Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jar. Simerský

Příspěvek k metodice složitého úrokování

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 1, D16--D24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123702

VYUČOVÁNÍ.

Příspěvek k metodice složitého úrokování.

Dr. Jar. Simerský, Třeboň.

Úvod. Složité úrokování patří k těm oborům středoškolské matematiky, kde je k správnému řešení úloh velmi žádoucí dobrý názor, když se jedná většinou o úlohy dosti složité. Naše učebnice přihlížejí zpravidla jen k úlohám základním, jednoduchým a spokojují se odvozením formulí pro vzrůst a diskont jistiny, pro výpočet nastřádaného kapitálu, ukládají-li se pravidelně jisté částky vždy na začátku (nebo na konci) roku, pro výpočet jistiny, zajišťující roční rentu atd. Třebaže se tyto základní úlohy řešiti musí, aby se staly spolehlivým základem pro další úlohy složité, přece nejsem asi daleko od pravdy, soudím-li, že ony různé formule nemají často pro žáka valné ceny. Na př. formule pro výpočet nastřádané jistiny může žák použíti jen v tom případě, že terminy vkladů souhlasí s terminy úrokovacími. Kdybychom žádali, aby žák znal zpaměti všechny možné formule, kterých by bylo třeba k řešení oněch rozmanitých úloh, jež tvoří učebnou látku našeho středoškolského složitého úrokování, byla by jeho paměť velmi a zbytečně přetěžována a výsledek by byl asi ten, jak zcela otevřeně uvádí známý metodik W. Lietzmann,[1]) že by žák sáhl obyčejně po formuli nepatřičné. Ostatně žádný moderní učitel, úzkostlivě se varující, aby neučinil z matematické výuky šablonu, nemůže spatřovati splnění učebného úkolu nejvyšších tříd střední školy v tom, aby žák prostě dovedl na speciální případ aplikovati formule a užitím tabulek je vyčíslovati. Kloním se proto k náhledu, jejž jako jednu ze schůdných cest doporučuje l. c. Lietzmann, nežádati od žáků zpaměti vůbec žádných formulí krom vzorce $K_n = K_0 q^n$ (z něhož ihned plyne formule pro diskontování), všechny úlohy pak řešiti sestavováním a sčítáním geometrických řad. Nad to nežádám od žáků ani znalosti obecného výrazu pro střadatele Q, zásobitele R a umořovatele U, když přece jsou uvedeny v záhlaví tabulek.

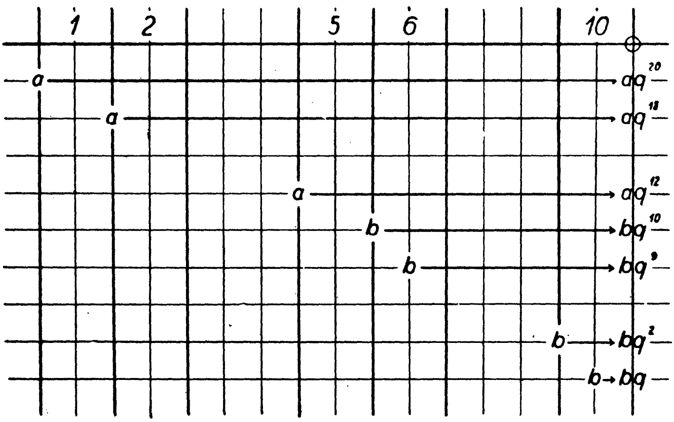
[1]) Methodik des math. Unterrichts, II, 251.

Ovšem mnozí žáci si je zapamatují, když bylo rozřešeno několik úloh, v nichž je možno Q, R nebo U použíti.

Postavíme-li se však na toto stanovisko, pak musíme dát žákům spolehlivý návod, jak se mají k úlohám stavěti a je řešiti. A tento metodický návod je předmětem našeho pojednání; bude založen na zásadě, že cesta k porozumění vede rukama a očima.

Vzrůst a diskontování jistiny. Protože řešení všech úloh budeme opírati jedině o formuli $K_n = K_0 q^n$, vyžadujme, aby žák tuto formuli nejen bezpečně znal zpaměti (zapamatuje se velmi snadno), nýbrž aby ji uměl odvoditi a vyjádřiti z ní hbitě K_0, q, n. Nechť spolehlivě liší úrokování celoroční (p. a., t. j. per annum) od pololetního (p. s., t. j. per semestre); a protože je dnes v praxi obvyklé úrokování p. s., budiž k němu při řešení úloh přihlíženo větší měrou, než jak vyžadují naše známé sbírky úloh z matematiky. Jedná-li se v některé složitější úloze o dvojí úrokovou míru nebo vyskýtá-li se vedle úrokování p. s. též úrokování p. a., je radno k úročiteli q připojovati indexy, souhlasící s počtem procent, tedy na př. $q_2 = 1{,}02$, $q_{4,5} = 1{,}045$. Důležité je dále zavésti jednou pro vždy pravidlo pro indexování vzrůstající jistiny. V úlohách, neopírajících se o určitý letopočet, existuje vždy jistý rok, jejž chápeme jako prvý. Hodnotu jistiny na začátku tohoto roku označujme K_0, její hodnotu na konci tohoto roku (čili na začátku roku druhého) K_1 atd., na konci n-tého roku K_n, a to i tehdy, když se jedná o úrokování pololetní. Budeme tedy psáti na př. při 4% p. s. $K_{10} = K_0 q_2{}^{20}$ a nebudeme se rozpakovati užít označení na př. $K_{8,5}$ pro hodnotu jistiny na konci sedmnáctého pololetí. Jsou-li časové údaje úlohy stanoveny letopočtem, pak analogicky bude znamenati K_{1925} hodnotu jistiny na konci roku 1925, její hodnotu na začátku roku 1935 pak označíme K_{1934}. Soudím, že úlohy získají pro žáka na „životnosti", když je budeme zakládat na letopočtech. (Formule pro vzrůst jistiny bude pak míti tvar na př. $K_{1940} = K_{1934} q^{12}$ při úrokování p. s., ježto od konce r. 1934 do konce r. 1940 uplyne 6 let.)

Střádání. Úlohy, týkající se střádání, rent, umořování a cenných papírů, kde je základem vzrůst neb diskont jistin, doporučuji opříti o názor vhodného schématu. Nepochybuji o tom, že mnozí naši profesoři takových schémat užívají, snad v různých formách, s tím společným cílem, aby jediný pohled dal žáku dobrou představu o celém „ději" úlohy. Takové schéma není vlastně nic jiného než to, čemu ve fysice říkáme časové rozvinutí. Kdežto však někteří učitelé dávají zapisovati jednotlivé údaje úlohy na jedinou přímku, časovou osu, doporučuji užívati schématu obšírnějšího (aspoň zpočátku, než žák nabude jisté prakse), v němž každý z vypsaných údajů úlohy má svou vlastní časovou osu. Sestaviti takové schéma je velmi jednoduché, užívají-li žáci čtverečkovaného papíru,[2]) jak dále o tom bude řeč. Nemohu však souhlasiti s tím, aby se na př. při střádání, kdy se pravidelně ukládají stále stejné částky vždy na začátku roku, tyto vklady zapisovaly na časovou osu takto: $a_1, a_2, \dots$ Nemáme-li žáka uváděti v omyl, musíme trvati na tom, aby se na časové ose stejné částky označovaly stejným znakem. Když je ovšem úročíme, pak je možno tyto částky, zúročené k témuž terminu, lišiti indexy. Ve schématu dále uvedeném nebude však toho třeba.



Schema 1.

Za podklad schématu užívají žáci, jak bylo řečeno, čtverečkovaného papíru. Zpočátku budou črtati vertikály, značící postupně počátek roku 1, 2 atd. Později si schéma zjednoduší. Budiž na př. dána úloha takováto: „Kdosi ukládá po 5 let vždy počátkem roku částku *a*, po dalších 5 let vždy na začátku každého pololetí částku *b*. Jakou hodnotu má nastřádaná jistina na konci 10. roku, je-li úroková míra 4% p. s.?“

Žák nechť sestavuje schéma ihned po opakování úlohy a doprovází je slovy asi takto: „Na začátku 1. roku byla uložena částka *a*, taktéž na začátku roku 2. atd. až poslední na začátku roku 5. Na začátku roku 6. byla uložena částka *b*, v pololetí 6. roku rovněž, až poslední v pololetí roku 10. Chceme zjistiti hodnotu nastřádané jistiny na konci 10. roku.“ (Kroužek na příslušné verti-

[2]) Učitel užije menší pomocné tabule čtverečkované. Autor dal si zhotoviti takovou tabuli z tenké překližky se silnějším rámem, do něhož jsou nahoře zašroubována dvě šroubová vřetena, zakončená kovovými kroužky, jimiž se tabule zavěsí na dva háky, zachycené na tabuli hlavní. Jedna strana této pomocné tabule je čtverečkována (strana čtverečků 5 cm), na druhé straně je vyrýsována kružnice se svislou a vodorovnou osou a s tečnami pro zobrazování hodnot goniom. funkcí.

kále. Vzrůst částek a, b budiž vyznačen vodorovnými, napravo orientovanými úsečkami, končícími u vertikály, jež představuje konec 10. roku.) „První částka a nabude na konci 10. roku hodnoty aq^{20} ($q = 1{,}02$), druhá aq^{18}, poslední aq^{12}, jsouc uložena 6 let. Podobně částky b.“ Hodnota nastřádaného kapitálu na konci 10. roku je tedy

$$K = bq + bq^2 + \ldots + bq^{10} + aq^{12} + aq^{14} + \ldots + aq^{20}$$

čili

$$K = bq\frac{q^{10} - 1}{q - 1} + aq^{12}\frac{q^{10} - 1}{q^2 - 1},$$

což lze psáti

$$K = bQ_{10} + aq^{12}\frac{q^{10} - 1}{q^2 - 1}.$$

Poznámka. Při sestavování schématu je velmi důležité určiti správně exponent úročitele při vzrůstu jednotlivých vkladů. Žáci mohou býti (aspoň zpočátku) přivedeni do rozpaků, mají-li udati, kolik roků uplyne na př. od začátku roku 5. do konce roku 10., jak se vyskytlo právě v předchozí úloze. Proto nechť si náležitě uvědomí, že

1. od zač. r. n-tého do zač. r. m-tého uplyne $(m - n)$ let,
2. podobně od konce r. n-tého do konce r. m-tého $(m - n)$ let;
3. tedy od zač. r. n-tého do konce r. m-tého $(m - n + 1)$ let,
4. od konce r. n-tého do zač. r. m-tého $(m - n - 1)$ let.

Nejlépe je ovšem v příp. 3 chápati konec r. m-tého jako začátek roku $(m + 1)$-ho, takže podle 1 uplyne $(m + 1 - n)$ let, v případě 4 podobně chápati začátek r. m-tého jako konec r. $(m - 1)$-ho, takže podle 2 uplyne $(m - 1 - n)$ let.

Renta. Žák, který by byl vychováván jen k aplikaci formulí, hleděl by pravděpodobně při úlohách o rentě užíti formule se zásobitelem; a přece je řada úloh o rentě, při jejichž řešení je na místě nikoli diskontování, nýbrž naopak úročení, a je tedy někdy možno užíti k vyčíslení nikoli zásobitele, nýbrž střadatele. Taková úloha je na př. tato: „Osoba 40letá uložila si jistinu K na 4% p. s. Počínajíc 61. rokem vybírala odtud vždy počátkem roku rentu r. Zemřela krátce před dovršením 72. roku. Kolik zanechala dědicům?“

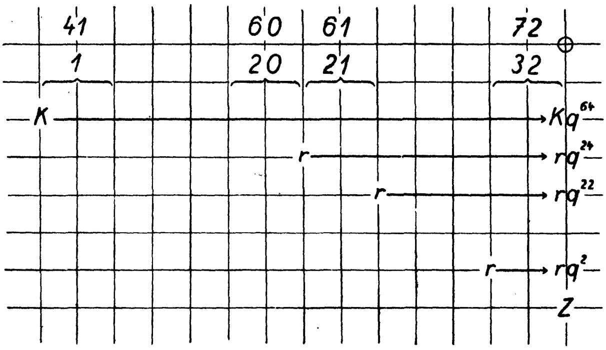
Zjednodušené schéma úlohy viz na další stránce!

Poznámka: Osoba 40letá je ta, která dovršila 40. rok věku (samozřejmé, žák si to však musí jednou pro vždy uvědomiti). Proto 41. rok její chápeme v úloze jako rok prvý. Všecky částky je třeba zúročiti ke konci roku 32, neboť je zjistiti hodnotu zbytku Z na konci tohoto roku.

Podle schématu platí rovnice

$$Z + rq^2 + rq^4 + \ldots + rq^{24} = Kq^{64}.$$

Při úrokování celoročním změnila by se na

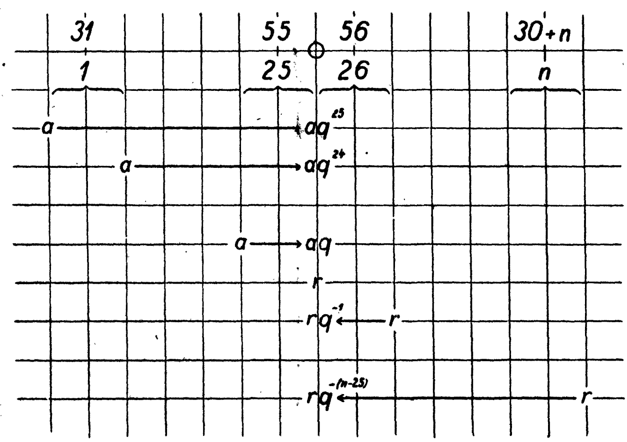


Schema 2.

$$Z + rq + rq^2 + \ldots + rq^{12} = Kq^{32},$$

odkudž

$$Z = Kq^{32} - rQ_{12}.$$



Schema 3.

Byl-li formulací této úlohy určen termin, k němuž se všechny částky úročily, jsou mnohé úlohy (a právě didakticky nejcennější), v nichž na takovém terminu nezáleží a možno jej několikerým způsobem voliti. Na př.: „Člověk 30letý ukládá vždy počátkem roku částku a na $p\%$ p. a. až do roku 55. Jak dlouho by musel býti živ, aby nastřádaný kapitál vyčerpal, vybírá-li od zač. roku 56 vždy počátkem roku rentu r?" Nechceme-li zavádět zbytečnou komplikaci, je možno řešiti tuto úlohu třemi způsoby: a) všechno úročiti ke konci roku n-tého,[3]) b) všechno diskontovati k začátku roku prvého, c) nebo konečně vklady a úročiti a renty r diskontovati ke konci roku 25. Schéma 3 znázorňuje tento způsob c).

Podle schématu platí rovnice

$$aq + aq^2 + \ldots + aq^{25} = rq^{-(n-25)} + rq^{-(n-26)} + \ldots + rq^{-1} + r. \quad (1)$$

(Žáci nechť píší geometrickou řadu vždy vzestupně podle mocnin úročitele! Při sčítání řad dopouštějí se žáci nejčastěji té chyby, že nesprávně určí počet jejich členů, nejedná-li se ovšem o řadu tak průhlednou, jaká je na levé straně předchozí rovnice (1). Budiž zde tedy uvedeno několik metodických poznámek o sčítání geom. řad.

1. Řada $aq^5 + aq^6 + \ldots + aq^{20}$ má členů $20 - 5 + 1$.

2. Řada na pravé straně rovnice (1) má členů $n - 25 + 1$, protože bez posledního jich je $n - 25$.

3. Zobecněním 1 plyne, že řada $q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{n-1} + q^n$ má členů $n - m + 1$.

4. Stoupají-li exponenty úročitele o jednotku, možno snadno určiti počet členů řady srovnáním exponentů s pořadovým číslem členů řady. V řadě na př. $q^4 + q^5 + \ldots + q^{n-2}$ je exponent každého členu o 3 větší než jeho pořadové číslo, takže člen q^{n-2} je $(n - 2 - 3)$-tí, jak plyne též podle předchozí pozn. 3, podle níž má napsaná řada členů $n - 2 - 4 + 1$.

5. Jde-li o řadu, kde exponenty mocnitele stoupají vždy o 2 jednotky, pak, jsou-li tyto exponenty sudé, představme si je děleny dvěma a počet členů určíme podle pozn. 1. Jsou-li tyto exponenty liché, zvětšme je vesměs o jednotku a máme případ předchozí.)

Rovnici (1) upravují žáci postupně

$$aq \cdot \frac{q^{25} - 1}{q - 1} = rq^{25-n} \cdot \frac{q^{n-24} - 1}{q - 1},$$

$$aQ_{25} = rq \cdot \frac{1}{q^{n-24}} \cdot \frac{q^{n-24} - 1}{q - 1},$$

$$aQ_{25} = rqR_{n-24}. \quad (2)$$

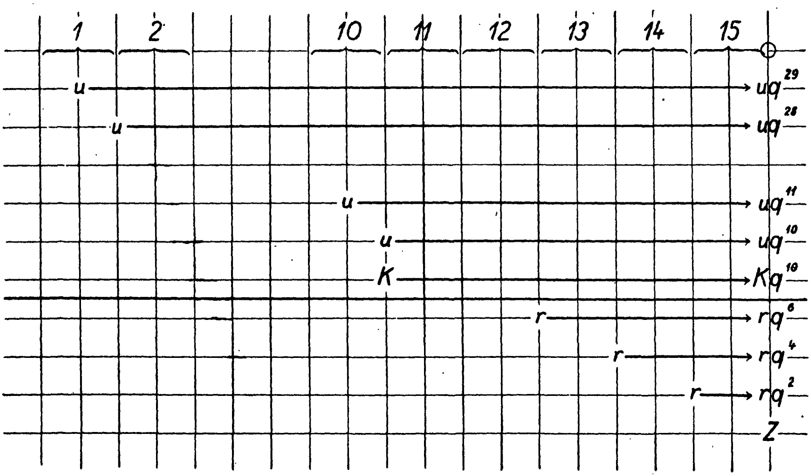
Odtud se vypočte R_{n-24} a pomocí tabulek stanoví n.

K téže výsledné relaci (2) se ovšem musí dospěti, řeší-li se úloha ostatními dvěma způsoby dříve uvedenými. Jest velmi

[3]) Poslední renta z konce roku n-tého bude spotřebována během roku $(n + 1)$-ho. Aby byl tedy kapitál zcela vyčerpán, musel by žíti jeho majitel do konce roku $(30 + n + 1)$-ho.

prospěšno, aby se každá úloha, jež připouští několik způsobů řešení, počítala všemi těmito způsoby tak, že třída pracuje rozdělena na vhodný počet skupin.

Cenné papíry. Úlohy o cenných papírech obyčejně připadají žákům obtížné. A přece užitím schématu se stanou průhledné. Budiž dána úloha: „Kdosi koupil 50 obligací (4% p. s., nominale 1000 Kč) a úroky z nich plynoucí ukládal na 4% p. s. Po 10 letech je prodal při kursu 95. Peníze, jež za ně dostal, uložil rovněž na 4% p. s. Po dvou letech počal vybírati vždy počátkem roku částku $r =$



Schema 4.

$= 10.000$ Kč. Tři roky nato zemřel, nevybrav už 4. renty. Kolik zanechal dědicům?“

Žák bude sestavování schématu slovně doprovázeti asi takto: „Na zač. 2. pololetí 1. roku uložil 2% úrok u z nominale (po straně poznamená $u = 50 \,.\, 20$ Kč), podobně počátkem každého pololetí; poslední úrok u uložil na zač. r. 11. Při tom obligace prodal, stržený obnos K (po straně $K = 50 \times 950$ Kč) uložil. Tím jsou vyznačeny všechny jeho vklady. Podtrhneme (silná vodorovná čára). Po 2 letech, t. j. na zač. r. 13 vybral první rentu r, začátkem r. 14 druhou, na zač. r. 15 třetí; na konci tohoto roku zemřel a dědicům zanechal zbytek Z. Všechny částky zúročíme ke konci roku 15, neboť chceme zjistiti hodnotu zbytku Z na konci 15. roku. První úrok u by nabyl na konci 15. roku hodnoty uq^{29}, kde $q = 1{,}02$, atd.“

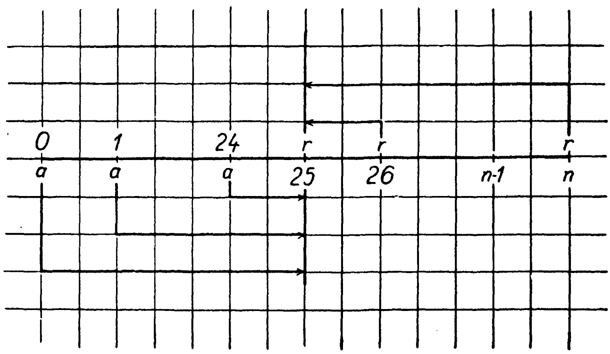
Když je schéma sestaveno, píše se ihned rovnice

$$Z + rq^2 + rq^4 + rq^6 = Kq^{10} + uq^{10} + uq^{11} + \ldots + uq^{29};$$

odtud

$$Z = Kq^{10} + uq^9 Q_{20} - rq^2 \frac{q^6 - 1}{q^2 - 1}.$$

Schémat, o nichž byla řeč, užívám při výuce složitého úrokování (i pojišťování) už několik let a učinil jsem s nimi zkušenosti příznivé. Nedomnívám se ovšem, jak jsem už výše naznačil, že bych byl v předchozích odstavcích podal něco nového; jsem naopak přesvědčen, že mnozí kolegové, kteří při výuce složitého úrokování narazili na obtíže, snažili se jako já je překlenouti vhodnou grafickou pomůckou, která by učinila žákům úlohy průhlednými.



Schema 5.

Účelem předchozího pojednání je tedy jednak upozorniti kolegy začátečníky, že je možno pomocí uvedených schémat složité úrokování žákům usnadniti, jednak dáti popud kolegům zkušeným, aby uveřejnili v tomto časopisu svůj vyučovací postup v tomto důležitém oboru středoškolské matematiky.

Dodatek. Před otištěním tohoto článku dostala se mi do rukou nová učebnice aritmetiky pro V.—VII. třídu středních škol (autoři Bydžovský-Teplý-Vyčichlo, vyd. J. Č. M. a F., schv. výn. MŠANO ze dne 22. srpna 1935). S uspokojením shledávám, že se v této učebnici radí užívati grafického znázornění při řešení úloh složitého úrokování; v dřívějších učebnicích to nebylo. Grafy jsou otištěny na str. 142, 145, 147 a 148. Liší se od našich schémat jedině tím, že se v nich vklady a renty zapisují na jedinou časovou osu; pak se ovšem musí vzrůst resp. diskontování každé částky zobraziti linií zlomenou do pravého úhlu, jejíž vodorovná část není ničím jiným než částí časové osy této částky v našem schématu. K provádění těchto grafů ve škole dlužno však připomenouti to, že má-li graf v žákově sešitě vypadati vzhledně, nutno užíti papíru čtverečkovaného. K srovnání takovýchto grafů s našimi schématy uvádím graf č. 5, odpovídající dříve uvedenému schématu č. 3, k čemuž nutno ještě dodati, že v žákově sešitě bude tento graf i předchozí schémata vypadati výrazněji, když síť čtverečků je tištěna v sešitech barvou světle modrou.

Účast žactva na řešení úloh z Rozhledů.

Karel Lerl, Valašské Meziříčí.

V následujících několika řádcích a tabulce chci ukázati na stále klesající zájem studujících o naše Rozhledy matematicko-přírodovědecké. Nahlédneme-li do starých ročníků Časopisu nebo později do Přílohy, vidíme, že bývalo větší množství proponovaných úloh, mnohem těžších a seznam řešitelů byl udáván na několika stránkách. Ačkoliv převratem získán byl u nás velký počet škol, zvláště zřízením nových na Slovensku a Podkarpatské Rusi, lze stále od převratu pozorovati větší a větší úbytek počtu odběratelů a zájmu o úlohy stále více ubývá, přes to, že redakce Rozhledů s největším snažením hledí učiniti jejich obsah co nejzajímavějším a proponované úlohy jsou nyní někdy až velmi lehké. Jak to vysvětliti? Zajisté náladou, povahou a sklony dnešní mládeže, jejíž zájem se nese zcela často jinam mimo školu, snad i mírnějšími požadavky školními a osnovami. Na kolik to vše přičísti i dnešní hospodářské krisi a nezaměstnanosti vystudované mládeže, je další otázkou.

Tabulka je sestavena celkem z 25 let, a to z několika ročníků předválečných, namátkou vybraných (r. 1905, 1908, 1911, 1914), pak ze všech až do dnešní doby. Rozhledy počaly vycházeti místo Přílohy ve šk. r. 1921—1922. Každý jistě přisvědčí, že několik zde uvedených čísel zřetelně mluví (tabulka).

Mějme stále na paměti i poznámku o vzrůstu počtu nejen škol, ale i žactva. Tyto všechny okolnosti bylo by zajímavé zjistiti přesně statisticky a vyvoditi pak úhrnem závěr. Na př. k úplnosti tabulky bylo by dobré přidati počet stř. škol, žactva a odběratelů, čímž by onen nezájem více vynikl. Srovnáme-li i ročníky z dob válečných, kdy vyšší třídy byly odvodními komisemi zbaveny žáků, s posledními lety Rozhledů, jsme ve svém přesvědčení utvrzeni. Jedno je jisté, že dnešní naše střední škola je zcela jiná než bývala před převratem, a není již školou výběrovou. Z tak malých tabulek nelze toho mnoho usouditi, ale některé věci přece jen jasně vystoupí. Na př. *jakou byla udělána deskriptivní geometrie „popelkou" rušením reálek a odstrkem, jakého se jí dostalo na r.*