Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O deduktivním odůvodnění binomialní poučky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 4, 145--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123544

O deduktivním odůvodnění binomialní poučky.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.

Jak známo, odvozuje se tak zvaná binomialní poučka způsobem dvojím, a sice *induktivním,* pokud jest mocnitelem celistvé číslo positivní, a *deduktivním* pro jakou koli realní hodnotu mocnitele vůbec; tento způsob užívá pouček počtu differencialního, zejména buď derivování ve spojení s poučkou o neurčitých součinitelích nebo pravidla Taylorova anebo Maclaurinova, kdežto způsob první odvozuje ze složení řady binomialní, ve zvláštních případech známého, složení její v případě všeobecném, načež se dokazuje zvláštními obraty platnost její i pro mocnitele negativního a lomeného.

Dále jest taktéž známo, který způsob odvozování jest se stanoviska logického dokonalejší, ač se právě v mathematice methoda induktivní, spojena jsouc s tak zvaným závěrkem z n na $(n+1)$ nesmí podceňovati; z čehož plyne snaha, aby se poučka binomialní i pouhými prostředky obecné arithmetiky deduktivně vyvinula.

Hlavní obtíže, jež tu jest překonati, vztahují se k vyšetření koëfficientů zvláštních, jež řadu binomialní charakterisujíce též *binomialní* — uniciæ binomiales — slují; neb složení ostatních členů řady jest naprosto jasné, jelikož pro celistvé a positivní n zajisté platí

$$(a+1)^n = A_0a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2} + \ldots + A_{n-1}a + A_n, \quad (1)$$

protože vedle nejvyšší mocniny n se ještě všechny nižší mohou tu u veličiny a vyskytovati znásobeny jistými koëfficienty A.

Abychom pak vyšetřili význam těchto součinitelů

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n,$$

jež dosud neznáme, pišme ve vzorci (1) místo libovolného a jinou veličinu, dejme tomu b, takže pak opět bude

$$(b+1)^n = A_0 b^n + A_1 b^{n-1} + A_2 b^{n-2} + \ldots + A_{n-1} b + A_n,$$

načež obdržíme, odečteme-li na obou stranách těchto dvou stejnin od sebe,

$$(a+1)^n - (b+1)^n =$$
$$A_0 (a^n - b^n) + A_1 (a^{n-1} - b^{n-1}) + A_2 (a^{n-2} - b^{n-2}) \ldots$$
$$+ A_{n-1} (a-b).$$

A poněvadž, jak patrno, platí stejnina

$$(a+1) - (b+1) = a - b,$$

povstane, dělíme-li obě strany předešlé stejniny stejnolehlými stranami této stejniny a užijeme-li známého pravidla o dělení takovýchto rozdílů platícího,*)

$$\begin{aligned}
&(a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-2}(b+1) + (a+1)^{n-3}(b+1)^2 + \ldots \\
&\qquad + (b+1)^{n-1} \\
&= A_0 (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1}) \\
&+ A_1 (a^{n-2} + a^{n-3} b + a^{n-4} b^2 + \ldots\ldots + b^{n-2}) \\
&+ A_2 (a^{n-3} + a^{n-4} b + a^{n-5} b^2 + \ldots + b^{n-3}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ A_{n-1}.
\end{aligned}$$

Poněvadž tu jest a i b libovolné, nepozbude platnosti tato stejnina, učiníme-li tu $a = b$, načež z ní patrně povstane

$$n(a+1)^{n-1} = n A_0 a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + (n-2) A_2 a^{n-3} + \ldots$$
$$+ A_{n-1}. \tag{2}$$

A stejnina tato, kteráž představuje výsledek derivace stejniny (1), představuje jaksi vrchol celé odvozovací methody; neb jakmile nějakým spůsobem k ní přijdeme, jest další postup jednoduchý a zcela patrný. Znásobíme-li totiž stejninu (1) veličinou n a stejninu (2) součtem $(a+1)$, obdržíme na levé straně stejný výsledek, totiž $n(a+1)^n$, z čehož soudíme, že i řady na pravé straně se vyskytující se sobě rovnají, že tedy

$$n A_0 a^n + n A_1 a^{n-1} + n A_2 a^{n-2} + \ldots + n A_{n-1} a + n A_n$$
$$= n A_0 a^n + \left.\begin{matrix} (n-1) A_1 \\ n A_0 \end{matrix}\right| a^{n-1} + \left.\begin{matrix} (n-2) A_2 \\ (n-1) A_1 \end{matrix}\right| a^{n-2}$$
$$+ \ldots + \left.\begin{matrix} A_{n-1} \\ 2A_{n-2} \end{matrix}\right| a \quad + A_{n-1}.$$

*) *Studnička* „Algebra“ I. vyd. pag. 31. a II. vyd. pag. 28.

Porovnáme-li tu koëfficienty stejně vysokých mocnin, obdržíme řadu vzorců

$$A_1 = n\, A_0,$$
$$2A_2 = (n-1)\, A_1,$$
$$3A_3 = (n-2)\, A_2,$$

všeobecně

$$k\, A_k = (n-\overline{k-1})\, A_{k-1}, \tag{3}$$

a konečně

$$(n-1)\, A_{n-1} = 2A_{n-2}\,,$$
$$n\, A_n = A_{n-1}\,.$$

Znásobíme-li tu na obou stranách, obdržíme především

$$A_n = A_0\,,$$

a vynecháme-li před násobením vzorce první a poslední

$$A_{n-1} = A_1\,,$$

vynecháme-li před násobením první a poslední dva vzorce,

$$A_{n-2} = A_2\,,$$

a všeobecně

$$A_{n-k} = A_k\,, \tag{4}$$

což znamená, že koëfficienty členů řady (1) stejně daleko vzdálených od konců se sobě rovnají.

A poněvadž ze vzorce (1) jde pro $a = 0$ přímo

$$1 = A_n = A_0\,,$$

obdržíme, násobíce soustavu vzorců (3) až do členu všeobecného na obou stranách,

$$k!\, A_k = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-\overline{k-1})\,,$$

z čehož plyne obyčejným řešením konečně

$$A_k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-\overline{k-1})}{1.\;2.\;3\;\ldots\;k} = \binom{n}{k} = (n)_k\,. \tag{5}$$

Znajíce nyní hodnoty součinitelů A řady (1), známe i poučku binomialní pro celistvé a positivní hodnoty mocnitele n.

Jak se platnost této poučky rozšiřuje i na ostatní realné hodnoty mocnitele n bez užívání vyšší analyse, tedy jen pomocí pravidel obecné arithmetiky, budiž taktéž zde připojeno, aby se tím doplnil příslušný program vyučování středního.

Je-li především n číslo celistvé a negativní, bude

$$(1+a)^{-n} = \frac{1}{(1+a)^n} = 1 + A_1\, a + A_2\, a^2 + A_3\, a^3 + \ldots, \tag{6}$$

jelikož pro $a = o$ první člen pravé strany má hodnotu 1; z této stejniny plyne pak, převedeme-li $(1 + a)^n$ na pravou stranu a a použijeme-li vzorce binomialního pro positivní a celistvé n platného,

$$1 = (1 + A_1\,a + A_2\,a^2 + \ldots)\,(1 + (n)_1\,a + (n)_2\,a^2 + \ldots)$$

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
= & 1 + A_1 & a + A_2 & a^2 + A_3 & a^3 + \ldots \\
 & (n)_1 & (n)_1\,A_1 & (n)_1\,A_2 & \cdot \\
 & & (n)_2 & (n)_2\,A_1 & \cdot \\
 & & & (n)_3 & \cdot
\end{array}$$

porovnáme-li konečně koëfficienty stejně vysokých mocnin na obou stranách, na levé straně řadu doplňujíce součiny mocnin a s nullou, obdržíme soustavu vzorců

$$\begin{aligned}
&A_1 + (n)_1 = 0\,,\\
&A_2 + (n)_1\,A_1 + (n)_2 = 0\,,\\
&A_3 + (n)_1\,A_2 + (n)_2\,A_1 + (n)_3 = 0\,,\\
&A_4 + (n)_1\,A_3 + (n)_2\,A_2 + (n)_3\,A_1 + (n)_4 = 0\,,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

všeobecně

$$A_k + (n)_1\,A_{k-1} + (n)_2\,A_{k-2} + \ldots + (n)_k = 0\,.$$

Postupným řešením obdržíme pak snadno

$$\begin{aligned}
&A_1 = -n = (-n)_1\,,\\
&A_2 = -\frac{n}{2}(-n-1) = (-n)_2\,,\\
&A_3 = -\frac{n}{6}(-n-1)(-n-2) = (-n)_3\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

a všeobecně $A_k = (-n)_k$,

takže dosadíme-li tyto hodnoty do řady (6), obdržíme

$$(1 + a)^{-n} = 1 + (-n)_1\,a + (-n)_2\,a^2 + (-n)_3\,a^3 + \ldots\,, \tag{7}$$

z čehož patrno, že *binomialní poučka platí i pro negativní hodnotu mocnitele celistvého.*

Zároveň jde ze vzorce (7) na jevo, že řada binomialní tu jde do *nekonečna*, jelikož není žádný z příslušných součinitelů binomialních nullou.

Abychom konečně ještě důkaz vedli, že poučka tato platí i pro lomenou hodnotu mocnitele, představme si, že m a n značí čísla celistvá a nesoudělná, načež bude všeobecně

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} = 1 + A_1\, a + A_2\, a^2 + A_3\, a^3 + \ldots, \quad (8)$$

$$(1+b)^{\frac{m}{n}} = 1 + A_1\, b + A_2\, b^2 + A_3\, b^3 + \ldots,$$

z čehož plyne, odečteme-li na obou stranách,

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} - (1+b)^{\frac{m}{n}} = A_1\,(a-b) + A_2\,(a^2-b^2) + A_3\,(a^3-b^3) + \ldots$$

Položíme-li pak k vůli zjednodušení

$$1 + a = u^n, \quad 1 + b = v^n,$$

takže platí

$$a - b = u^n - v^n,$$

a dělíme-li poslední stejninu příslušnými členy této stejniny, obdržíme podlé známého pravidla

$$\frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} = A_1 + A_2\,(a+b) + A_3\,(a^2 + ab + b^2) + \ldots;$$

zároveň pak platí podlé téhož pravidla

$$\frac{u^m - v^m}{u - v} = u^{m-1} + u^{m-2}\, v^m + u^{m-3}\, v^2 + \ldots + v^{m-1},$$

$$\frac{u^n - v^n}{u - v} = u^{n-1} + u^{n-2}\, v + u^{n-3}\, v^2 + \ldots + v^{n-1},$$

takže tu dělením a porovnáním obou posledních výsledků obdržíme

$$\frac{u^{m-1} + u^{m-2}\, v + \ldots + v^{m-1}}{u^{n-1} + u^{n-2}\, v + \ldots + v^{n-1}}$$

$$= A_1 + A_2\,(a+b) + A_3\,(a^2 + ab + b^2) + \ldots$$

Učiníme-li tu konečně

$$u = v \text{ čili } a = b,$$

povstane ze vzorce posledního

$$\frac{m\, u^{m-1}}{n\, u^{n-1}} = \frac{m}{n}\, \frac{u^{n \cdot \frac{m}{n}}}{u^n} = \frac{m}{n}\, \frac{(1+a)^{\frac{m}{n}}}{1+a}$$

$$= A_1 + 2A_2\, a + 3A_3\, a^2 + \ldots,$$

což jest obdobná stejnina s (2), takže další spůsob odvozování tu bude podobným. Obdržímeť pomocí stejniny (8)

$$\frac{m}{n}\,(1 + A_1\, a + A_2\, a^2 + \ldots) = (1+a)\,(A_1 + 2A_2 a + 3A_3 + \ldots)$$

a porovnání koëfficientů stejně vysokých mocnin libovolné veličiny a soustavu vzorců, podobnou soustavě (3), z nichž všeobecný vzorec jest

$$k A_k = \left(\frac{m}{n} - k - 1\right) A_{k-1},$$

takže tu konečně stejnými obraty si zjednáme

$$A_k = \left(\frac{m}{n}\right)_k; \tag{9}$$

ze stejniny (8) plyne, dosadíme-li tam hodnoty vzorcem (9) určené,

$$(1+a)^{\frac{m}{n}} = 1 + \left(\frac{m}{n}\right)_1 a + \left(\frac{m}{n}\right)_2 a^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_3 a^3 + \ldots, \tag{10}$$

z čehož patrno, že *binomialní poučka platí i pro lomené hodnoty mocnitele.*

A poněvadž v řadě (10) žádný součinitel binomialní nestane se nullou, jde patrně tato řada i v tomto případu *do nekonečna.*

Jak z toho spůsobu odvozování a odůvodňování jest patrno, nevyžaduje se nikde znalosti vyšší analyse, nýbrž užívá se jen známých pouček o *dělení* platících a pak tak zvané poučky *o neurčitých součinitelích,* kteráž vyjádřuje pravidlo, že součinitelové mocnin stejně vysokých jsou ve dvou sobě stejných a podlé stejné *libovolné* veličiny spořádaných řadách rovni, jejíž odvození jest taktéž velmi snadné. Neb jestli pro libovolné x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

obdržíme pro $x = 0$ přímo $a_0 = b_0$; a dělíme-li pak veličinou x, povstane podobná stejnina

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots,$$

z níž plyne pro $x = 0$ opět přímo $a_1 = b_1$; a takto postupujíce, obdržíme všeobecně

$$a_k = b_k,$$

což vyjadřuje krátce poučku svrchu jmenovanou.

Konečně není nutno poznamenati, že odvozování tohoto druhu nepřesahují meze pro střední školy vytknuté, jelikož jsou snadnější nežli důkazy pomocí vzorců kombinačních vedené, jaké program předpisuje.