Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Poznámka k eliminaci při soustavě lineární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 3, 187--189

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123689`

o kterémžto integralním vzorci tamtéž *Hermite* praví „dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation".

Položíme-li podobně, jako v případě posledním,

$$z = a + (ax + b) \operatorname{tg} x,$$

takže bude pak

$$dz = u \sec^2 x dx, \qquad \text{tedy} \qquad dx = \frac{\cos^2 x}{u} dz,$$

obdržíme především

$$\int \frac{a dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = \int \frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2};$$

integrujeme-li tu po částech, povstane dále

$$\int \frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{dz}{z^2}$$

$$= - \frac{a \cos^2 x}{u} \cdot \frac{1}{z} + \int \frac{-2au \cos x \sin x - 2a^2 \cos^4 x}{u^2 z} dx$$

$$= - \frac{a \cos^2 x}{uz} - \int \frac{2a \cos^2 x}{u^2} dx;$$

poněvadž zároveň platí

$$2a \cos^2 x dx = du,$$

obdržíme se zřetelem k integralu poslednímu

$$\int \frac{a dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = - \frac{a \cos^2 x}{uz} - \int \frac{du}{u^2}$$

$$= - \frac{a \cos^2 x}{uz} + \frac{1}{u} = \frac{z - a \cos^2 x}{uz}$$

a vrátíme-li se konečně k významu litery z, vzorec (4), jejž i *Hermite* uvádí.

Poznámka k eliminaci při soustavě linearní.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Má-li soustava n stejnoměrných rovnic linearních

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = 0$$

$$\Sigma a_{2j} x_j = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Sigma a_{nj} x_j = 0$$

míti platnost pro hodnoty neznámých

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

různé s nullou, tu nutno, aby koëfficienty její

$$a_{ij} (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

vyhověly podmínce, jakož známo,

$$\Delta = 0,$$

značí-li Δ determinant této soustavy.

Zároveň pak známo, že tu platí o jednotlivých neznámých srovnalost

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{A_{ih}}{A_{ik}}, \; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

značí-li A_{ij} subdeterminant příslušný prvku a_{ij}.

Co se týče odvození těchto dvou pouček, jež provádějí se spůsoby rozmanitými, můžeme si též počínati takto:

Ustanovme ze soustavy n nestejnoměrných rovnic

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \alpha_n, \end{array} \quad (1)$$

jejíž determinant značí Δ, podle známého pravidla

$$x_h = \frac{\alpha_1 A_{1h} + \alpha_2 A_{2h} + \ldots + \alpha_n A_{nh}}{\Delta},$$

$$x_k = \frac{\alpha_1 A_{1k} + \alpha_2 A_{2k} + \ldots + \alpha_n A_{nk}}{\Delta},$$

načež bude podíl obou hodnot

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{\alpha_1 A_{1h} + \alpha_2 A_{2h} + \ldots + \alpha_n A_{nh}}{\alpha_1 A_{1k} + \alpha_2 A_{2k} + \ldots + \alpha_n A_{nk}}, \quad (2)$$

neb učiníme-li tu všeobecně

$$\alpha_k = \varepsilon_k \alpha_i \; (k = 1, 2, \ldots, n), \; \varepsilon_i = 1$$

a odstraníme-li pak společného činitele α_i,

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{\varepsilon_1 A_{1h} + \varepsilon_2 A_{2h} + \ldots + A_{ih} + \ldots + \varepsilon_n A_{nh}}{\varepsilon_1 A_{1k} + \varepsilon_2 A_{2k} + \ldots + A_{ik} + \ldots + \varepsilon_n A_{nk}}.$$

Přejde-li pak soustava (1) ve stejnoměrnou tím, že

$$\alpha_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

čímž se podlé předešlého zároveň stane též

$$\varepsilon_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

obdržíme z posledního poměru přímo*)

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{A_{ih}}{A_{ik}}. \tag{3}$$

Z tohoto vzorce plyne pak v jednotlivých případech

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{A_{i1}}{A_{i2}} \quad \text{neboli} \quad \frac{x_1}{A_{i1}} = \frac{x_2}{A_{i2}}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{A_{i2}}{A_{i3}} \quad \text{"} \quad \frac{x_2}{A_{i2}} = \frac{x_3}{A_{i3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{A_{i,n-1}}{A_{i,n}} \quad \text{"} \quad \frac{x_{n-1}}{A_{i,n-1}} = \frac{x_n}{A_{in}},$$

což možná spojiti v jedinou srovnalost složitou

$$\frac{x_1}{A_{i1}} = \frac{x_2}{A_{i2}} = \frac{x_3}{A_{i3}} = \ldots = \frac{x_n}{A_{in}} = p, \tag{4}$$

kdež značí p hodnotu poměru tohoto.

A z téhož poměrů stálého plyne dále

$$x_1 = pA_{i1}$$
$$x_2 = pA_{i2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = pA_{in},$$

takže, násobíme-li tyto rovnice, jak po sobě jdou, veličinami

$$a_{i1}, \ a_{i2}, \ \ldots, \ a_{in},$$

a sečteme-li pak na obou stranách, povstane

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = p \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik};$$

a poněvadž levý stejnoměrný výraz má hodnotu 0, na pravé straně pak vyznačený součet představuje determinant soustavy Δ, jest tu

$$0 = p\Delta,$$

z čehož plyne známý výsledek elliminační

$$\Delta = 0,$$

o němž byla na počátku zmínka učiněna.

---

*) Táž relace vyplyne z poměru (2), určíme-li dle známého pravidla derivováním pravou hodnotu zlomku

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{0}{0},$$

jakýž povstane, učiníme-li tam $x_k = 0$.