ „} & 1, \\ \text{„} & 6, & 3, & 0 & \text{„ „} & -3. \end{array}$$

Podobně jest

$$\begin{vmatrix} 2, & 7, & 3, & 5, & 8 \\ 4, & 6, & 1, & -1, & -2 \\ 1, & 2, & 2, & 5, & 10 \\ 6, & 3, & 3, & -1, & -6 \\ 2, & 4, & 3, & 4, & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

poněvadž u všech řádků představuje vždy *prvý, třetí, čtvrtý* a *pátý* prvek arithmetickou řadu stupně druhého. vyjmouc řádek pátý, kde soulehlé prvky představují podobnou řadu stupně pouze prvého, tedy ještě nižšího.

Odůvodnění poskytuje transformační vzorec, podlé něhož se stupeň determinantu snižuje; zde na př. by se obdrželo, nepřihlíží-li se k označení a společnému faktoru, napřed

$$\begin{vmatrix} 16, & -10, & -22, & -6 \\ 3, & 1, & 5, & 2 \\ 36, & -12, & -32, & -10 \\ 6, & 0, & -2, & -1 \end{vmatrix},$$

a při následujícím snížení by vznikly konečně dva sloupce identické, jakož patrno z determinantu dále ještě ztransformovaného

$$\begin{vmatrix} * & -28, & -14 \\ * & 56, & 28 \\ * & 20, & 10 \end{vmatrix},$$

což posledním jest důvodem pro annullování hodnoty daného determinantu.

Poučka dříve všeobecně vytčená jest tedy jen důsledek čili corollarium známého vzorce transformačního.

Jakož jsem v pojednání svém „Über eine neue Determinantentransformation“ (Sitzungsber. d. k. b. Ges. d. Wiss. 28. XI. 1879) ukázal, platí o determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, \ldots, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, \ldots, & l_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, \ldots, & l_3 \\ \vdots & & & \\ a_n, & b_n, & c_n, \ldots, & l_n \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3 \ldots l_n)$$

všeobecně, užijeme-li *Binetova* označení determinantního i dále, vzorec transformační (7), totiž

$$\Delta = \frac{1}{(a_1 b_2 \ldots g_{h-1})^{n-h}} \begin{vmatrix} (a_1 b_2 \ldots h_h\ ), & (a_1 b_2 \ldots i_h\ ), \ldots \\ (a_1 b_2 \ldots h_{h+1}), & (a_1 b_2 \ldots i_{h+1}), \ldots \\ (a_1 b_2 \ldots h_{h+2}), & (a_1 b_2 \ldots i_{h+2}), \ldots \\ \vdots & \\ (a_1 b_2 \ldots h_n\ ), & (a_1 b_2 \ldots i_n\ ), \ldots \end{vmatrix};$$

dále plyne z téhož vzorce transformačního, že hodnota determinantu stupně n-tého se annulluje, představují-li prvky sloupcové nebo řádkové arithmetické řady stupně $(n - 2)$ho, což se i přímým spůsobem obyčejně odůvodňuje.

Spojením obou těchto pouček vzniká poučka zde vytčená, poněvadž za podmínek tam vyslovených se objeví konečně v transformačním vzorci našem buď sloupec nebo řádek samé nully obsahující, takže pak hodnota celého determinantu se stává tím právě nullou.

S hlediska theoretického tedy jeví se býti posledním důvodem všeho annullování hodnot determinantních pouze annullování všech prvků jednoho řádku nebo sloupce, takže i jednoduchá poučka, že *$\Delta = 0$, jsou-li v něm dvě rovnoběžné řady (buď řádky nebo sloupce) identické*, jest též corollarium poučky naší a to nejjednodušším.