

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky

Matyáš Lerch

Stanovení mnohonásobného integrálu, jenž vyjadřuje polydimensionální obsah oboru o n rozměrech omezeného danými $n + 1$ útvary prvního stupně, a některých integrálů obecnějších

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 38 (1909), No. 1, 1–5

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123488>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1909

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Stanovení mnohonásobného integrálu, jenž vyjadřuje polydimensionální obsah oboru o n rozměrech omezeného danými $n + 1$ útvary prvního stupně, a některých integrálů obecnějších.

Podává M. Lerch v Brně.

V prostoru o n rozměrech $(x_1, x_2 \dots x_n)$ dáno buď $n + 1$ útvarů prvního stupně $P_0 = 0, P_1 = 0, \dots P_n = 0$, kde značí

$$P_\nu \equiv a_{\nu 0} + a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{\nu n}x_n;$$

při tom změnou znamení u P_ν lze docílití toho, že obor Ω definovaný podmínkami

$$(\Omega) \quad P_0 \geq 0, P_1 \geq 0, \dots P_n \geq 0$$

jest celý v konečnu, a mimo to lze případným přemístěním indexů docílití toho, že determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

je kladný. Obě tyto podmínky předpokládáme splněny, i chceme stanovití n -násobný integrál

$$J = \int \int \dots \int P_0^{s_0-1} P_1^{s_1-1} \dots P_n^{s_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

vzatý dle oboru integračního Ω , při čemž $s_0, s_1, \dots s_n$ jsou konstanty s kladnými částmi reálnými.

Integrál náš přetvoříme substitucí

$$\frac{P_1}{P_0} = z_1, \frac{P_2}{P_0} = z_2, \dots \frac{P_n}{P_0} = z_n.$$

Znamenáme-li

$$\Delta = \frac{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)}{\partial (z_1 z_2 \dots z_n)}$$

funkcionální determinant, bude reciproky determinant

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\partial (z_1 z_2 \dots z_n)}{\partial (x_1 x_2 \dots x_n)}$$

$$= \frac{1}{P_0^{2n}} \begin{vmatrix} P_0 a_{11} - P_1 a_{01}, & P_0 a_{12} - P_1 a_{02}, & \dots & P_0 a_{1n} - P_1 a_{0n} \\ P_0 a_{21} - P_2 a_{01}, & P_0 a_{22} - P_2 a_{02}, & \dots & P_0 a_{2n} - P_2 a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_0 a_{n1} - P_n a_{01}, & P_0 a_{n2} - P_n a_{02}, & \dots & P_0 a_{nn} - P_n a_{0n} \end{vmatrix}$$

možno rozšířiti na determinant stupně $n + 1$, a sice bude

$$\frac{P_0^{2n+1}}{\Delta} = \begin{vmatrix} P_0, & 0, & & 0 & & & 0 & & & 0 \\ P_1, & P_0 a_{11} - P_1 a_{01}, & \dots & P_0 a_{1k} - P_1 a_{0k}, & \dots & P_0 a_{1n} - P_1 a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_r, & P_0 a_{r1} - P_r a_{01}, & \dots & P_0 a_{rk} - P_r a_{0k}, & \dots & P_0 a_{rn} - P_r a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

V tomto determinantu přičteme násobky prvního sloupce k ostatním, a sice ke sloupci $k + 1$ první sloupec násobený a_{0k} :

$$\begin{aligned} \frac{P_0^{2n+1}}{\Delta} &= \begin{vmatrix} P_0, & a_{01}P_0, & \dots & a_{0k}P_0, & \dots & a_{0n}P_0 \\ P_1, & a_{11}P_0, & \dots & a_{1k}P_0, & \dots & a_{1n}P_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_r, & a_{r1}P_0, & \dots & a_{rk}P_0, & \dots & a_{rn}P_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} P_0, & a_{01}, & a_{02}, & \dots & a_{0n} \\ P_1, & a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ P_2, & a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n, & a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} P_0^n. \end{aligned}$$

Očividně jest

$$\begin{vmatrix} P_0 & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ P_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ P_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{21} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A \quad (1)$$

a tedy zní předchozí výsledek

$$\frac{P_0^{2n+1}}{A} = AP_0^n$$

čili

$$A = \frac{P_0^{n+1}}{A} = \frac{\partial (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)}{\partial (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)}. \quad (2)$$

Transformovaný integrál bude tedy zníti

$$J = \int \int \dots \int P_0^s z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1} \dots z_n^{s_n-1} \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_n}{A},$$

kde $s = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n$, a veškeré integrace jdou od nuly do nekonečna.

Nahradíme-li v rovnici (1) výrazy P_ν hodnotami $P_0 z_\nu$, obdržíme

$$P_0 \begin{vmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ z_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ z_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A,$$

a znamenáme-li $A_{\nu 0}$ subdeterminanty prvního slupce, t. j.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ z_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ z_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\nu=0}^n A_{\nu 0} z_\nu, \quad z_0 = 1, \quad (3)$$

bude

$$P_0 = \frac{A}{\sum_0^n A_{\nu 0} z_\nu}. \quad (4)$$

Z této rovnice plyne, že pro veškerá $z_\nu \geq 0$ jest $\sum_0^n A_{\nu 0} z_\nu \geq 0$ a to vyžaduje, aby veškerá $A_{\nu 0}$ byla kladná; neboť kdyby některá $A_{\nu 0}$ byla záporná, mohli bychom zvoliti za příslušná z_ν hodnoty kladné, za ostatní klásti nullu, a pak by výraz P_0 byl záporný pro body uvnitř oboru Ω , což vyloučeno; bude tedy

$$A_{\nu 0} > 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4')$$

Pomocí výrazu (4) přejde poslední tvar integrálu J na

$$J = A^{s-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1} \dots z_n^{s_n-1} dz_1 dz_2 \dots dz_n}{(A_{00} + A_{10}z_1 + A_{20}z_2 + \dots + A_{n0}z_n)^s} \quad (5)$$

Tu užijeme známého vzorce

$$\int_0^\infty e^{-uz} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{u^s}$$

pro $u = \sum_0^n A_{\nu 0} z_\nu$, a obdržíme na místo (5) po obrácení integračního pořadí:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s)}{A^{s-1}} J &= \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-x \sum A_{\nu 0} z_\nu} z_1^{s_1-1} \dots z_n^{s_n-1} dz_1 \dots dz_n \\ &= \int_0^\infty e^{-A_{00}x} x^{s-1} dx \int_0^\infty e^{-A_{10}xz_1} z_1^{s_1-1} dz_1 \\ &\quad \cdot \int_0^\infty e^{-A_{20}xz_2} z_2^{s_2-1} dz_2 \dots \int_0^\infty e^{-A_{n0}xz_n} z_n^{s_n-1} dz_n \\ &= \int_0^\infty e^{-A_{00}x} x^{s-s_1-s_2-\dots-s_n-1} dx \cdot \frac{\Gamma(s_1) \Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{A_{10}^{s_1} A_{20}^{s_2} \dots A_{n0}^{s_n}} \end{aligned}$$

Ježto $s - s_1 - s_2 - \dots - s_n = s_0$, má pravá strana hodnotu

$$\frac{\Gamma(s_0) \Gamma(s_1) \Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{A_{00}^{s_0} A_{10}^{s_1} A_{20}^{s_2} \dots A_{n0}^{s_n}}$$

a tedy máme vzorec výslední

$$\begin{aligned} &\int \dots \int P_0^{s_0-1} P_1^{s_1-1} \dots P_n^{s_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(s_0) \Gamma(s_1) \dots \Gamma(s_n)}{\Gamma(s_0 + s_1 + \dots + s_n)} \frac{A^{s_0+s_1+\dots+s_n-1}}{A_{00}^{s_0} A_{10}^{s_1} \dots A_{n0}^{s_n}} \quad (I) \end{aligned}$$

Integrační podmínky znějí:

$$P_\nu \equiv a_{\nu 0} + a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{\nu n}x_n \geq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n),$$

i má jimi stanovený obor být konečný; A značí determinant koeficientů a $A_{\nu 0}$ jsou subdeterminanty jeho prvního sloupce.

Jako vedlejší výsledek poznamenejme, že, je-li obor definovaný nerovnostmi

$$P_0 \geq 0, P_1 \geq 0, \dots, P_n \geq 0$$

konečný, a je-li při tom determinant $|a_{\mu\nu}|$ ($\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$) kladný, budou též subdeterminanty $A_{\nu 0}$ jeho prvního sloupce veličiny kladné.

Zvolíme-li $s_0 = s_1 = s_2 = \dots = s_n = 1$, přejde integrál (I) na

$$\int \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

což jest polydimensionální obsah oboru Ω , a výsledek zní

$$\Omega = \frac{1}{n!} \frac{A^n}{A_{00} A_{10} A_{20} \dots A_{n0}}. \quad (\text{II})$$

Pro $n = 2$ máme odtud známý vzorec pro plochu trojúhelníka, jehož strany mají v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnice

$$P_0 \equiv a_{00} + a_{01}x + a_{02}y = 0,$$

$$P_1 \equiv a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0,$$

$$P_2 \equiv a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0,$$

při čemž

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Pro $n = 3$ podává (II) krychlový obsah čtyřstěnu, jehož stěny mají v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnice

$$P_\nu \equiv a_{\nu 0} + a_{\nu 1}x + a_{\nu 2}y + a_{\nu 3}z = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3).$$