Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 1, 80--88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123443

proudil rychlostí
$$v = \sqrt{2hg}.$$
(Srovnej se vzorcem pro výtok kapalin otvorem ve dnu nádoby.)

Ve skutečnosti je výtoková rychlost poněkud menší než jak ji udává theoretický vzorec 3. nebo 4. Proto píše se ve formě pozměněné tím, že se klade před odmocnítko korrekční činitel k, který jest ovšem menší než jednotka, tedy ve formě
$$v = k\sqrt{2hg \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_2}}.$$

Závisí pak onen činitel, jak pochopitelno, na velikosti tření proudu vzduchového o vnitřní stěny komínu, a to tak, že je tím menší, čím tření je větší. Mimo to ovšem není v praxi splněn požadavek, aby teplota vnitřního vzduchu byla podél celé výšky komínu táž.

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti jest soustavu rovnic
$$x + y + x^2 + y^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = 1.$$

K. Rychlík.

Úloha 2.

Řešiti jest soustavu rovnic
$$x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = x^5 + y^5.$$

K. Rychlík.

Úloha 3.

Ukázati jest, že při řešení reciprokých rovnic lze užíti s úspěchem substituce
$$x = \frac{1-y}{1+y}.$$

r.

Úloha 4.

Jsou dány tři řady

$$x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 21,\ x_3 = 119,\ x_4 = 697, \ldots,$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 4,\ y_2 = 20,\ y_3 = 120,\ y_4 = 696, \ldots,$$
$$z_0 = 1,\ z_1 = 5,\ z_2 = 29,\ z_3 = 169,\ z_4 = 985, \ldots,$$

jichž členy postupně lze vypočísti pomocí rovnic

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 4y_n,$$
$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = 4x_n,$$
$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = 4z_n.$$

Dokažte tyto vlastnosti těch řad:

1. Řadu první i druhou dostaneme sečtením stejnolehlých členů tří geometrických řad; řadu třetí podobně ze dvou geometrických řad.

2. Mezi členy daných řad jsou tyto vztahy

$$x_n^2 + y_n^2 = z_n^2,\ x_n - y_n = (-1)^n,$$

t. j. řady ty řeší úkol: Stanoviti racionální trojúhelníky pravoúhlé přibližně rovnoramenné.

3. Součet n členů prvé řady jest úplný čtverec. Součet n členů řady druhé jest střídavě čtverec a číslo menší o 1 nežli čtverec.

Pro třetí řadu pak platí, že absolutní hodnota výrazu

$$z_0 - z_1 + z_2 + \ldots + (-1)^n z_n$$

jest úplný čtverec.

4. Rozdíl $y_n - y_{n-1}$ *jest pro každé* $n > 0$ *čtverec a rozdíl* $x_n - x_{n-1}$ *dvojnásobný čtverec.*

K. Rychlík.

Úloha 5.

Stanoviti racionální trojúhelníky pravoúhlé, při nichž poměr odvěsen se rovná přibližně poměru dvou čísel celých. Zvlášť pak propočítejte případ, že poměr odvěsen jest blízký poměru 1 : 2. (Srovnej úlohu předcházející.)

r.

Úloha 6.

Nechť značí $E\frac{a}{b}$ *největší celistvé číslo obsažené ve zlomku* $\frac{a}{b}$ *a buďtež* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *všecka prvočísla, jež jsou menší anebo rovna danému číslu* N. *Označme dále*

$$\Sigma E\frac{N}{p_1} = [1]_N, \quad \Sigma E\frac{N}{p_1 p_2} = [2]_N, \quad \Sigma E\frac{N}{p_1 p_2 p_3} = [3]_N, \ldots$$

$$\ldots \Sigma E\frac{N}{p_1 p_2 \ldots p_k} = [k]_N,$$

kdež znaménka součtová vztahují se na všecky kombinace z prvočísel $p_1, p_2, \ldots p_n$ *prvé, resp. druhé, třetí, ... k-té třídy* *).

Nechť pak znamená $\{k\}_N$ *počet všech čísel, jež jsou* $\leq N$ *a která jsou dělitelna* k *různými prvočísly a jenom těmi* k *prvočísly. Dokázati jest tyto vztahy:*

$$N - [1]_N + [2]_N - [3]_N + \ldots = 1$$

$$[1]_N - 2[2]_N + 3[3]_N - 4[4]_N \ldots = \{1\}_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[k]_N - \binom{k+1}{1}[k+1]_N + \binom{k+2}{2}[k+2]_N - \ldots$$

$$\ldots = \{k\}_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Tak ku př. jestliže $N = 20$, *jsou* $p_1, p_2, \ldots p_8$ *tato čísla* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 *a jest*

$$[1]_N = E\frac{20}{2} + E\frac{20}{3} + E\frac{20}{5} + \ldots + E\frac{20}{19}$$

$$= 10 + 6 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 26,$$

---

*) Tak ku př. $\Sigma E\frac{N}{p_1 p_2} = E\frac{N}{p_1 p_2} + E\frac{N}{p_1 p_3} + E\frac{N}{p_2 p_3} + \ldots$

$$\ldots + E\frac{N}{p_{n-1} p_n}.$$

$$[2]_N = E\frac{20}{6} + E\frac{20}{10} + E\frac{20}{14} + E\frac{20}{15}$$
$$= 3 + 2 + 1 + 1 = 7,$$
$[3]_N = 0$, $[4]_N = 0$, *atd.*

I jest

$20 - 26 + 7 = 1$, $26 - 14 = \{1\}_N = 12$

$7 = \{2\}_N = 7.$

r.

Úloha 7.

Čísla $[1]_N$, $[2]_N$, $[3]_N$, $\ldots$ $[k]_N$, $\ldots$ *v úloze předešlé stanovená vyjádřiti jest pomocí čísel* $\{1\}_N$, $\{2\}_N$, $\{3\}_N \ldots \{k\}_N \ldots$ *rovněž v úloze předešlé definovaných.*

r.

Úloha 8.

Dokažte ze vztahu prvního úlohy 7., že počet prvočísel menších anebo rovných N jest rovný součtu těchto dvou řad)*

$$\Sigma E\frac{N}{p_1} - 2\Sigma E\frac{N}{p_1p_2} + 3\Sigma E\frac{N}{p_1p_2p_3} - \ldots,$$
$$-\Sigma E\frac{N}{p_1^2} + \Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2} - \Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2p_3} + \ldots,$$

při čemž význam znamének součtových jest týž jako v úloze 6. Ku př. pro $N = 20$ *jest*

$$\Sigma E\frac{N}{p_1^2} = E\frac{20}{4} + E\frac{20}{9} = 7,$$
$$\Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2} = E\frac{20}{12} + E\frac{20}{18} + E\frac{20}{20} = 3,$$

a jest vskutku

$$8 = 26 - 14 - 7 + 3.$$

r.

*) Vztah tento odvodil ruský mathematik Bugajev pomocí t. zv. „theorie funkcí derivovaných“. (Viz Bull. sc. math. astr. 10. 1876. str. 13.)

Úloha 9.

Na delší straně obdélníka jest dán bod. a) Jest najíti obdélník, jehož jedním vrcholem je tento bod, a ostatní leží na ostatních stranách daného obdélníka. b) Jaká musí býti poloha daného bodu, aby úloha měla řešení? c) Značí-li a, b ($a > b$) strany původního a', b' ($a' > b'$) strany vepsaného obdélníka, dokažte, že vždy, pro jakoukoli polohu daného bodu,

$$\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}.$$

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 10.

Dvěma danými koncovými body průměru pevné kružnice jest vésti kružnici, jež protíná jinou pevnou kružnici rovněž v koncových bodech průměru, tak že půlí její obvod (planimetricky.)

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 11.

Dokažte na základě věty o chordálách tří kružnic, že geometrické místo středů kružnic, jež půlí obvody dvou pevných kružnic, je přímka stojící kolmo na spojnici středů obou pevných kružnic; sestrojte tuto přímku!

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 12.

Opírajíce se o výsledek předchozí úlohy, sestrojte kružnici, jež půlí obvody tří pevných kružnic!

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 13.

Podobně řešte úlohu obecnější: Jsou dány tři pevné kružnice K_1, K_2, K_3 a tři pevné body m_1, m_2, m_3. Jest sestrojiti kružnici, jež protíná

kružnici K_1 *v bodech, jichž spojnice jde bodem* m_1,
" K_2 " " " " " m_2,
" K_3 " " " " " m_3.

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 14.

Najděte bod, z něhož se promítá čtveřina bodů harmonických čtyřmi paprsky, z nichž první s třetím, druhý se čtvrtým svírá úhel pravý. Nalezněte úhly, které svírá každý paprsek se svým následujícím!

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 15.

Dokažte, že dvě kružnice, jež stanoví na spojnici středů dvě dvojice bodů, které se oddělují harmonicky, protínají se kolmo!

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 16.

K bodu, v němž libovolný paprsek ohniskem ellipsy vedený protne řídící přímku, ležící na téže straně s ohniskem, najděte poláru; dokažte, že tato polára jde zase ohniskem; nalezněte úhel, který svírá s původním paprskem!

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 17.

Bod m hyperboly rovnostranné promítněte dvěma paprsky z obou reálních vrcholů. Když bod x probíhá hyperbolu, otáčejí se oba paprsky kolem vrcholů opačnými směry stejnou rychlostí, t. j., otočí-li se jeden paprsek o jistý úhel, otočí se druhý směrem opačným o týž úhel.

Dr. *B. Bydžovský.*

Úloha 18.

Půdice trojúhelníka je dána; střed kružnice vepsané leží na dané přímce, která stojí kolmo na půdici. Které je geom. místo třetího vrcholu, a kde leží střed kružnice trojúhelníka při půdici zevně vepsané?

Dr. *Marian Haas.*

Úloha 19.

Uvnitř kruhu s poloměrem R probíhá kružnice s poloměrem r. Vyšetřiti podmínky, za kterých lze sestrojiti řadu n kružnic tak, aby každá z těchto n kružnic se dotýkala zevně kružnic sousedních a n-tá prvé, současně pak, aby každá dotýkala se kružnice o poloměru R uvnitř a kružnice o poloměru r zevně. Podmínky ony jest najíti:

1. jsou-li kružnice o poloměrech R a r soustředné;

2. je-li délka centrály těchto kružnic $2e < R - r$.

Aug. Žáček.

Úloha 20.

Vyjádřiti jest chybu vzniklou při dělení úhlu na tři stejné díly konstrukcí na str. 76. *vyloženou, jakož i hranice této chyby, jestliže dělený úhel jest v intervalech* $0^0 - 30^0$, $30^0 - 60^0$, $60^0 - 90^0$, $90^0 - 120^0$.

Úloha 21.

Redakci „Časopisu“ byla zaslána) tato konstrukce, pomocí níž lze přibližně rozděliti úhel ostrý na tři stejné díly:*

Na obě ramena úhlu $\alpha < 90^0$ *o vrcholu O nanesme od vrcholu stejnou délku,* $OA = OB$. *S bodu A spusťme kolmici na rameno druhé a podobně s bodu B. Paty těchto kolmic nechť jsou C, D. Z bodu C jako středu opišme čtvrtkruh poloměrem CA, jenž v bodě A počíná a končí na rameni OB za bodem B v bodě E a stejně ze středu D poloměrem DB opišme čtvrtkruh BF. Tyto čtvrtkruhy rozdělme (nanášením oblouků šedesátistupňových) na tři stejné díly; dostaneme oblouky arc* $AH =$ *arc* $HK =$ *arc* KE, *arc* $BL =$ *arc* $LM =$ *arc* MF. *Spojíme-li rozpolovací body úseček HM, LK přímkami s vrcholem O, dělí tyto přímky úhel* α *přibližně na tři stejné díly. Jest vyšetřiti největší možnou chybu při této konstrukci v intervalu* $0^0 - 90^0$.

---

*) Studujícím p. V. Krajdlem z Benešova.

Úloha 22.

V rovině buďtež dány tři body svými pravoúhlými souřadnicemi $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. *Pro jaká čísla* p_1, p_2, p_3 *závisí výraz*

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 + (p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2$$

pouze na délkách $A_1A_2 = c$, $A_2A_3 = a$, $A_3A_1 = b$? *Dokažte pak z okolnosti, že výraz daný jest kladný anebo rovný nulle, že* $a + b \geqq c$.

r.

Úloha 23.

Jest dán kruh (ω, r) *) *a v jeho rovině pevný bod* O. *Polára bodu* M *zvoleného na průměru kruhu* (ω, r) *ku* $O\omega$ *kolmém nechť protne přímku* OM *v bodu* M'. *Nalézti jest rovnici geometrického místa bodu* M', *je-li* O *počátkem a* $O\omega$ *osou* X *pravoúhlé soustavy souřadnic.*

Řed. *V. Jeřábek.*

Úloha 24.

Jest dán kruh (O, b) *a v jeho průměru* X *dva souměrně sdružené body* A, B *dle středu* O. *Na průměru* Y *ku* X *kolmém budiž zvolen bod* M *a jeho polára vzhledem ke kruhu* (O, b) *nechť* Y *protne v bodu* M'. *Nalézti jest v pravoúhlé soustavě souřadnic* $O(X, Y)$ *rovnici geom. místa bodu* M', *v němž se* AM *a* BM_1 *(nebo* AM_1 *a* BM*) protínají.*

Řed. *V. Jeřábek.*

Úloha 25.

Dokažte, že kterémukoli polárnímu **) *trojúhelníku paraboly opsaná kružnice má střed svůj na ředitelce.*

Dr. *Marian Haas.*

---

*) To jest kruh o středu ω a poloměru r.

**) Polárním se nazývá onen trojúhelník, jehož každá strana je polárou protějšího vrcholu vzhledem na danou kuželosečku.

Úloha 26.

Dokázati jest tuto větu: Je-li bod $M(x, y)$ na ellipse E

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{kb^2}{a^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2(1+k)^2}=1$$

a rozdělíme-li vzdálenost MO, kde O jest střed ellipsy, body P, Q tak, aby

$$MP : PO = k : 1,$$

$$MQ : QO = \frac{kb^2}{a^2} : 1,$$

vedeme-li pak bodem P rovnoběžku s osou X a bodem Q s osou Y, protnou se tyto rovnoběžky v bodě R ležícím na ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, kterýžto bod jest patou jedné normály z bodu M k této ellipse vedené.

Pro které k jest ellipsa E kruhem? Jaká jest v tomto případě konstrukce jedné normály z bodu M?

r.

Úloha 27.

Dokázati jest, že normály ellipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sestrojené v průsecích ellipsy s přímkou rovnoběžnou s průměrem $y=\frac{b}{a}x$ protínají se na přímce $y=-\frac{a}{b}x$ a naopak, že čtyři paty normál vedených z některého bodu této přímky k ellipse nacházejí se na dvou přímkách rovnoběžných s průměrem $y=\frac{b}{a}x$.

r.

Úloha 28.

Vyšetři, zdali kdy a kolikráte za rok vychází slunce v místech A a B, jichž délky jsou d_1, d_2 a šířky φ_1, φ_2, současně.

K. Čupr.