Eduard Čech

Un théorème sur l'accessibilité

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 175--176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123557

Sur les retractes absolus.

K. Borsuk - S. Mazurkiewicz, Warszawa.

On démontre l'existence dans R_2 d'un retracte absolu A qui n'est pas la somme d'un nombre fini resp. d'une infinité dénombrable de retractes absolus différents de A, et d'un retracte de voisinage B qui n'est pas la somme d'un nombre fini resp. d'une infinité dénombrable de retractes absolus.

Sur la caractérisation topologique du plan.

Eduard Čech, Brno.

Dans un ouvrage sur la théorie des ensembles de points que je prépare pour la publication (en tchèque), j'ai fondé la topologie du plan sur les axiomes de M. Kuratowski (Fund. Math. XIII, 307—318). La démonstration que ces axiomes suffisent à caractériser le plan étant pénible, j'en ai trouvé une autre. Plus tard, M. Knaster a rappelé mon attention sur un Mémoire de M. Whitney (Trans. Amer. Math. Soc. XXXV, 261—273) qui s'occupe à peu près du même sujet. J'ai vu que ma méthode est presque celle de M. Whitney; tout comme cet auteur, je réduis la difficulté à un lemme qui affirme que l'espace peut être partagé en un nombre fini de domaines arbitrairement petits, la frontière de chaque domaine étant une courbe simple fermé. Or ma démonstration de ce lemme, s'appuyant directement sur les axiomes de M. Kuratowski, est entièrement différente de celle (l. c., p. 270—272) de M. Whitney.

Un théorème sur l'accessibilité.

Eduard Čech, Brno.

Soit S un sous-ensemble fermé du E_n euclidien. Un point x de S soit appelé t o t a l e m e n t a c c e s s i b l e si, V étant un entourage arbitraire de x, il n'existe aucune suite $\{y_\nu\}$ telle que (1) $y_\nu \in V - S$, (2) $\lim y_\nu = x$, (3) ν étant arbitrairement donné, il est impossible de unir y_ν et x par un arc simple situé dans $(x) + V - S$. M. Alexandroff a prouvé (Comptes Rendus Paris t. 198, p. 228) que l'accessibilité totale est une propriété intrinsèque de l'ensemble S au point x.

Le point x de S soit appelé quasi-totalement accessible si, V étant un entourage arbitraire de x, une suite $\{y_\nu\}$ jouissant des propriétés (1), (2), (3) ne peut exister que si le diamètre de P_ν converge vers zéro, P_ν étant la composante de $E_n - S$ telle que $y_\nu \in P_\nu$. J'ai prouvé que l'accessibilité quasi-totale est aussi une propriété intrinsèque de S en x.

Les deux théorèmes restent vrais en remplaçant E_n par un espace beaucoup plus général.

Détermination de la classe la plus générale d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace concret de Hilbert.

Maurice Fréchet, Paris.

I. En vue des applications à la physique mathématique, M. von Neumann a défini des espaces abstraits qui sont vectoriellement applicables sur l'espace concret de Hilbert. Il considère à cet effet des espaces abstraits affines, c'est à dire où l'on a défini convenablement la somme de deux éléments et le produit d'un élément par une constante. Et il suppose qu'on y a défini convenablement un produit scalaire dissymétrique, $((f \,.\, g))$ de deux éléments.

Il définit ensuite accessoirement la distance fg de deux éléments comme la valeur de $(([f - g] \,.\, [f - g]))$.

Dans la géométrie élémentaire classique, la distance est une notion primordiale et le produit scalaire une notion secondaire non essentielle mais commode.

Il est possible d'opérer de même dans la géométrie des espaces abstraits.

II. Les fondateurs du Calcul vectoriel, Grossmann en particulier, avaient défini des espaces abstraits vectoriels. D'autre part, nous avons défini des espaces abstraits distanciés. En associant ces deux notions, M. M. Banach et Wiener ont introduit la notion d'espace abstrait vectoriel distancié.

Dans un tel espace, il est naturel de définir un produit scalaire symétrique $(f \,.\, g)$, exactement comme en géométrie élémentaire, par la relation

$$fg^2 = hf^2 + hg^2 - 2\,(hf \,.\, hg).$$

En particulier:

$$fg^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\,(f \,.\, g)$$

en posant

$$\|f\| = 0f,\ \|g\| = 0g,\ (f \,.\, g) = (0f \,.\, 0g).$$

III. L'espace concret Ω de Hilbert est un espace vectoriel distancié où chaque élément f est défini par une suite de nombres $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ tels que la série