Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

O racionálných čárách v rovině

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 5, 193--236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123727

O racionálných čarách v rovině.

Sepsal

Eduard Weyr.

I. *Definice racionálných čar.* Značíme-li literami x, y rovnoběžné souřadnice bodu v dané rovině, tu nazýváme každou čáru *racionálnou* č. *unikursální*,*) které se dostává té vlastnosti, že lze vyjádřiti souřadnice x, y každého bodu čáry co jisté racionálné funkce téže neodvisle proměnné hodnoty t. Značí-li tedy $\varrho\,(t)$ a $\sigma\,(t)$ racionálné funkce proměnné t, tu repraesentují rovnice

$$x = \varrho\,(t),\ y = \sigma\,(t) \qquad (1)$$

všecky racionálné čáry v rovině. Eliminací hodnoty t, která sluje *parametrem bodu* x, y, obdržíme rovnici

$$f\,(x,\, y) = o \qquad (2)$$

dané čáry ve tvaru obvyklém. Funkci f můžeme patrně pokládati za celistvou funkci hodnot x a y, i jest tudíž každá unikursalní čára čarou algebraickou.

Za hlavní úlohu v theorii racionálných čar dlužno pokládati vyšetření povahy oněch celistvých funkcí $f\,(x,\, y)$, které mohou vzniknouti eliminací nějaké proměnné t z rovnic tvaru (1); jedná se tedy o to, dána-li je rovnice (2), bysme rozhodli, lze-li ji nahraditi dvěma rovnicemi tvaru (1) a v případu že lze, abysme ustanovili tyto rovnice.

Zavedeme-li na místo souřadnic bodových x, y souřadnice přímkové u, v, tu se doděláme opět výrazů racionálných pro u a v. Zde značíme literami u, v reciproké a s opačným zname-

*) Název ten zavedl *Cayley*.

ním vzaté úseky stanovené libovolnou přímkou na osách souřadnicových. Jest tedy

$$u\, x + v\, y + 1 = o$$

rovnicí přímky u, v. Aby tato přímka se dotýkala čáry (2), musí hodnoty u, v vyhověti jisté relaci a tuto zoveme rovnicí čáry v souřadnicích přímkových.

Jsou-li x, y a $x + dx$, $y + dy$ dva sousední body dané čáry a s. příslušné hodnotám t a $t + dt$ parametru, bude

$$x = \varrho\,(t),\quad y = \sigma\,(t),$$
$$dx = \varrho'\,(t)\,dt,\quad dy = \sigma'\,(t)\,dt,$$

kdež ϱ' a σ' značí derivace funkcí ϱ a σ dle t. Nazveme-li X, Y běžné souřadnice tečny sestrojené k čáře (2) v bodu x, y, tu zní rovnice tečny

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\,(X - x)$$

t. j.

$$Y - \sigma\,(t) = \frac{\sigma'\,(t)}{\varrho'\,(t)}\,(X - \varrho\,(t)).$$

Z této rovnice snadno ustanovíme souřadnice u, v tečny, i obdržíme

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{-\,\sigma'\,(t)}{\varrho\,(t)\,\sigma'\,(t) - \varrho'\,(t)\,\sigma\,(t)}, \\ v &= \frac{\varrho'\,(t)}{\varrho\,(t)\,\sigma'\,(t) - \varrho'\,(t)\,\sigma\,(t)} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Derivace ϱ' a σ' racionálných funkcí ϱ a σ jsou opět funkcemi racionálnými; rovnice (3) podávají tudíž u a v co racionálné funkce neodvisle proměnné t. Eliminací hodnoty t z rovnic (3) bychom obdrželi rovnici dané čáry v souřadnicích přímkových u, v.

Kdyby byla dána čára souřadnicemi přímkovými

$$u = \varrho\,(t),\quad v = \sigma\,(t), \qquad (4)$$

kdež ϱ a σ jsou racionálné funkce proměnné t, tu bychom snadno souřadnice x, y libovolného bodu čáry (4) vyjádřili co racionálné funkce t, z čehož jde, že každá čára (4) jest čárou racionálnou.

Vskutku značíme-li u, v a $u + du$, $v + dv$ souřadnice dvou sousedních tečen čáry (4) a s. oněch, jež přísluší hodnotám t a $t + dt$, tu platí rovnice (4) a dále

$$du = \varrho' (t)\, dt, \qquad dv = \sigma' (t)\, dt;$$

průsečík x, y obou tečen jest bodem dotyčným t. j. bodem čáry (4). Souřadnice jeho vyhoví rovnicím přímek u, v a $u + du$, $v + dv$ t. j. máme

$$u\,x + v\,y + 1 = 0,$$
$$(u + du)\,x + (v + dv)\,y + 1 = 0$$

aneb vzhledem k předcházející rovnici

$$x\,du + y\,dv = 0,$$

t. j.

$$x\,\varrho' (t) + y\,\sigma' (t) = 0.$$

Z obou rovnic vypočteme

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-\sigma' (t)}{\varrho (t)\,\sigma' (t) - \varrho' (t)\,\sigma (t)}, \\ y &= \frac{\varrho' (t)}{\varrho (t)\,\sigma' (t) - \varrho' (t)\,\sigma (t)}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Jsou tedy x a y skutečně vyjádřeny co racionálné funkce proměnné t.

Z této úvahy vysvitá, že je úplně lhostejno, počítáme-li při zkoumání racionálných čar na základě souřadnic bodových nebo na základě souřadnic přímkových. V dalších úvahách se přidržíme souřadnic bodových, ponechávajíce čtenáři druhou interpretaci vyvinutých výsledků početních.

O zvláštních racionálných čarách jest v tomto časopise na některých místech pojednáno*); těchto čar lze užíti co příkladů k obecným úvahám obsaženým v těchto řádcích. Theorii racionalných čar zbudovali hlavně *Chasles* (Comptes rendus t. LXII. pag. 579: Sur les courbes planes ou à double courbure dont les points se peuvent déterminer individuellement etc. — Tamže pag. 1354: Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement etc.), *Cayley* (tamže) a *Clebsch* (Crelle-Borchardtův žurnál, t. 64, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind).

---

*) *Em. Weyr*: O rovinných rac. křivkách 3. stupně, 1874; Dr. *K. Zahradník*: O některých křivkách z kuželosečky odvozených, VII, pag. 168. Dále v Archivu mathem. a fysiky, sv. I. Dr. *K. Zahradník*: Theorie kardioidy; theorie křivek racionálných třetí třídy.

II. *O zavedení jednoznačného parametru.* Dána buď libovolná racionálná čára rovnicemi

$$x = \varrho(t), \qquad y = \sigma(t),$$

kdež ϱ a σ jsou racionálné, tedy obecně lomené funkce; redukují-li se na celistvé, tu je lze pokládati za lomené se stálým jmenovatelem. Bude tedy vždy

$$x = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \qquad y = \frac{\gamma(t)}{\delta(t)},$$

označujeme-li literami α, β, γ, δ funkce celistvé.

Zvolivše libovolně hodnotu t, obdržíme z těchto rovnic zcela určitý bod x, y dané čáry, t. j. každé hodnotě parametru přiřaděn jeden bod čáry. Opak však nemusí míti platnosti; může se totiž státi, že každému bodu čáry přísluší více hodnot parametru t, tedy že rovnicím

$$x_0 = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \qquad y_0 = \frac{\gamma(t)}{\delta(t)}$$

lze vyhověti několika hodnotami t, jsou-li x_0 a y_0 hodnoty souřadnic plynoucí při $t = t_0$. Jest-li nám n. př. dána racionálná čára rovnicemi

$$x = \frac{1 + t^2}{a(1 + t^2) + b}, \qquad y = \frac{1}{a(1 + t^2) + b},$$

tu se snadno přesvědčíme, že každý bod její můžeme obdržeti pomocí dvou hodnot parametru t. Neboť učinivše

$$1 + t^2 = t_1,$$

máme

$$x = \frac{t_1}{a\,t_1 + b}, \qquad y = \frac{1}{a\,t_1 + b}.$$

Libovolnému bodu x, y dané čáry přiřaděna jedna hodnota t_1 a tudíž dvě hodnoty t, totiž

$$t = \pm\sqrt{t_1 - 1}\,.$$

Přísluší-li každému bodu racionálné čáry dvě neb více hodnot parametru, tu můžeme vyjádřiti souřadnice bodu čáry co racionálné funkce parametru nového a tak zvoleného, že každému bodu čáry přísluší jen jediná hodnota parametru. Pak je arci vztah mezi body dané čáry a mezi hodnotami parametru vzájemně jednoznačný.

Kterak se taková nová proměnná zavádí, ukázal p. *Lüroth**); nežli však provedeme tuto úvahu, je záhodno, abysme rovnice (1) poněkud přeměnili.

Dána-li racionálná čára rovnicemi (1) t. j. rovnicemi

$$x = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \qquad y = \frac{\gamma(t)}{\delta(t)},$$

tu si sjednejme především v obou lomených funkcích téhož jmenovatele. Buď za tím účelem $\tau(t)$ největší společný dělitel funkcí β a δ a dále položme

$$\frac{\beta}{\tau} = \beta_1, \qquad \frac{\delta}{\tau} = \delta_1,$$

t. j.

$$\beta = \tau\beta_1, \qquad \delta = \tau\delta_1.$$

Píšeme-li pak

$$x = \frac{\alpha\delta_1}{\beta\delta_1}, \qquad y = \frac{\gamma\beta_1}{\delta\beta_1},$$

tu patrně mají oba výrazy téhož jmenovatele, poněvadž

$$\beta\delta_1 = \delta\beta_1 = \tau\beta_1\delta_1.$$

Můžeme tedy předpokládati, že každá racionálná čára jest dána rovnicemi tvaru

$$x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad (1)$$

značíce literami f, φ, ψ funkce celistvé.

Mimo to můžeme vždy předpokládati — a tak učiníme v následujících úvahách — že *neexistuje všem třem funkcím* f, φ, ψ *společného* (algebraického) *dělitele*; nebo kdyby bylo takového dělitele, tu by stačilo jim krátiti oba zlomky $\frac{f}{\psi}$, $\frac{\varphi}{\psi}$.

Předpokládejme nyní, že přísluší každému bodu x, y čáry (1) n hodnot parametru t.

Buď t_1 libovolná hodnota, x, y jí přiřaděný bod (2) a dále

$$t_2, t_3, \ldots t_n$$

hodnoty parametru reprodukující týž bod x, y, t. j. předpokládejme, že

---

*) V. *Lüroth*, Beweis eines Satzes über rationale Curven. Mathem. Annalen, t. IX.

$$x = \frac{f(t_1)}{\psi(t_1)} = \frac{f(t_2)}{\psi(t_2)} = \ldots = \frac{f(t_n)}{\psi(t_n)},$$
$$y = \frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)} = \frac{\varphi(t_2)}{\psi(t_2)} = \ldots = \frac{\varphi(t_n)}{\psi(t_n)}. \tag{2}$$

Utvořme nyní pomocí funkcí f, φ a ψ následující dvě rovnice, v nichž t za neznámou pokládáme:

$$f(t)\,\psi(t_1) - f(t_1)\,\psi(t) = 0,$$
$$\varphi(t)\,\psi(t_1) - \varphi(t_1)\,\psi(t) = 0. \tag{3}$$

Položíme-li za t kteroukoli z hodnot $t_1, t_2, \ldots t_n$, tedy oběma rovnicím (3) vyhovíme; toť patrné vzhledem k rovnicím (2). Jsou tedy $t = t_1, t_2, \ldots t_n$ oběma rovnicím (3) společné kořeny. *Jiných společných kořenů rovnice* (3) *nemají*, neboť každý společný kořen t přísluší bodu x, y co parametr a takových jest dle supposice jen n. Skutečně společnému kořenu $t = t_1$ přísluší bod x, y dle supposice; budiž tedy $t = t_0$ rovnicím (3) společný kořen a různý od t_1.

Máme pak

$$f(t_0)\,\psi(t_1) - f(t_1)\,\psi(t_0) = 0,$$
$$\varphi(t_0)\,\psi(t_1) - \varphi(t_1)\,\psi(t_0) = 0 \tag{4}$$

a tedy

$$\frac{f(t_0)}{\psi(t_0)} = \frac{f(t_1)}{\psi(t_1)} = x,$$
$$\frac{\varphi(t_0)}{\psi(t_0)} = \frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)} = y,$$

t_0 je tedy vskutku též parametrem bodu x, y.

Mlčky tu arci předpokládáme, že jmenovatel $\psi(t_0)$ nezmizí — jinak bychom nemohli jím děliti. Však kdyby zmizel, tu bychom dle (4) soudili, že i $f(t_0)$ a $\varphi(t_0)$ vymizí, že tedy výrazy f, φ a ψ vymizí současně pro $t = t_0$, t. j. že mají společného dělitele $t - t_0$, věc to nemožná vzhledem k učiněným opatřením.

Dále můžeme tvrditi, že jsou hodnoty $t_1, t_2, \ldots t_n$ jen *jednoduchými* společnými kořeny rovnic (3). Nejdříve to ukažme o kořenu t_1. Aby ten byl kořenem dvojnásobným rovnic (3), je třeba, by vyhověl i rovnicím vznikajícím derivováním z rovnic (3) t. j. aby platily relace

$$f'(t)\,\psi(t_1) - f(t_1)\,\psi'(t) = 0,$$
$$\varphi'(t)\,\psi(t_1) - \varphi(t_1)\,\psi'(t) = 0 \tag{5}$$

pro $t = t_1$. Pak bysme obdrželi, dělíce čtvercem hodnoty $\psi(t_1)$,

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{f(t_1)}{\psi(t_1)}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)}\right) = 0,$$

a tedy, jelikož t_1 značí libovolné číslo,

$$\frac{f(t_1)}{\psi(t_1)} = \text{stálé}, \qquad \frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)} = \text{stálé},$$

věc to patrně nemožná, neb by následovalo

$$x = \text{stálé}, \qquad y = \text{stálé}.$$

Aby za druhé některý z dalších $n-1$ kořenů, n. př. t_2 byl kořenem dvojnásobným rovnic (3), nutno, by rovnicím (5) vyhověla posice $t = t_2$, tedy by

$$\frac{f'(t_2)}{\psi'(t_2)} = \frac{f(t_1)}{\psi(t_1)},$$

$$\frac{\varphi'(t_2)}{\psi'(t_2)} = \frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)},$$

tedy vzhledem k (2)

$$\frac{f'(t_2)}{\psi'(t_2)} = \frac{f(t_2)}{\psi(t_2)}; \qquad \frac{\varphi'(t_2)}{\psi'(t_2)} = \frac{\varphi(t_2)}{\psi(t_2)}$$

a tudíž odstranivše jmenovatele a dělivše opět čtvercem funkce $\psi(t_2)$:

$$\frac{d}{dt_2}\left(\frac{f(t_2)}{\psi(t_2)}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt_2}\left(\frac{\varphi(t_2)}{\psi(t_2)}\right) = 0,$$

čímž by vzhledem k tomu, že i t_2 může nabýti jakékoli hodnoty, vycházelo

$$x = \text{stálé}, \qquad y = \text{stálé},$$

věc to nemožná.

Rovnice (3) mají tedy jen *jednoduché* společné kořeny a ty jsou $t_1, t_2, .. t_n$. Jest tedy součin

$$(t - t_1)(t - t_2)\,..\,(t - t_n)$$

největším společným dělitelem polynomů (3); nazveme jej Ψ. On jest stupně n vzhledem ku t t. j. *stupeň největšího společného dělitele polynomů* (3) *udává, kolik hodnot parametru přísluší libovolnému bodu dané racionálné čáry.*

Tím rozhodnuto pro každý speciální případ, zdali je parametr t jednoznačným čili nic; utvoříme totiž výrazy (3) a stanovíme pak známým způsobem (algebraickými divisemi) největšího společného dělitele Ψ výrazů (3) a stupeň jeho udává, kolik hodnot parametru přísluší libovolnému bodu dané čáry. Litera t_1 vcházející do těchto výrazů (3) se vyskytne taky ve Ψ. Vyměníme-li ve výrazech (3) t a t_1 na vzájem, tu se změní pouze jich znamení, společný dělitel zůstává v podstatě týž. Můžeme tedy předpokládati, že je Ψ též vzhledem k t_1 stupně n; kdyby bylo jinak,*) tu by Ψ patrně obsahovalo co činitele nějaký výraz jen na t_1 závislý, mající tedy při stanovení dělitele Ψ ráz pouhé stálé a ten bychom mohli zkrátka vynechati, právě tak jako lze vypustiti každého jiného činitele neobsahujícího proměnnou t.

III. *Pokračování.* Stanovený dělitel Ψ bude tedy tvaru

$$\Psi = \varphi_0(t_1)\, t^n + \varphi_1(t_1)\, t^{n-1} + \ldots + \varphi_n(t_1),$$

kdež $\varphi_0, \ldots \varphi_n$ značí celistvé funkce hodnoty t_1 nanejvýš stupně n.

Kořeny rovnice

$$\Psi = 0$$

jsou $t = t_1, t_2, \ldots t_n$, z čehož jde, že je podíl dvou součinitelů této rovnice, t. j. že je podíl

$$\frac{\varphi_i(t_1)}{\varphi_k(t_1)}$$

symetrickou funkcí oněch kořenů. Kdybysme celou dosavadní úvahu provedli s hodnotou t_2 právě tak jako jsme učinili s t_1, tu by ona symetrická funkce se opět objevila t. j.

$$\frac{\varphi_i(t_2)}{\varphi_k(t_2)} = \frac{\varphi_i(t_1)}{\varphi_k(t_1)}.$$

Obdobné platí o $t_3, \ldots t_n$. Jest tedy funkce

$$\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_k(t)}$$

taková, že nabývá téže hodnoty pro $t = t_1, t_2, \ldots t_n$.

Z toho patrné, že je tato funkce buď absolutní stálá aneb že jedna z obou funkcí φ_i a φ_k alespoň jest stupně n. Předpokládajíce, že zvolíme takové dvě funkce φ_i a φ_k, jichž podíl není stálý (věc možná, neb jinak bychom mohli t_1 z Ψ vůbec odstraniti), učiňme

$$\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_k(t)} = \mu$$

*) což se přihoditi může, kdybysme při stanovení Ψ k vůli uvarování se zlomků násobili dělence faktory obsahujícími t_1.

a zaveďme μ co nový parametr pro danou čáru; *tento parametr je pak jednoznačný*, neboť:

předně přísluší každé hodnotě μ jediný bod křivky; vskutku dáno-li μ, plynou z poslední rovnice pro t hodnoty $t_1, t_2, \ldots t_n$ a těm všem přísluší týž bod x, y;

za druhé přiřaděna libovolnému bodu x, y jediná hodnota μ, poněvadž hodnotám x, y přiřaděné parametry $t_1, t_2, \ldots t_n$ podávají tutéž hodnotu $\frac{\varphi_i}{\varphi_k}$ č. μ.

Chtějíce vyjádřiti x, y pomocí nového parametru μ, uvažme, že dle rovnic II, (2)

$$x = \frac{1}{n}\left[\frac{f(t_1)}{\psi(t_1)} + \frac{f(t_2)}{\psi(t_2)} + \ldots + \frac{f(t_n)}{\psi(t_n)}\right],$$

$$y = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)} + \frac{\varphi(t_2)}{\psi(t_2)} + \ldots + \frac{\varphi(t_n)}{\psi(t_n)}\right],$$

a že t_1, $t_2 \ldots t_n$ jsou veškeré kořeny rovnice

$$\varphi_i(t) - \mu\, \varphi_k(t) = 0.$$

Souřadnice x a y jsou vyjádřeny co $n$té díly symetrických funkcí těchto kořenů, můžeme je tedy známými methodami vyjádřiti co racionálné funkce koefficientů poslední rovnice t. j. co racionálné funkce hodnoty μ.

IV. *Příklady ku zavádění jednoznačného parametru.*

Pan *Lüroth* uvažuje co příklad čáru danou rovnicemi

$$x = \frac{(t^2+1)^2}{t^4+3t^2+1},$$

$$y = \frac{t(t^2+1)}{t^4+3t^2+1}.$$

Zde tedy máme x a y ve tvaru supponovaném, a poněvadž ony tři celistvé funkce, z nichž se x a y skládají, nemají společného dělitele, položme

$$f(t) = (t^2+1)^2,$$
$$\varphi(t) = t(t^2+1),$$
$$\psi(t) = t^4+3t^2+1.$$

Pročež

$$f(t)\,\psi(t_1) - f(t_1)\,\varphi(t) = t_1^2 t^4 - (t_1^4+1)t^2 + t_1^2;$$

$$\varphi(t)\,\psi(t_1) - \varphi(t_1)\,\psi(t) = -t_1(t_1^2+1)t^4 + (t_1^4+3t_1^2+1)t^3 - 3t_1(t_1^2+1)t^2 + (t_1^4+3t_1^2+1)t - t_1(t_1^2+1).$$

Jest nám stanoviti největšího společného dělitele těchto bikvadratických výrazů proměnné t. Abychom se vyhnuli zlomkům, násobme druhý polynom hodnotou $-t_1$; dělíce pak prvním doděláme se podílu t_1^2+1 a zbytku

$$(t_1^4+3t_1^2+1)[-t_1 t^3+(t_1^2+1)t^2-t_1 t].$$

Zbavivše tento zbytek stálého činitele $-(t_1^4+3t_1^2+1)$ dělme jím dřívějšího dělitele; t. j. proveďme divisi

$$[t_1^2 t^4-(t_1^4+1)t^2+t_1^2]:[t_1 t^3-(t_1^2+1)t^2+t_1 t].$$

Podíl jest tu

$$t_1 t+t_1^2+1$$

a zbytek

$$t_1^2 t^2-t_1(t_1^2+1)t+t_1^2.$$

Vynechme činitele t_1 a dělme zbývajícím výrazem předcházejícího dělitele; tu se objeví t co podíl a divise vyjde beze zbytku.

Poslední dělitel

$$t_1 t^2-(t_1^2+1)t+t_1$$

jest tedy největším společným dělitelem vytknutých polynomů; on jest druhého stupně vzhledem k proměnné t, a poněvadž se jeví též vzhledem k hodnotě t_1 co kvadratický, můžeme psáti

$$\Psi=t_1 t^2-(t_1^2+1)t+t_1.$$

Každému bodu dané čáry přísluší tudíž *dvě* hodnoty parametru t. Píšeme-li Ψ ve tvaru dřívějším

$$\Psi=\varphi_0(t_1)t^2+\varphi_1(t_1)t+\varphi_2(t_1),$$

shledáme, že v našem případu

$$\varphi_0(t_1)=t_1;$$
$$\varphi_1(t_1)=-(t_1^2+1);$$
$$\varphi_2(t_1)=t_1.$$

Z tří podílů $\frac{\varphi_i}{\varphi_k}$ jest jeden stálý, t. podíl první a třetí funkce, rovnaje se jednici. Podíl první a druhé aneb třetí lze zavésti co jednoznačný parametr μ. Učinivše tedy

$$\mu=-\frac{t}{t^2+1}$$

lze vyjádřiti snadno x a y pomocí μ a sice bude

$$x=\frac{1}{\mu^2+1},\quad y=\frac{-\mu}{\mu^2+1}.$$

Každému bodu x, y přísluší jediná hodnota parametru μ.

Uvažujme co druhý příklad čáru danou rovnicemi

$$x = \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3 - t^2 + t - 1},$$

$$y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^3 - t^2 + t - 1}.$$

Poněvadž funkce

$$f = t^4 + 2t^2 + 1,$$
$$\varphi = t^2 - 2t + 1,$$
$$\psi = t^3 - t^2 + t - 1$$

nemají společného dělitele, můžeme hned užíti obecného pravidla. Učinivše k vůli stručnosti

$$A = t_1{}^3 - t_1{}^2 + t_1 - 1,$$
$$B = t_1{}^4 + 2t_1{}^2 + 1,$$
$$C = t_1{}^2 - 2t_1 + 1,$$

máme

$$f(t)\psi(t_1) - f(t_1)\psi(t) = At^4 - Bt^3 + (2A + B)t^2 - Bt + A + B;$$
$$\varphi(t)\psi(t_1) - \varphi(t_1)\psi(t) = -[Ct^3 - (A + C)t^2 + (2A + C)t - (A + C)].$$

Dělíme-li první výraz násobený hodnotou C druhým výrazem záporně vzatým, první zbytek pak opět násobený stálou C týmž dělitelem, tu se vzhledem k relaci*)

$$A^2 - BC = 0$$

objeví zbytek

$$2AC[Ct^2 - At + A + C].$$

Dělíme-li nyní dřívějšího dělitele tímto zbytkem, pomíjejíce však stálého činitele $2AC$, tu divise vyjde dávajíc za podíl $t - 1$.

Jest tedy výraz

$$Ct^2 - At + A + C$$

hledaným největším dělitelem. Poněvadž jest stupně druhého, tedy soudíme, že každému bodu čáry přísluší dvě hodnoty parametru. Výraz A jest vzhledem ku t_1 kubický, lze tudíž z nalezeného dělitele nutně vyjmouti činitele obsahujícího t_1 v prvním stupni, t. j. výrazy A a C musejí míti nutně společného lineárného dělitele. Snadno nalezneme, že je $t_1 - 1$ tímto dělitelem, a odstranivše jej, zbude

*) Vzhledem k této relaci, o jejížto správnosti se čtenář snadno přesvědčí, bychom mohli ihned psáti konečný výsledek, v podstatě vyjádřený rovnicí $xy = 1$; provádíme však počet přece dle obecné methody. Naznačené relace by se počtář nemusil všímati a došel by přece výsledku, ač pracněji.

$$(t_1-1)\,t^2-(t_1^{\,2}+1)\,t+t_1^{\,2}+t_1$$

co funkce Ψ, jak vzhledem ku t, tak vzhledem ku t_1 kvadratická. Máme nyní

$$\varphi_0\,(t_1)=t_1-1,$$
$$\varphi_1\,(t_1)=-(t_1^{\,2}+1),$$
$$\varphi_2\,(t_1)=t_1^{\,2}+t_1.$$

Učiníme-li nejdříve podíl prvních dvou funkcí

$$\frac{-(t^2+1)}{t-1}=\mu$$

snadno shledáme, že

$$x=-\mu;\quad y=-\frac{1}{\mu}.\text{*)}$$

Hodnota μ jest jednoznačným parametrem; čára naše pak patrně hyperbolou o rovnici

$$xy=1.$$

Učiníme-li za druhé podíl třetí a první funkce φ, t. j. podíl

$$\frac{t^2+t}{t-1}=\mu,$$

tu snadno nalezneme, že

$$x=\mu-1,\quad y=\frac{1}{\mu-1}.$$

Zavedeme-li konečně co nový jednoznačný parametr podíl třetí a druhé funkce φ, kladouce

$$\frac{t^2+t}{-(t^2+1)}=\mu,$$

opět snadno nalezneme (třeba eliminací hodnoty t z této rovnice a z rovnic dané čáry):

$$x=-\frac{1}{1+\mu},\quad y=-(1+\mu).$$

V. *O souvislosti jednoznačných porametrů.*

V druhém příkladu právě počítaném jsme dané rovnice

$$x=\frac{t^4+2t^2+1}{t^3-t^2+t-1},$$

---

*) K vůli verifikaci napišme

$$x=-\mu\,\frac{t^2+1}{t^2+1},\quad y=-\frac{1}{\mu}\,\frac{t-1}{t-1}.$$

$$y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^3 - t^2 + t - 1}$$

transformovali trojím spůsobem. Nejdříve jsme zavedli nový parametr rovnicí

$$-\frac{t^2 + 1}{t - 1} = \mu$$

a tím jsme nalezli, žc

$$x = -\mu; \quad \mu = -\frac{1}{\mu}.$$

Pak jsme zavedli jiný parametr rovnicí

$$\frac{t^2 + t}{t - 1} = \mu_1$$

a tu bylo

$$x = \mu_1 - 1; \quad y = \frac{1}{\mu_1 - 1}.$$

Třetí parametr konečně definován relací

$$-\frac{t^2 + t}{t^2 + 1} = \mu_2$$

a tu jsme měli

$$x = -\frac{1}{1 + \mu_1}; \quad y = -(1 + \mu_1).$$

Porovnáme-li tyto troje výrazy pro souřadnice x a y, máme následující relace mezi parametry μ, μ_1 a μ_2 stanovícími týž bod dané čáry:

$$\mu = 1 - \mu_1 = \frac{1}{1 + \mu_2}.$$

Je patrno, že jeden parametr jest lineárnou — třeba arci lomenou — funkcí druhého. Tento výsledek není nahodilý, neboť můžeme ukázati, že platí věta:

Jsou-li souřadnice x, y libovolného bodu racionalné čáry vyjádřeny co racionalné funkce jednoznačného parametru μ a též co racionalné funkce jiného jednoznačného parametru μ_1, tu souvisí hodnoty μ a μ_1 příslušné témuž bodu rovnicí obapolně lineárnou t. j. tvaru

$$A\mu\mu_1 + B\mu + C\mu_1 + D = 0.$$

Dle supposice máme rovnice

$$x = \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} = \frac{\alpha_1(\mu_1)}{\beta_1(\mu_1)},$$

$$y = \frac{\gamma(\mu)}{\delta(\mu)} = \frac{\gamma_1(\mu_1)}{\delta_1(\mu_1)},$$

a tu značí α, β, ... δ_1 celistvé funkce argumentů μ resp. μ_1.

Dále předpokládáme, že jsou parametry μ a μ_1 jednoznačné t. j. že libovolný bod naší čáry jest dán pomocí oněch výrazů jedinou hodnotou μ a jedinou hodnotou μ_1. Zvolivše libovolné μ, obdržíme určité hodnoty x a y a k těm jedinou hodnotu μ_1; a naopak zvolivše libovolné μ_1 doděláme se jediné hodnoty μ. Tím patrno, že rovnice

$$\alpha(\mu)\,\beta_1(\mu_1) - \alpha_1(\mu_1)\,\beta(\mu) = 0,$$
$$\gamma(\mu)\,\delta_1(\mu_1) - \gamma_1(\mu_1)\,\delta(\mu) = 0,$$

mají jediný společný kořen μ, pokládáme-li μ za neznámou a μ_1 za danou hodnotu; a že mají též jen jediný společný kořen μ_1, pokládáme-li toto za neznámou a μ za dané číslo. Dle theorie algebraických rovnic lze tudíž vyjádřiti z těchto dvou rovnic μ co racionálnou funkci hodnoty μ_1 a též naopak μ_1 co racionálnou funkci hodnoty μ. Učiňme prvnější a buď výsledek tvaru

$$\mu = \frac{q_0\mu_1^n + q_1\mu_1^{n-1} + \ldots + q_n}{p_0\mu_1^n + p_1\mu_1^{n-1} + \ldots + p_n},$$

kdež koefficienty p a q mohou z části i vymizeti. Odstraněním jmenovatele a seřaděním máme

$$(p_0\mu + q_0)\,\mu_1^n + (p_1\mu + q_1)\,\mu_1^{n-1} + \ldots + p_n\mu + q_n = 0.$$

Dle naší úvahy jest ale μ_1 racionálná funkce hodnoty μ t. j. libovolnému μ přísluší jediná hodnota μ_1. Musejí tudíž všecky kořeny μ_1 poslední rovnice míti stejnou hodnotu (t. j. levá strana její musí býti n-tou mocností lineárného výrazu v μ_1). Součet těchto kořenů jest dán zlomkem

$$-\frac{p_1\mu + q_1}{p_0\mu + q_0},$$

a tudíž máme

$$n\,\mu_1 = -\frac{p_1\mu + q_1}{p_0\mu + q_0}$$

t. j.

$$\mu_1 = -\frac{1}{n}\,\frac{p_1\mu + q_1}{p_0\mu + q_0},$$

čímž naše tvrzení dokázáno.

Dokázanou větou nabýváme přehledu o povaze všech jednoznačných parametrů, jimiž lze vyjádřiti souřadnice bodu dané racionalné čáry. Je-li totiž μ takový parametr a jest-li že

$$x = \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}, \quad y = \frac{\gamma(\mu)}{\delta(\mu)},$$

tu je dán každý jiný jednoznačný parametr μ_1 relací

$$\mu = \frac{p\mu_1 + q}{r\mu_1 + s}$$

a příslušné výrazy pro x a y jsou tedy vždy tvaru

$$x = \alpha\left(\frac{p\mu_1 + q}{r\mu_1 + s}\right) : \beta\left(\frac{p\mu_1 + q}{r\mu_1 + s}\right),$$

$$y = \gamma\left(\frac{p\mu_1 + q}{r\mu_1 + s}\right) : \delta\left(\frac{p\mu_1 + q}{r\mu_1 + s}\right).$$

Je na bíledni, že lze ve zvláštních případech užíti libovolných stálých p, q, r, s k tomu cíli, aby výrazy pro x a y nabyly tvaru co nejjednoduššího.

VI. *O stupni a o třídě racionálných čar.*

Dána je racionalná čára dvěma rovnicemi, které podávají souřadnice x, y libovolného bodu jejího co racionálné funkce proměnného parametru; má se ustanoviti stupeň a třída této čáry.

Nejdříve vyšetřme, zdali je parametr jednoznačný t. j. zdali přísluší každému bodu jediná hodnota parametru. V případu, kdy daný parametr není jednoznačným zaveďme jednoznačný parametr a buďte tedy

$$x = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \quad y = \frac{\gamma(t)}{\delta(t)}$$

souřadnice x, y vyjádřené pomocí tohoto jednoznačného parametru t. Uvedeme-li výrazy x a y na společného jmenovatele, obdržíme výsledky tvaru

$$x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \quad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

a tu můžeme předpokládati že funkce f, φ a ψ nemají společného dělitele.

Stupeň oné z funkcí f, φ a ψ, která je nejvyššího stupně, jest stupněm dané čáry. Neb protneme-li čáru libovolnou přímkou

$$Ax + By + C = 0$$

tu obdržíme pro parametry t průsečných bodů rovnici

$$Af(t) + B\varphi(t) + C\psi(t) = 0$$

a ta jest patrně stupně n. Vzhledem k okolnosti, že jsou A, B, C čísla libovolná a že funkce f, φ a ψ nemají společného faktora, budou kořeny $t_1, t_2, \ldots t_n$ této rovnice obecně vesměs různy a každý bude záviseti na hodnotách A, B, C. Každý kořen podá pak *jeden* bod průsečný x, y; tyto body budou též různy, neb jinak by témuž bodu musili příslušeti dvě z různých hodnot parametru $t_1, t_2, \ldots t_n$, věc to nemožná při parametru jednoznačném. Protíná tedy libovolná přímka danou čáru v n bodech, t. j. čára je n-tého stupně.

Abychom ustanovili třídu dané čáry, nahraďme souřadnice bodové souřadnicemi přímkovými u, v. Jsou-li x a y vyjádřeny jednoznačným parametrem t formulemi

$$x = \varrho(t), \qquad y = \sigma(t),$$

máme dle čl. I.

$$u = \frac{-\sigma'(t)}{\varrho(t)\,\sigma'(t) - \varrho(t)\,\sigma'(t)},$$

$$v = \frac{\varrho(t)}{\varrho(t)\,\sigma'(t) - \varrho(t)\,\sigma'(t)}.$$

I v těchto výrazech jest t parametrem jednoznačným t. j. libovolnou tečnu u, v obdržíme těmito výrazy jen jedinou hodnotou t. Neb skutečně, dána-li tečna u, v, tu se dotkne čáry obecně jen v jediném bodu; k souřadnicím x, y tohoto bodu pak přináleží jen jediná hodnota t.

Výrazy pro u, v jsou tvaru

$$u = \frac{F(t)}{\Psi(t)}, \qquad v = \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}$$

a *značí-li m stupeň oné z funkcí F, Φ, Ψ* (předpokládáme opět, že jsou zbaveny všech společných dělitelů), *která jest stupně nejvyššího, tedy jest m třídou dané čáry.* Neboť skutečně má-li tečna procházeti daným bodem

$$Au + Bv + C = 0,$$

tedy mimo této musejí souřadnice u, v patrně vyhověti i rovnici čáry, t. j. parametr hledané tečny jest kořenem rovnice m-tého stupně

$$AF(t) + B\Phi(t) + C\Psi(t) = 0.$$

Prochází tedy libovolným bodem m tečen dané čáry t. j. třída její jest m.

Vzhledem k těmto úvahám podávají rovnice

$$x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$$

nejvšeobecnější racionálnou čáru n-tého stupně, značí-li f, φ a ψ obecné celistvé funkce n-tého stupně. A obdobné zahrnují rovnice

$$u = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \qquad v = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$$

všecky racionálné čáry n-té třídy, jsou-li f, φ, ψ opět celistvými funkcemi n-tého stupně proměnné t.

Kterak lze vypočítati v těchto obecných případech třídu racionálné čáry, je-li dán stupeň její a naopak, čtenář znalý theorie algebraických čar snadno se dovtípí, jakmile ustanovíme dvojné body racionálné čáry.

Příklad. Stanovme stupeň a třídu racionálné čáry uvažované v prvním příkladu čl. IV.; byla dána rovnicemi

$$x = \frac{(t^2+1)^2}{t^4+3t^2+1},$$
$$y = \frac{t(t^2+1)}{t^4+3t^2+1}.$$

Shledali jsme, že parametr t není jednoznačným; zavedením jednoznačného parametru

$$\mu = -\frac{t}{t^2+1}$$

jsme obdrželi výrazy

$$x = \frac{1}{\mu^2+1}, \qquad y = \frac{-\mu}{\mu^2+1}.$$

Daná čára jest tudíž druhého stupně, tedy je kuželosečkou a tedy také druhé třídy.

Chtějíce stanoviti třídu přímo, zaveďme souřadnice tečny u, v. Učinivše vzhledem k formulím v čl. I.

$$x = \varrho(\mu) = \frac{1}{\mu^2+1}, \qquad y = \sigma(\mu) = \frac{-\mu}{\mu^2+1} = -\mu\varrho,$$

a značíce derivace funkcí ϱ a σ vzaté dle proměnné μ literami ϱ' resp. σ', máme

$$\varrho' = -2\mu\varrho; \qquad \sigma' = -(\mu\varrho' + \varrho).$$
$$\varrho\sigma' - \varrho'\sigma = -\varrho^2,$$
a tedy
$$u = (\mu + 1)^2; \qquad v = 2\mu.$$
Čára jest tedy druhé třídy.

VII. *Pokračování.* Dána-li je racionálná čára rovnicemi
$$x = \frac{\beta_0 t^n + \beta_1 t^{n-1} + .. + \beta_n}{\alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + .. + \alpha_n},$$
$$y = \frac{\gamma_0 t^n + \gamma_1 t^{n-1} + .. + \gamma_n}{\alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + .. + \alpha_n},$$
při čem litery α, β, γ značí libovolné, obecné hodnoty, můžeme snadno dokázati, že je čára ta n-tého stupně. Seřadíme-li totiž obě rovnice dle mocností t, píšíce
$$(\alpha_0 x - \beta_0) t^n + (\alpha_1 x - \beta_1) t^{n-1} + .. + \alpha_n x - \beta_n = 0,$$
$$(\alpha_0 y - \gamma_0) t^n + (\alpha_1 y - \gamma_1) t^{n-1} + .. + \alpha_n y - \gamma_n = 0,$$
tu obdržíme eliminací proměnné t resultant, který je vzhledem k x a y stupně n, který tedy stanoví skutečně čáru n-tého stupně. Píšeme-li k vůli stručnosti rovnice ve tvaru
$$p_0 t^n + p_1 t^{n-1} + .. + p_n = 0 \text{ aneb } P(t) = 0,$$
$$q_0 t^n + q_1 t^{n-1} + .. + q_n = 0 \text{ aneb } Q(t) = 0,$$
provedeme eliminaci dle methody *Bézout-Cayley*-ovy, utvoříme-li výraz
$$P(t)\,Q(t_1) - P(t_1)\,Q(t) \text{ čili V},$$
a dělíme-li výraz ten rozdílem $t - t_1$. Divise vyjde beze zbytku a podíl jest celistvá funkce stupně $n-1$ hodnoty t, která právě tak jako výraz sám, zmizí pro každý oběma rovnicím společný kořen t_1, nechť je t jakákoli hodnota. Učiníme-li tedy všecky koefficienty tohoto výrazu rovny nulle, obdržíme n rovnic, z nichž lze hodnoty t_1^{n-1}, t_1^{n-2}, .. t_1 lineárně vcházející přímo eliminovati. Tím vznikající determinant o n řádcích jest pak resultantem daných rovnic.

Zavedeme-li označení
$$(p_i q_k) = p_i q_k - p_k q_i,$$
platí patrně
$$(p_i q_k) + (p_k q_i) = 0, \qquad (p_i q_i) = 0. \qquad (R)$$
Položíme-li
$$V = A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + .. + A_n,$$
budou míti součinitelé A tyto hodnoty

$$A_0 = (p_0\, q_0)\, t_1^{\,n} + (p_0\, q_1)\, t_1^{\,n-1} + \ldots + (p_0\, q_n),$$
$$A_1 = (p_1\, q_0)\, t_1^{\,n} + (p_1\, q_1)\, t_1^{\,n-1} + \ldots + (p_1\, q_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = (p_n\, q_0)\, t_1^{\,n} + (p_n\, q_1)\, t_1^{\,n-1} + \ldots + (p_n\, q_n).$$

Provedeme-li vytknutou divisi, snadno obdržíme

$$\frac{V}{t-t_1} = A_0\, t^{n-1} + (A_0\, t_1 + A_1)\, t^{n-2} + (A_0\, t_1^{\,2} + A_1\, t_1 + A_2)\, t^{n-3}$$
$$+ \ldots + (A_0\, t_1^{\,n-1} + A_1\, t_1^{\,n-2} + \ldots + A_{n-1}).$$

Dle učiněné úvahy vyhoví každý daným rovnicím společný kořen t_1 těmto rovnicím:

$$A_0 = 0,$$
$$A_0\, t_1 + A_1 = 0,$$
$$A_0\, t_1^{\,2} + A_1\, t_1 + A_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_0\, t_1^{\,n-1} + A_1\, t_1^{\,n-2} + \ldots + A_{n-1} = 0.$$

Dosadíme-li za $A_{01} \ldots A_{n-1}$ hořejší hodnoty, tu shledáme, že právě napsané rovnice jsou vzhledem k t_1 jen stupně n—1. N. př. shledáme [vzhledem k relacím (R)]:

$$A_0 = (p_0\, q_1)\, t_1^{\,n-1} + \ldots + (p_0\, q_n),$$
$$A_0\, t_1 + A_1 = (p_0\, q_2)\, t_1^{\,n-1} + \ldots$$
$$A_0\, t_1^{\,2} + A_1\, t_1 + A_2 = (p_0\, q_3)\, t_1^{\,n-1} + \ldots$$

a t. d.

Jest tedy hledaný resultant determinantem n-řádkovým, jehož členy se skládají lineárně z výrazů $(p_i\, q_k)$. Avšak měli jsme

$$p_i = \alpha_i\, x - \beta_i; \qquad p_k = \alpha_k\, x - \beta_k,$$
$$q_i = \alpha_i\, y - \gamma_i; \qquad q_k = \alpha_k\, y - \gamma_k,$$

a tudíž

$$(p_i\, q_k) = (\alpha_k\, \gamma_i - \alpha_i\, \gamma_k)\, x + (\alpha_i\, \beta_k - \alpha_k\, \beta_i)\, y + \beta_i\, \gamma_k - \beta_k\, \gamma_i.$$

Jsou tedy veškery členy onoho determinantu *lineárnými* funkcemi souřadnic x, y a výsledek eliminace proměnné t z rovnic dané čáry repraesentuje tudíž čáru n-tého stupně.

VIII. *O tom, že není možná, aby se racionálná čára rozložila na čáry nižší.*

Každá racionálná čára jest čarou jednotnou t. j. značí-li ϱ a σ funkce racionálné, tu stanoví rovnice

$$x = \varrho\,(t), \qquad y = \sigma\,(t) \tag{1}$$

vždy čáru jedinou, t. j. nerozkládající se na více různých čar nižších stupňů.

Napsané rovnice nemohou tedy nikdy stanoviti souhrn dvou neb více čar n. př. soustavu dvou kuželoseček, nebo kuželosečku a přímku a p.

Chtějíce to dokázati, podotýkáme nejdříve, že přísluší každé hodnotě t jen jediný bod x, y. Výminka by patrně jen tehdy mohla nastati, kdy racionálné funkce $\varrho(t)$ nebo $\sigma(t)$ nabývají neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$; to by však vyžadovalo, aby čítatel i jmenovatel racionálné funkce současně vymizely, n. př. při $t = t_0$. Pak ale obsahují oba faktora $t - t_0$, jímž je lze krátiti a takto odstraniti neurčitost. Má-li tedy čára

$$F(x, y) = 0$$

býti repraesentována rovnicemi (1), tedy musí nesčíslné množství hodnot t podávati body (1) položené na čáře $F = 0$ t. j. rovnici

$$F[\varrho(t), \sigma(t)] = 0$$

lze vyhověti nesčíslným množstvím různých hodnot t a tudíž jí vyhoví každá hodnota t t. j. každý bod daný rovnicemi (1) se nalezá na čáře F. Tím ale je věta dokázána. Neboť kdyby rovnice (1) repraesentovaly dvě čáry

$$F(x, y) = 0 \text{ a } \Phi(x, y) = 0,$$

tedy bychom soudili, že se nalezá každý bod (1) jak na jedné, tak i na druhé čáře, t. j. že jsou obě čáry totožny.

Eliminujeme-li z rovnic (1) hodnotu t a je-li výsledek eliminační rovnice

$$R(x, y) = 0,$$

tu jest R buď funkce nerozložitelná na faktory nižších stupňů aneb lze rozložiti R na faktory stejné. Jeví se tedy R co celistvá kladná mocnost

$$[F(x, y)]^n$$

nějaké celistvé funkce $F(x, y)$.

Vezmeme-li na př. rovnice

$$x = \frac{t^2 + t + 2}{t^2 + t},$$

$$y = \frac{t^2 + t - 1}{t^2 + t - 2},$$

obdržíme elliminací t

$$(2xy - x - 4y + 3)^2 = 0.$$

Zavedením jednoznačného parametru

$$\mu = t^2 + t + 1$$

obdržíme

$$x = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}, \quad y = \frac{\mu - 2}{\mu - 3}$$

a eliminací μ pak

$$2xy - x - 4y + 3 = 0.$$

IX. *O dvojnásobných bodech čar racionálných.*

Abychom se dodělali nějaké charakteristické známky racionálných čar, jest nám vzíti v úvahu jich zvláštní body.

Dána buď racionálná čára rovnicemi

$$x = \frac{\beta t^n + \beta_1 t^{n-1} + \ldots + \beta_n}{\alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$

$$y = \frac{\gamma t^n + \gamma_1 t^{n-1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$

v nichž t nechť značí parametr jednoznačný.

K vůli stručnosti položme

$$x = \frac{B(t)}{A(t)}, \quad y = \frac{C(t)}{A(t)},$$

aneb též

$$x = \varrho(t), \qquad y = \sigma(t).$$

Předpokládejme, že hodnotě $t = t_0$ přísluší dvojnásobný bod x_0, y_0 dané čáry. Veďme bodem tím přímku

$$a + bx + cy = 0, \tag{1}$$

tedy předpokládejme, že hodnoty a, b, c vyhovují rovnici

$$a + bx_0 + cy_0 = 0. \tag{2}$$

Průsečíky přímky (1) s danou čarou stanovíme, vložíme-li do (1) za x, y, dané racionálné výrazy; tím obdržíme

$$aA(t) + bB(t) + cC(t) = 0. \tag{3}$$

Kořeny této rovnice n-tého stupně jsou pak parametry oněch průsečíku. Jeden z nich jest t_0, což patrno vzhledem k rovnici (2),kterou lze takto psáti

$$a + b\,\frac{B(t_0)}{A(t_0)} + c\,\frac{C(t_0)}{A(t_0)} = 0. \tag{2'}$$

Buďte t_1, t_2 .. t_{n-1} ostatní kořeny rovnice (3). Má-li daný bod x_0, y_0 býti bodem dvojnásobným, tu se musí vyskytnouti na každé přímce jím vedené mimo x_0, y_0 jen ještě $n-2$ body průsečné s čarou. Jednomu z kořenů $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ na př. t_1 musí tedy opět příslušeti bod x_0, y_0 t. j. musí

$$x_0 = \frac{B(t_1)}{A(t_1)}, \quad y_0 = \frac{B(t_1)}{A(t_1)};$$

Dvojný bod x_0, y_0 má pak *dva* parametry t. t_0 a t_1. Může se též přihoditi, že onen kořen t_1 se rovná t_0 t. j. že jest t_0 kořenem dvojnásobným rovnici (3). Pak vymizí derivace levé strany rovnice této pro $t = t_0$ t. j. pak máme

$$aA'(t_0) + bB'(t_0) + cC'(t_0) = 0.$$

Má-li rovnice ta platiti pro každou transversalu vedenou bodem x_0, y_0 t. j. má-li platiti pro každé a, b, c hovící rovnici (2'), musí patrně míti platnost relace

$$\frac{A'(t_0)}{A(t_0)} = \frac{B'(t_0)}{B(t_0)} = \frac{C'(t_0)}{C(t_0)}.$$

Že právě vyvinuté podmínky stačí, aby pojistily existenci dvojnásobného bodu, to vychází takto. Mějme předně dvě různé hodnoty parametru t na př. hodnoty t_0 a t_1 podávající týž bod; *bod ten jest pak bodem dvojnásobným.* Předpokládáme, že

$$\varrho(t_0) = \varrho(t_1) = x_0,$$
$$\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = y_0.$$

Bodem x_0, y_0 veďme libovolnou jinak přímku

$$a + bx + cy = 0;$$

pak tedy platí rovnice

$$a + bx_0 + cy_0 = 0,$$

t. j. platí

anebo
$$\left.\begin{array}{l} a + b\varrho(t_0) + c\sigma(t_0) = 0, \\ a + b\varrho(t_1) + c\sigma(t_1) = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Parametry průsečíků oné přímky s danou čarou jsou kořeny rovnice

$$a + b\varrho(t) + c\sigma(t) = 0;$$

dle rovnic (4) jsou patrně t_0 a t_1 dva z kořenů těch, a poněvadž jim přísluší týž bod x_0, y_0, soudíme, že každá tímto bodem vedená příčka protne čáru mimo tento bod jen ještě v $n-2$ bodech. Jest tedy x_0, y_0 skutečně bodem dvojným.

Nastane-li případ druhý t. j. máme-li takovou hodnotu t_0, že vyhovuje rovnicím

$$\frac{A'(t_0)}{A(t_0)} = \frac{B'(t_0)}{B(t_0)} = \frac{C'(t_0)}{C(t_0)}, \tag{5}$$

tu hodnotě t_0 přísluší opět dvojnásobný bod x_0, y_0, ale s tečnami splývajícími t. j. přísluší jí bod úvratu. Veďme bodem x_0, y_0 libovolnou přímku

$$a + bx + cy = 0;$$

platí tedy rovnice

$$aA(t_0) + bB(t_0) + cC(t_0) = 0.$$

Vzhledem k rovnicím (5) ji můžeme napsati ve tvaru

$$aA'(t_0) + bB'(t_0) + cC'(t_0) = 0,$$

z čehož patrno, že t_0 jest kořenem dvojnásobným rovnice n-tého stupně

$$aA(t) + bB(t) + cC(t) = 0,$$

stanovící průsečíky oné přímky s danou čarou. Obdržíme tedy mimo bod x_0, y_0 jen ještě $n - 2$ body, a tím vychází, že jest x_0, y_0 bodem dvojným. Bod ten jest ale bodem úvratu, poněvadž se v něm vyskytuje jen jediná tečna. Obecně jsou differenciály dx a dy příslušné differenciálu dt dány výrazy

$$dx = \frac{A(t)\,B'(t) - A'(t)\,B(t)}{[A(t)]^2}\,dt,$$

$$dy = \frac{A(t)\,C'(t) - A'(t)\,C(t)}{[A(t)]^2}\,dt,$$

tudíž směrnice tečny v bodu t dána formulí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(t)\,C'(t) - A'(t)\,C(t)}{A(t)\,B'(t) - A'(t)\,B(t)}.$$

Položíme-li zvláštní hodnotu t_0 za t, tu vzhledem k relacím (5) vymizí patrně i čítatel i jmenovatel posledního zlomku. Z toho jde, že lze položiti obecně

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t - t_0)\,\lambda(t)}{(t - t_0)\,\mu(t)} = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)},$$

kdež λ a μ značí celistvé funkce. Pro $t = t_0$ obdržíme nyní zcela určitou a jedinou směrnici tečny a bodu x_0, y_0:

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \frac{\lambda(t_0)}{\mu(t_0)}.$$

V případu prvním, kdy totiž máme dvě různé hodnoty t_0 a t_1 podávající týž bod x_0, y_0, jsou v tomto bodu dvě různé tečny, jichž směrnice jsou dány resp. výrazy

$$\frac{A(t_0)\,C'(t_0) - A'(t_0)\,C(t_0)}{A(t_0)\,B'(t_0) - A'(t_0)\,B(t_0)},$$
$$\frac{A(t_1)\,C'(t_1) - A'(t_1)\,C(t_1)}{A(t_1)\,B'(t_1) - A'(t_1)\,B(t_1)}.$$

Vznik bodů dvojnásobných a bodů úvratu při čarách racionálných můžeme touto úvahou objasniti. Nechť parametru t_0 přisluší bod x_0, y_0 t. j. nechť

$$x_0 = \varrho(t_0), \qquad y_0 = \sigma(t_0).$$

Mění-li se parametr t spojitě od t_0, tu obdržíme řadu bodů x, y spojitě po sobě sledujících, z nichž první jest x_0, y_0.

Stane-li se, že pro $t = t_1$ máme opět souřadnice x_0, y_0, t. j. že

$$x_0 = \varrho(t_1), \qquad y_0 = \sigma(t_1),$$

tu řada našich bodů dorazila opět do bodu x_0, y_0 a tudíž prochází křivka tímto bodem dvakrát, jest to bod dvojnásobný. Řada bodů, která přísluší hodnotám t od t_0 do t_1 vzatým bude obecně mizeti, to jest klička (Schleife) při dvojném bodu x_0, y_0 bude mizeti, čím více bude ubývati rozdílu mezi t_1 a t_0. Stává-li se tento rozdíl nekonečně malým, tu se stane i ona klička nekonečně malou a bod dvojný přejde na bod úvratu. V tomto případě tedy můžeme pokládat x_0, y_0 za hodnoty příslušné parametrům t_0 a $t_0 + \varepsilon$, značí-li ε hodnotu nekonečně malou. Máme tedy

$$x_0 = \varrho(t_0) = \varrho(t_0 + \varepsilon) \text{ aneb } = \varrho(t_0) + \varepsilon\,\varrho'(t_0),$$
$$y_0 = \sigma(t_0) = \sigma(t_0 + \varepsilon) \text{ aneb } = \sigma(t_0) + \varepsilon\,\sigma'(t_0),$$

z čehož jde

$$\varrho'(t_0) = 0, \qquad \sigma'(t_0) = 0$$

t. j.

$$A(t_0)\,B'(t_0) - A'(t_0)\,B(t_0) = 0,$$
$$A(t_0)\,C'(t_0) - A'(t_0) - C(t_0) = 0,$$

aneb

$$\frac{A'(t_0)}{A(t_0)} = \frac{B'(t_0)}{B(t_0)} = \frac{C'(t_0)}{C(t_0)};$$

tím nalezáme opět rovnice charakterisující bod úvratu.

X. *O stanovení dvojných bodů racionálných čar n-tého stupně; jich počet jest* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Dána buď racionálná čára n-tého stupně rovnicemi

$$x = \varrho(t) = \frac{B(t)}{A(t)} = \frac{\beta t^n + \beta_1 t^{n-1} + \ldots + \beta_n}{\alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n},$$
$$y = \sigma(t) = \frac{C(t)}{A(t)} = \frac{\gamma t^n + \gamma_1 t^{n-1} + \ldots + \gamma_n}{\alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n}. \qquad (1)$$

Čára ta obecně nebude míti bodů úvratu, neboť parametr t takového bodu musil by vyhověti *dvěma* rovnicím

$$\frac{A(t)}{A'(t)} = \frac{B(t)}{B'(t)} = \frac{C(t)}{C'(t)};$$

aby bylo možná vyhovět jim, je nutné, by vymizel resultant vznikající eliminací t z těchto rovnic a to se obecně nestane, neboť mezi koefficienty α, β a γ obecně není žádné relace.

Za to ale má daná čára vždy body dvojnásobné a s. v počtu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Ustanovíme-li totiž dvě *různé* hodnoty t_0 a t_1 tak, aby vyhověly dvěma rovnicím

$$\varrho(t_0) = \varrho(t_1); \qquad \sigma(t_0) = \sigma(t_1), \qquad (2)$$

tu přísluší parametru t_0 a parametru t_1 týž bod x_0, y_0 a ten bude bodem dvojnásobným dané čáry. Jde tedy o to, abysme řešili rovnice (2) s neznámými t_0 a t_1. Vzhledem k tomuto cíli podotkněme, že se hledaná řešení vyskytují nutně podvojně a sice tak, že vždy jeden *pár* řešení podává týž dvojný bod x_0, y_0. Skutečně hoví-li posice

$$t_0 = m, \qquad t_1 = n$$

rovnicím (2), tu jim patrně též vyhoví kořeny

$$t_0 = n, \qquad t_1 = m,$$

a jak to, tak i ono řešení podává patrně týž bod dvojnásobný o souřadnicích

$$x = \varrho(m) = \varrho(n); \qquad y = \sigma(m) = \sigma(n).$$

Vzhledem k této okolnosti jest výhodné, abychom zavedli na místo t_0 a t_1 dvě nové neznámé u, v, které by vzájemnou výměnou neznámých původních se neměnily.

Zvolme tedy za nové neznámé dvě symetrické funkce neznámých t_0 a t_1 a s. nejjednodušší, kladouce

$$t_0 + t_1 = -u; \qquad t_0 t_1 = v. \qquad (3)$$

Nežli zavedeme tyto neznámé do rovnic (2), stransformujeme tyto rozložením racionálných funkcí ϱ a σ na partiálné zlomky. Jsou-li a, b, c, . . l kořeny rovnice

$$\alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0,$$
tedy patrně můžeme položiti*)
$$\varrho(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b} + \ldots + \frac{L}{t-l},$$
$$\sigma(t) = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{A_1}{t-a} + \frac{B_1}{t-b} + \ldots + \frac{L_1}{t-l};$$
tu značí čítatele A, B ... L; A_1, B_1, ... L_1 stálé hodnoty, které lze známým spůsobem vyčísliti. Rovnice
$$\varrho(t_0) = \varrho(t_1)$$
přejde nyní do tvaru
$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{A}{t_0-a} + \ldots + \frac{L}{t_0-l} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{A}{t_1-a} + \ldots + \frac{L}{t_1-l}$$
t. j.
$$\left[\frac{A}{a^2 - a(t_0+t_1) + t_0 t_1} + \ldots + \frac{L}{l^2 - l(t_0+t_1) + t_0 t_1}\right](t_1 - t) = 0,$$
aneb vzhledem k rovnicím (3) a vynecháme-li s nullou různého činitele $t_1 - t_0$,
$$\frac{A}{a^2+au+v} + \frac{B}{b^2+bu+v} + \ldots + \frac{L}{l^2+lu+v} = 0. \qquad (4)$$
Podobně přechází rovnice
$$\sigma(t_0) = \sigma(t_1)$$
na tvar
$$\frac{A_1}{a^2+au+v} + \frac{B_1}{b^2+bu+v} + \ldots + \frac{L_1}{l^2+lu+v} = 0. \qquad (5)$$
Z rovnic (4) a (5) jest nám stanoviti neznámé u a v. Po odstranění jmenovatelů snadno shledáme, že jsou obě tyto rovnice stupně $(n-1)$-ho vzhledem k neznámým u, v; obdržíme tudíž $(n-1)^2$ řešení u, v. Po odstranění jmenovatelů je však taky patrno, že vyhovíme rovnicím (4) a (5), zvolíme-li za u, v takové hodnoty, při kterých vymizí *dva* z následujících n výrazů:
$$a^2 + au + v; \; b^2 + bu + v; \; \ldots . \; l^2 + lu + v.$$
První a druhý vymizí při
$$u = -(a+b), \quad v = ab,$$
první a třetí při
$$u = -(a+c), \quad v = ac,$$
atd. ostatní kombinace po dvou. Takových řešení u, v obdržíme

*) Viz Studnička, Základové v. math., O počtu differ. 2. v. pag. 129.

tedy $\frac{1}{2} n(n-1)$. Položivše je do rovnic (3) za u a v, obdržíme hodnoty neznámých t_0 a t_1 a sice v prvním případu

$$t_0 = a,\ t_1 = b;$$

v druhém

$$t_0 = a,\ t_1 = c;$$

atd. Pro všecky tyto hodnoty parametru vymizí však funkce $A(t)$, tudíž nám podávají nekonečně vzdálené body naší čáry, a ty nejsou body dvojnými. Jest tedy nutno, abychom tato řešení v počtu $\frac{1}{2} n(n-1)$ zavrhli, čímž zbývá

$$(n-1)^2 - \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

řešení u, v. Každému systému u, v přísluší pak dva parametry t, jež vzhledem k (3) jsou kořeny rovnice

$$t^2 + ut + v = 0.$$

Oběma pak parametrům přísluší jeden bod dvojnásobný

$$x = \varrho(t),\ y = \sigma(t).$$

Má tedy daná čára skutečně $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ body dvojnásobné.

Body dvojnásobné mohou se ve zvláštních případech státi body úvratu je-li u, v; jedno řešení stanovící bod dvojný s parametry t_0, t_1, tu přejde tento bod na bod úvratu, jestliže $t_0 = t_1$ a pak tedy máme

$$t_0 + t_0 = -u,\ t_0 t_0 = v,$$

z čehož

$$u^2 - 4v = 0,$$

co relace charakterisující bod úvratu.

XI. *Racionálná čára má dvojnásobných bodů co možná nejvíce.*

Buď C^n racionálná čára n-tého stupně; dle předcházející úvahy bude míti $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojných bodů (resp. bodů úvratu). Snadno ukážeme, že není možná, aby čára n-tého stupně měla více než $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojnásobných bodů, arci nemá-li se rozložiti na čáry nižší.

Kdyby nějaká čára n-tého stupně měla

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$$

dvojnásobný bod, tu zvolme na čáře té dalších libovolných bodů v počtu $n-3$ a všemi takto vytknutými body v počtu

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1+n-3=\frac{(n-2)(n+1)}{2}$$

veďme čáru stupně $(n-2)$-tého; tato jest úplně stanovena, neboť obecně stanoví

$$\frac{\mu(\mu+3)}{2}$$

bodů čaru stupně μ-tého. Čára n-tého a čára $(n-2)$-tého stupně se protínají v dvojnásobných bodech, což repraesentuje

$$2\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right]$$

průsečíků a v dalších $n-3$ bodech celkem v

$$(n-1)(n-2)+2+n-3 \text{ čili } (n-2)\,n+1$$

bodu. Tím patrno, že se nutně protnou v nekonečném množství bodů, a to je jen tehdy možné, rozloží-li se čára C^n na čáry nižších stupňů.

Že čára stupně n a nerozkládající se na čáry stupňů nižších (tedy nezvrhlá čára stupně n) může míti $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dvojnásobné body, toto dokladem jsou právě racionalné výrazy souřadnic x a y pomocí proměnného parametru.

Pro $n=3$ soudíme, že každá racionalná čára kubická má dvojnásobný bod.

Pro $n=4$, že každá bikvadratická racionálná čára má tři dvojnásobné body, atd.

XII. *Má-li čára n-tého stupně* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *bodů dvojnásobných, jest čarou racionálnou.*

K důkazu této věty jest nám třeba následující věty pomocné:

„*Dána-li je čára n-tého stupně*

$$F(x, y)=0,$$

a svazek algebraických čar

$$\Phi(x, y) + \lambda \Psi(x, y) = 0,$$

a protíná-li každá čára tohoto svazku čáru F v bodech, z nichž jen jeden jest proměnlivý (t. j. jeden, jenž se mění s hodnotou λ), *ostatní ale pevny, tu lze vyjádřiti souřadnice hyblivého průsečíku co racionálné funkce hodnoty λ".*

Souřadnice x, y průsečíků obou čar jsou kořeny rovnic

$$F(x, y) = 0,$$
$$\Phi(x, y) + \lambda \Psi(x, y) = 0.$$

Eliminací jedné n. př. y obdržíme jistou rovnici

$$R(x, \lambda) = 0; \qquad (1)$$

R značí celistvou funkci hodnot x a λ. Dle supposice se mění jen jeden kořen této rovnice současně s λ t. j. značí-li μ jakoukoli hodnotu, tu bude rovnice (1) s rovnicí

$$R(x, \mu) = 0 \qquad (2)$$

míti vespolek všecky kořeny až na jeden.

Stanovíme-li tedy známou cestou největšího společného dělitele výrazů proměnné x:

$$R(x, \lambda) \text{ a } R(x, \mu),$$

tu společný dělitel takto stanovený $T(x)$ nebude obsahovati ani λ, ani μ, a dále bude podíl

$$\frac{R(x, \lambda)}{T}$$

lineárnou funkcí proměnné x. Tedy máme

$$\frac{R(x, \lambda)}{T} = p\,x + q,$$

kdež p a q patrně značí celistvé funkce hodnoty λ. Hyblivý průsečík má tedy úsečku x danou rovnicí

$$p\,x + q = 0,$$

tudíž jest tato úsečka

$$x = -\frac{q}{p}$$

vyjádřena co racionálná funkce hodnoty λ.

Obdobným spůsobem lze vyjádřiti pořadnici y hyblivého průsečíku co racionálnou funkci hodnoty λ. Tím je dokázána pomocná věta.

Buď tedy dána čára C^n n-tého stupně s $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ body dvojnásobnými. Označme tyto body literami $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, kladouce k vůli stručnosti písmenu ν za číslo $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Z těchto bodů zvolme*) $n - 2$ n. př. $A_1, A_2, \ldots A_{n-2}$ za body dvojnásobné čáry C^{n-1} stupně $n - 1$ a zbývající body A_{n-1}, $A_n, \ldots A_\nu$ a nějaký (libovolný) další bod B dané čáry C^n za jednoduché body čáry C^{n-1}. Těmto podmínkám vyhoví nekonečné množství čar stupně $(n - 1)$-ho a souhrn jich bude svazkem čar tohoto stupně. Neboť každý dvojný bod nahražuje *tři* dané jednoduché body, máme tedy pro koefficienty v rovnici čáry C^{n-1}

$$3(n-2) + \nu - (n-2) + 1$$

t. j.

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-1+3) - 1$$

podmínek, jimiž lze všecky koefficienty vyjádřiti co linearné funkce jednoho, jejž označme λ. Seřadivše dle λ, objeví se rovnice čáry C^{n-1} ve tvaru

$$\Phi(x, y) + \lambda\, \Psi(x, y) = 0,$$

kdež Φ a Ψ značí celistvé funkce stupně $n - 1$. Body A_1, A_2, $\ldots A_\nu$, B prochází čára C^{n-1}, nechť si má λ jakoukoli hodnotu, jsou to tedy průsečíky čar C^n a C^{n-1} nezávislé na hodnotě λ. Body $A_1, A_2, \ldots A_{n-2}$ jsouce dvojnásobné jak v čáře C^n, tak i v C^{n-1} repraesentují každý čtyry průsečíky těchto čar, body $A_{n-1}, A_n, \ldots A_\nu$ pak platí vždy za dva průsečíky, pročež máme celkem

$$4(n-2) + 2[\nu - (n-2)] + 1$$

t. j.

$$n(n-1) - 1$$

pevných průsečíků obou čar C^n a C^{n-1}. Jest tudíž jediný průsečík hyblivým a dle pomocné věty můžeme vyjádřiti souřadnice x, y tohoto bodu (který může zaujmouti patrně každou polohu na C^n) co racionálné funkce hodnoty λ t. j. můžeme odvoditi výrazy racionálné

$$x = \varrho(\lambda), \qquad y = \sigma(\lambda)$$

pro libovolný bod čáry C^n. Tím jsme ale dokázali vyřčenou větu.

XIII. *O jiném spůsobu, jakým lze vyjádřiti x, y co racionálné funkce neodvisle proměnné.*

Tento druhý spůsob udal *Clebsch.* Budiž opět C^n čarou stupně n mající ν č. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bodů dvojnásobných.

---

*) Dle *Chasles*-a v Comptes rendus, t. LXII, pag. 584; zde udává ještě jiné řešení pomocí svazku čar stupně $(n - 2)$-ho.

Pokusme se o sestrojení svazku křivek h-tého stupně C^h, pomocí jehož bychom mohli řešiti danou úlohu. Zvolme dvojné body $A_1, \ldots A_\nu$ dané čáry C_n a dalších a bodů této čáry za základné (jednoduché) body svazku čar C^h. Svazek h-tého stupně jest stanoven

$$\tfrac{1}{2}h\,(h+3)-1$$

základními body; položme tedy

$$\nu + a = \tfrac{1}{2}h\,(h+3)-1. \qquad (1)$$

Každá čára svazku nechť protne danou čáru C^n mimo body základní jen ještě v jediném bodu t. j. předpokládejme dále, že

$$2\nu + a + 1 = n\,h. \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) ustanovme nyní h a a. Vyloučením hodnoty a obdržíme pro h relaci

$$h^2 + (3-2n)\,h + 2\nu = 0,$$

z níž jde

$$h = n-1 \text{ aneb } = n-2.$$

V případu prvním máme pak

$$a = 2n-3,$$

a v druhém

$$a = n-3.$$

První řešení záleží tedy v tom, že si sestrojíme svazek

$$\Phi(x,y) + \lambda\,\Psi(x,y) = 0 \qquad (3)$$

čar stupně $n-1$ procházejících body $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ a dalšími $2n-3$ pevně zvolenými body dané čáry C^n. Hyblivý průsečík čáry (3) s C^n má pak souřadnice x, y, jež možná vyjádřiti racionálně hodnotou λ.

Při druhém řešení užijeme svazku čar stupně $n-2$ vedených vesměs body $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ a dalšími $n-3$ pevnými body na C^n.

XIV. *Příklad.* Zvolme čáru čtvrtého stupně

$$f(x,\ y) \equiv x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0, \qquad (1)$$

kterou uvádí prof. *Studnička* ve svém differenciálném počtu (2. vyd., str. 194) co příklad, jednaje o bodech zvláštních. K vůli rozhodnutí, zda-li je tato čára racionálnou čili nic, stanovíme její body mnohonásobné. V těchto bodech vymizí částečné derivace funkce f dle x a y vzaté. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4a^2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6ay^2 - 6a^2y.$$

Tyto derivace vymizí, mají-li x, y tyto hodnoty:

$$x = 0, \ +a, \ -a; \ y = 0, \ -a;$$

t. j. ony vymizí pro tyto hodnoty neznámých 0, 0; 0, $-a$; a, 0; $a, -a$; $-a$, 0; $-a$, $-a$. Však z těchto řešení činí jen druhé, třetí a paté též $f = 0$, jsou tedy body

$$x = a, \ y = 0; \ x = -a, \ y = 0; \ x = 0, \ y = -a$$

body dvojnásobnými *).

Daná čára čtvrtého stupně majíc tři body dvojnásobné jest racionálnou. Chtějíce vyjádřiti souřadnice x, y bodu jejího co racionálné funkce proměnného parametru použijme na př. druhého řešení z předcházejícího článku.

Zde $n = 4$, tedy užijeme svazku čar $n - 2 = 2$-ho stupně; základné body tohoto svazku budou nalezené body dvojnásobné a ještě jeden bod na čáře libovolně zvolený na př. bod $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$. Označme ony tři body a bod tento literami A, B, C, D. Pak zní rovnice přímky BD

$$\frac{x}{-a} + \frac{2y}{a} - 1 = 0,$$

a přímky AC

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} - 1 = 0,$$

teď repraesentuje rovnice

$$(-x + 2y - a)(x - y - a) = 0$$

souhrn přímek BD a AC, a tudíž kuželosečku procházející body A, B, C, D. Přímky AB a CD jsou osy x a y, tedy souhrn přímek AB a CD dán rovnicí

$$xy = 0,$$

a to opět jest kuželosečka vedená oněmi čtyrmi body. Podává tedy rovnice

$$(-x + 2y - a)(x - y - a) + \lambda xy = 0$$

t. j. $$x^2 + (\lambda - 3)xy + 2y^2 + ay - a^2 = 0$$

svazek čar druhého stupně vedených body A, B, C, D. Učiníme-li

$$\lambda - 3 = t$$

máme rovnici

$$x^2 + txy + 2y^2 + ay - a^2 = 0. \tag{2}$$

*) Viz l. c.

Každá čára (2) protne danou čáru mimo dvojnásobné body A, B, C, a bod D jen ještě v jediném bodu, jehož souřadnice lze vyjádřiti racionalně pomocí parametru t. Eliminujeme-li z (1) a (2) pořadnici y, obdržíme odstraněním y^3 pro úsečku x hledaného průsečíku rovnice

$$2y^2 + y(a + tx) + x^2 - a^2 = 0, \qquad (2)$$

$$(\lambda ax - 2a^2)y^2 + a(x^2 - a^2)y + (x^2 - a^2)^2 = 0. \qquad (3)$$

Označíme-li k vůli stručnosti koefficienty při mocnostech y resp. p, q, r a p', q', r' bude

$$\begin{vmatrix} (pr), & (qr') \\ (qp'), & (rp') \end{vmatrix} = 0$$

eliminační výsledek. Zní pak

$$x^3(x^2 - a^2)^2[6atx - 4x^2 - at^3x] = 0;$$

činitelé x^3 a $(x^2 - a^2)^2$ se patrně vztahují k bodům C, D, A a B, a tudíž dána úsečka hyblivého průsečíku rovnicí

$$6atx - 4x^2 - at^3x = 0,$$

tedy

$$x = \frac{1}{4}at(6 - t^2), \qquad (4)$$

Příslušné y pak dáno z (2) a (3) výrazem

$$y = -\frac{(qr')}{(pr')} = \frac{t(x^2 - a^2)}{at - 2x}$$

a tedy po krátké redukci

$$y = \frac{a}{8}\,\frac{t^2(6 - t^2)^2 - 16}{t^2 - 4},$$

aneb provedeme-li divisi, která beze zbytku vyjde,

$$y = \frac{a}{8}(t^4 - 8t^2 + 4). \qquad (5)$$

Rozumí se samo sebou, že eliminací hodnoty t z rovnic (4) a (5) bychom se dodělali opět rovnice (1), o čemž nechť se čtenář sám přesvědčí.

Učiníme-li jednou $x = 0$, jednou $y = 0$, nalezneme parametry bodů dvojnásobných a bodu D. Jest pak

$$t = 0$$

parametr bodů D, a hodnoty

$$t = +\sqrt{6},\ t = -\sqrt{6}$$

parametry bodu C. Pro $y = 0$ musí platiti

$$t^4 - 8t^2 + 4 = 0$$

z čehož

$$t_1 = \sqrt{4+2\sqrt{3}},\ t_2 = \sqrt{4-2\sqrt{3}},$$
$$t_3 = -\sqrt{4+2\sqrt{3}},\ t_4 = -\sqrt{4-2\sqrt{3}},$$

toť po dvou parametry bodů A a B. Které patří ku A, které ku B? Náleží-li t a t' k témuž bodu, musí

$$x = \frac{a}{4}\, t\,(6 - t^2) = \frac{a}{4}\, t'\,(6 - t'^2),$$

tedy
$$t^3 - t'^3 - 6\,(t - t') = 0$$
t. j. poněvadž $t - t' \gtrless 0$, musí
$$t^2 + t\,t' + t'^2 - 6 = 0.$$

Snadno shledáme, že této podmínce vyhoví jen t_1, t_4 a t_2, t_3, a sice obdržíme pro první dvě hodnoty $x = -a$, pro druhé dvě $x = +a$, jsou tedy t_1 a t_4 parametry bodu B, t_2 a t_3 pak parametry bodu A.

XV. *O mnohonásobných bodech vůbec při čarách racionálných.*

V článku IX. jsme seznali, kterak vzniká bod dvojnásobný při čáře racionálné; došli jsme toho výsledku, že jsou souřadnice x a y takového bodu dány *dvěma* hodnotami t_0 a t_1 proměnného parametru. Zcela obdobně soudíme, že vznikne bod k-násobný x, y, jestliže se vyskytne k hodnot t_0, t_1, .. t_{k-1} proměnného parametru podávajících tytéž hodnoty pro souřadnice x, y. Kombinujeme-li tyto hodnoty po dvou, tedy se doděláme $\frac{1}{2} k\,(k - 1)$ párů hodnot t podávajících tytéž hodnoty x, y; obdržíme tudíž taky $\frac{1}{2} k\,(k - 1)$ řešení u, v rovnic (4) a (5) v čl. X., podávajících však vesměs týž bod x, y. Z toho jde, že bod k-násobný absorbuje $\frac{1}{2} k\,(k - 1)$ řešení uvedených rovnic t. j. *že nahražuje tolik bodů dvojnásobných.*

Toto nahražování $\frac{1}{2} k\,(k - 1)$ bodů dvojnásobných jedním bodem k-násobným má i platnost v příčině věty v čl. XII. uvedené t. j. *dána-li je čára n-tého stupně s jedním bodem k-násobným a s δ body dvojnásobnými a platí-li rovnost*

$$\tfrac{1}{2} k\,(k - 1) + \delta = \tfrac{1}{2}\,(n - 1)\,(n - 2),$$

pak jest čára racionálnou.

Zvolme daný bod k-násobný za bod $(k-1)$ násobný čáry C^{n-1} stupně $n-1$. Tuto čáru pak veďme danými δ body dvojnásobnými a dalšími $2n-3$ body dané čáry. Čára C^{n-1} má takto vyhověti

$$\frac{(k-1)k}{2}+\delta+2n-3\text{*)}$$

t. j. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2n-3$

t. j.
$$\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}-1$$

podmínkám. Veškeré čáry C^{n-1} budou tudíž tvořiti svazek. Dané body čar C^{n-1} repraesentují průsečíky s danou čarou v počtu

$$k(k-1)+2\delta+2n-3$$

t. j. $(n-1)(n-2)+2n-3$

t. j. $n(n-1)-1.$

Protne tedy každá čára C^{n-1} danou čáru jen v jediném hyblivém bodu a tudíž lze souřadnice jeho vyjádřiti co racionálné funkce jedné proměnné.

Jest na bíle dni, že můžeme tento výsledek rozšířiti takto: *Dána-li je čára stupně n-tého, která má α_2 bodů dvojnásobných. α_3 bodů trojnásobných atd., konečně α_k bodů k-násobných a platí-li relace*

$$\alpha_2+3\alpha_3+6\alpha_4+\ldots+\tfrac{1}{2}k(k-1)\alpha_k=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

tu jest to čára racionálná.

Svazek čar stupně $(n-1)$-ho, pomocí jehož pak vyjádříme souřadnice dané čáry co racionálné funkce jedné proměnné, ten sestrojíme takto. Dvojnásobné body v počtu α_2 zvolme za body jednoduché čar C^{n-1}, trojnásobné body v počtu α_3 za body dvojnásobné těchto čar atd., konečně body k-násobné dané čáry za body $(k-1)$ násobné čar C^{n-1}; tyto čáry pak veďme ještě dalšími $2n-3$ pevnými body dané čáry. Čáry C^{n-1} pak jsou podrobeny lineárným podmínkám v počtu

$$\alpha_2+3\alpha_3+6\alpha_4+\ldots+\tfrac{1}{2}k(k-1)\alpha_k+2n-3$$

t. j. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2n-3$

čili $\frac{1}{2}(n-1)(n-1+3)-1,$

*) Dán-li bod r-násobný, tedy tím dáno $\frac{r(r+1)}{2}$ lineárných relac mezi koefficienty rovnice hledané čáry C^{n-1}.

tvoří tudíž čáry C^{n-1} skutečně svazek. Pevně zvolené body repraesentují průsečíky dané čáry s každou čarou svazku v počtu

$$2\,\alpha_2 + 6\,\alpha_3 + 12\,\alpha_4 + \ldots + k\,(k-1)\,\alpha_k + 2n - 3$$

t. j. $$(n-1)\,(n-2) + 2n - 3$$

t. j. $$n\,(n-1) - 1,$$

a tím patrně je dokázáno, co jsme tvrdili.

XVI. *O počtu podmínek, kterým vyhovují průsečíky dané algebraické čáry s jinými čarami algebraickými.*

K vůli větší jasnosti začněme s případem zvláštním. Dána buď libovolná čára třetího stupně C^3. Protněme ji čarou čtvrtého stupně C^4; průsečíků se vyskytne $3 . 4 = 12$. Ačkoli čára čtvrtého stupně jest stanovena teprve $\frac{1}{2}\,4\,(4+3) = 14$ body, přece nelze vytknouti na C^3 libovolných dvanáct bodů co průsečíky čáry C^3 s nějakou bikvadratickou čarou C^4. Kdybychom vytkli na čáře C^3 libovolně 12 bodů a mimo C^3 ještě další dva body, tedy by těmito 14 body arci procházela určitá čára C^4, avšak ona by se rozložila na čáru C^3 a na spojivou přímku oněch dalších dvou bodů. Vytkneme-li si však na C^3 jen 11 bodů a mimo C^3 tři body A, B, C, tu prochází těmito 14 body čára C^4, která se nemůže rozložiti na C^3 a na přímku, poněvadž body A, B a C nemusí býti na přímce. Z toho jde, že lze libovolně zvoliti na C^3 jen 11 průsečíků této čáry s čarou bikvadratickou. Těmito 11 body jest však dvanáctý průsečík úplně stanoven t. j. bikvadratické čáry vedené jedenácti body čáry C^3 procházejí vesměs jistým dvanáctým bodem této křivky. Veďme jedenácti body $M_1, \ldots M_{11}$ čáry C^3 dvě bikvadratické čáry C^4 a C_4 a buďte A, B dva průsečíky těchto čar položené mimo C^3. Všecky bikvadratické čáry vedené třinácti body $M_1, \ldots M_{11}$, A, B tvoří svazek, mají tudíž těchže 16 průsečíků vespolek, tedy prochází čára C_4 všemi průsečíky čar C^3 a C^4; to však jsme chtěli ukázati.

Z této úvahy vychází, že existuje mezi dvanácti průsečíky dané čáry třetího stupně s čarou bikvadratickou *jedna* relace; jedenácti z takových průsečíků jest dvanáctý stanoven.

Obdobně bychom mohli ukázati, že existuje *jedna* relace mezi $3s$ průsečíky dané čáry kubické s čarou stupně s, při čem $s \geqq 3$; vezmeme-li $s < 1$, tedy $s = 1$ neb $s = 2$, tu máme v prvním případu 3 průsečíky, z nichž 2 libovolné, v druhém

6 průsečíku, z nichž 5 libovolných, tedy vysvítá, že platí výrok i v těchto dvou případech.

Je-li dána obecně čára C^n stupně n, tu existují mezi ns průsečíky této čáry s nějakou čarou C^s stupně $s \geqq n-2$ relace v počtu $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. To věta *Jacobi-ho* (Crellův žurnál, t. XIII). Předpokládejme nejdříve, že $s \geqq n$. Označíme-li literou ν číslo $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, chceme dokázati, že z ns průsečíků obou čar jest libovolných jen $ns-\nu$, ostatní pak že jsou těmito již stanoveny. Kdybychom zvolili $ns-\nu+1$ z oněch průsečíků libovolně na C^n, tu bysme mohli zvoliti mimo C^n ještě

$$\tfrac{1}{2}s(s+3)-[ns-\nu+1]$$

t. j.

$$\tfrac{1}{2}(s-n)(s-n+3)$$

body, kterými pak je stanovena čára C^s. Tato však by se skládala z čáry dané C^n a z čáry C^{s-n} stupně $s-n$ vedené právě vytknutými body. Nemá-li se tedy C^s rozložiti na danou čáru a na čáru stupně $s-n$, nutno zvoliti jen $ns-\nu$ bodů čáry C^s na čáře C^n. Veďme těmito body dvě čáry C^s a C_s stupně s; dokážeme, že protínají C^n v těchže bodech. Čáry C^s a C_s se protínají v s^2 bodech, z nichž může býti na C^n nanejvýš ns a tedy mimo C^n najisto s^2-ns. Z těchto zvolme

$$\tfrac{1}{2}(s-n)(s-n+3)$$

a veďme jimi čáru C^{s-n} stupně $s-n$. Čára tato s čarou C^n tvoří čáru Γ^s stupně s procházející

$$\tfrac{1}{2}(s-n)(s-n+3)+ns-\nu$$

t. j.

$$\tfrac{1}{2}s(s+3)-1$$

průsečíky čar C^s a C_s. Jsou tedy čáry C^s, C_s a Γ^s čarami jednoho svazku a tedy procházejí těmiže s^2 body, i prochází tedy C_s průsečíky čar C^s a C^n, a to jsme měli dokázati.

Předpokládáme-li, že $s<n$, pak se arci není co obávati, že by čára C^s se rozložila na C^n a na jiné čáry, můžeme tedy zvoliti na C^n všecky body, jimiž stanovíme C^s t. j. body v počtu $\frac{1}{2}s(s+3)$. Mezi ns průsečíky obou čar existuje tedy

$$ns-\tfrac{1}{2}s(s+3)$$

relací. Tento počet se shoduje s počtem $\nu=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ v případech $s=n-1$ a $s=n-2$, neboť patrně rozdíl obou čísel

$$n s - \frac{s}{2}(s+3) - \nu = - \frac{(n-s-1)(n-s-2)}{2}$$

vymizí v obou těchto případech.

Je-li $s < n-2$, tu dán počet relac výrazem

$$n s - \tfrac{1}{2} s (s+3)$$

a on je *vždy menší čísla* ν. Neboť položíme-li $n = s + \sigma$, tu bude $\sigma \gtreqless 3$, a nerovnost, o niž jde

$$s(s+\sigma) - \tfrac{1}{2} s(s+3) < \tfrac{1}{2}(s+\sigma-1)(s+\sigma-2),$$

vyžaduje, by

$$0 < \sigma(\sigma - 3) + 2,$$

podmínka, jíž σ patrně vyhovuje.

Učiníme-li n. př. $n = 4$, bude $\nu = \tfrac{1}{2} 3 . 2 = 3$ t. j. mezi $4s$ průsečíky dané bikvadratické čáry s čarou stupně $s \geqq 4 - 2$ t. j. > 2 existují tři relace. V případu $s = 1$ máme $n s - \tfrac{1}{2} s (s+3) = 2$ relace a počet ten jest menší čísla $\nu = 3$.

XVII. *Odvození rovnic, jimž vyhovují parametry průsečíků dané racionálné čáry s křivkami algebraickými.*

Dána buď racionálná čára stupně n-tého rovnicemi

$$x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}; \tag{1}$$

litery f, φ, ψ značí celistvé funkce stupně n-tého proměnného parametru t. Buďte x_0, y_0 souřadnice jednoho z dvojnásobných bodů, jichž čára má $\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$; nechť jsou $t = a$, $t = b$ hodnoty parametru podávající tento bod t. j. nechť

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{f(a)}{\psi(a)} = \frac{f(b)}{\psi(b)}, \\ y_0 &= \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi(b)}{\psi(b)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Patrně máme rovnice

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \frac{\psi(b)}{\psi(a)} = c, \tag{3}$$

označíme-li literou c společnou hodnotu napsaných tří zlomků.

Budiž nyní

$$F(x, y) = 0$$

rovnice libovolné čáry stupně s a stanovme průsečíky její s danou čarou. Parametry těchto bodů jsou kořeny rovnice

$$F\left(\frac{f(t)}{\psi(t)}, \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\right) = 0.$$

Položíme-li

$$\psi^s F\left(\frac{f}{\psi},\ \frac{\varphi}{\psi}\right) = H(f, \varphi, \psi),$$

tu jest H patrně stejnorodá funkce liter f, φ, ψ a s. stupně s-tého. Rovnice

$$H[f(t), \varphi(t), \psi(t)] = 0$$

stanoví pak ns hodnot parametru t příslušných hledaným průsečíkům obou čar. Označme tyto kořeny t_1, t_2, .. t_{ns} i bude patrně

$$H[f(t), \varphi(t), \psi(t)] = C(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_{ns})\,; \quad (4)$$

C tu značí jistou stálou hodnotu. Položíme-li souřadnice x_0, y_0 do funkce F, máme vzhledem k rovnicím (2)

$$F(x_0, y_0) = F\left[\frac{f(a)}{\psi(a)},\ \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right] = F\left[\frac{f(b)}{\psi(b)},\ \frac{\varphi(b)}{\psi(b)}\right]$$

a tedy také

$$[\psi(a)\psi(b)]^s F\left[\frac{f(a)}{\psi(a)},\ \frac{\varphi(b)}{\psi(b)}\right] = [\psi(a)\psi(b)]^s F\left[\frac{f(b)}{\psi(b)},\ \frac{\varphi(b)}{\psi(b)}\right]$$

t. j.

$$[\psi(b)]^s H[f(a), \varphi(a), \psi(a)] = [\psi(a)]^s H[f(b), \varphi(b), \psi(b)]$$

a tedy vzhledem k výrazům (3)

$$\frac{H[f(b), \varphi(b), \psi(b)]}{H[f(a), \varphi(a), \psi(a)]} = c^s,$$

t. j. vzhledem k rovnici (4)

$$\frac{(b - t_1)(b - t_2)\ldots(b - t_{ns})}{(a - t_1)(a - t_2)\ldots(a - t_{ns})} = c^s. \quad (5)$$

Toť *jedna* relace mezi parametry t_1, t_2, .. t_{ns} průsečíků čáry dané s čarou stupně s. Stálé a, b, c závisí patrně jen na dané čáře, nikoli na čáře stupně s. Každý dvojnásobný bod dané čáry podává nám jednu relaci tvaru (5), obdržíme tudíž celkem $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ relac (5), t. j. obdržíme *všecky* relace existující mezi parametry t_1, .. t_{ns}. Neboť při supposici $s \geqq n - 2$ jest počet existujících relac právě $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, v každém jiném případu pak jest menší tohoto čísla; rovnice (5) pak nepřestávají se shodovati a udávají všecky podmínky, jimž parametry t_1, .. t_{ns} musejí vyhověti, by příslušné body náležely čáře stupně s-tého.

Přejde-li uvažovaný bod dvojnásobný na bod úvratu, tu máme $a = b$ a relace (5) se vzhledem k rovnicím (3) redukuje na pouhou identitu $1 = 1$. Avšak i bod úvratu nám podává jednu relaci mezi parametry t, kterou odvodíme z rovnice (5), položíme-li nejdříve

$$b = a + \varepsilon$$

a učiníme-li $\lim \varepsilon = 0$. Především podává (3) pomocí věty *Taylorovy*

$$c = \frac{\psi(a+\varepsilon)}{\psi(a)} = \frac{1}{\psi(a)}\left[\psi(a) + \psi'(a)\,\varepsilon + .. + \psi^{(n)}(a)\,\frac{\varepsilon^n}{n!}\right]$$

a tedy

$$c^s = \left[1 + \frac{\psi'(a)}{\psi(a)}\,\varepsilon + .. + \frac{\psi^{(n)}(a)}{\psi(a)}\,\frac{\varepsilon^n}{n!}\right]^s.$$

Dále máme

$$\frac{b - t_i}{a - t_i} = \frac{a + \varepsilon - t_i}{a - t_i} = 1 + \frac{\varepsilon}{a - t_i}$$

a tudíž zní rovnice (5) nyní

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{a - t_1}\right) .. \left(1 + \frac{\varepsilon}{a - t_{ns}}\right) = \left[1 + \frac{\psi'(a)}{\psi(a)}\,\varepsilon + ..\right]^s.$$

Předpokládáme-li nyní, že ε se stává nekonečně malým, tu stačí, podržíme-li v obou stranách této rovnice — odstranivše v levo a v pravo jednici — jen členy obsahující první mocnost ε, a tím obdržíme krátivše hodnotou ε

$$\frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + .. + \frac{1}{a - t_{ns}} = s\,\frac{\psi'(a)}{\psi(a)}.$$

Položíme-li tedy k vůli stručnosti

$$\frac{\psi'(a)}{\psi(a)} = k,$$

bude k stálou závislou na uvažovaném bodu úvratu a relace, již nám tento bod úvratu podává, zní

$$\frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + .. + \frac{1}{a - t_{ns}} = s\,k. \qquad (6)$$

Každý bod úvratu podává rovnici tvaru (6); máme tudíž vždy $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ relací mezi ns parametry $t_1, .. t_{ns}$ a relace ty jsou buď tvaru (5) neb (6). Obě tyto rovnice patrně podávají relace lineárné mezi nejjednoduššími symetrickými funkcemi hodnot $t_1, t_2, .. t_{ns}$; to úplně se shoduje se speciálními příklady uveřejněnými v tomto časopisu, k nimž jsme v čl. I. již poukázali.

XVIII. *O užívání odvozených rovnic při řešení úloh týkajících se racionálných čar.*

Rovnic (5) a (6) lze výhodně užiti, kdykoli se jedná o vyšetření průsečíků dané racionálné čáry s čarami algebraickými. Po výtce sem náleží tak zvané úlohy dotyčné t. j. úlohy jednající o čarách algebraických, které se dané čáry dotýkají určitým spůsobem. Uvedeme zde příklad, o němž *Clebsch* pojednal v Crelle-ově žurnálu t. LXIV, na str. 61 v pojednání již citovaném. Budiž C^n daná racionálná čára n-tého stupně a položme

$$v = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Vytkněme si na čáře C^n $ns - vr$ bodů; *má se vésti těmito body čára* C^n *stupně* $s \gtreqless n-2$ *tak, aby se dotýkala dané čáry v* v *bodech a s. v každém ve stupni* $r-1$.*) Patrně lze pokládati úlohu za řešenu, ustanovíme-li oněch v bodů, v nichž se dotýká hledaná čára křivky dané.

Buďte $a^{(1)}$ a $b^{(1)}$ hodnoty parametru podávající dvojnásobný bod $D^{(1)}$ čáry dané, $a^{(2)}$ a $b^{(2)}$ nechť stanoví dvojnásobný bod $D^{(2)}$ atd.; parametr $\alpha^{(1)}$ nechť přísluší bodu úvratu $U^{(1)}$ dané čáry, $\alpha^{(2)}$ bodu úvratu $U^{(2)}$ atd. Značí-li pak $C^{(1)}$, $C^{(2)}$.. a $K^{(1)}$, $K^{(2)}$,.. stálé hodnoty závislé známým spůsobem na oněch parametrech, tu vyhovují průsečíky t_1, t_2, .. t_{ns} dané čáry C^n s každou čarou stupně s rovnicím

$$\frac{(b^{(i)}-t_1)(b^{(i)}-t_2)\,..\,(b^{(i)}-t_{ns})}{(a^{(i)}-t_1)(a^{(i)}-t_2)\,..\,(a^{(i)}-t_{ns})} = C^{(i)s}; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha^{(i)}-t_1} + \frac{1}{\alpha^{(i)}-t_2} + .. + \frac{1}{\alpha^{(i)}-t_{ns}} = s\,K^{(i)}. \qquad (2)$$

Všech těchto rovnic jest arci v, a jsou to rovnice podstatně různé v případu, kdy $s \geqq n-2$.

Buďte l_1, l_2, .. l_{ns-vr} parametry daných bodů a λ_1, λ_2, .. λ_v parametry hledaných bodů, v nichž se má dotýkati čára C^s dané racionálné křivky v stupni $r-1$. Čítáme-li každý parametr λ_1, .. λ_v r-kráte, tu podávají hodnoty λ a hodnoty l parametry ns průsečíků vyhovující posledním dvěma rovnicím t. j. rovnicím

*) Dvě čáry se dotýkají v jistém společném bodu v stupni $r-1$, shodují-li se derivace pořadnic těchto čar vzaté dle úsečky až do $(r-1)$ní, onen bod repraesentuje pak r průsečíků obou čar. V. *Studnička*: O počtu differencialním, 2. vyd. §. 46.

$$\left[\frac{(b^{(i)}-\lambda_1)\,..\,(b^{(i)}-\lambda_\nu)}{(a^{(i)}-\lambda_1)\,..\,(a^{(i)}-\lambda_\nu)}\right]^r \frac{(b^{(i)}-l_1)\,..\,(b^{(i)}-l_{ns-\nu r})}{(a^{(i)}-l_1)\,..\,(a^{(i)}-l_{ns-\nu r})} = C^{(i)s}, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} r\left[\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_1}+\,..\,+\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_\nu}\right]+ \\ +\frac{1}{a^{(i)}-l_1}+\,..\,+\frac{1}{a^{(i)}-l_{ns-\nu r}} = s\,K^{(i)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Z těchto ν rovnic lze vypočísti neznámé $\lambda_1, \,..\, \lambda_\nu$. Učiníme-li k vůli stručnosti

$$\frac{(b^{(i)}-\lambda_1)\,..\,(b^{(i)}-\lambda_\nu)}{(a^{(i)}-\lambda_1)\,..\,(a^{(i)}-\lambda_\nu)} = p_i, \tag{5}$$

$$\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_1}+\,..\,+\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_\nu} = q_i, \tag{6}$$

tedy obdržíme z (3) snadno p_i a z (4) q_i.

Rovnice (5) a (6) nám ale podávají lineárné relace mezi nejjednoduššími symetrickými funkcemi hodnot $\lambda_1, \,..\, \lambda_\nu$ a poněvadž takových relac (5) a (6) máme ν, tedy z nich vypočteme tyto symetrické funkce a utvoříme pak rovnici stupně ν, jejíž kořeny jsou $\lambda_1, \,..\, \lambda_\nu$.

Hodnotu p_i obdržíme z (3), odmocníme-li tuto rovnici v stupni r, jest tedy p_i schopno r různých hodnot.

Má-li daná racionálná čára $\varkappa$ bodů úvratu, tedy $\nu - \varkappa$ bodů dvojných, tu máme právě tolik rovnic (3) a též tolik hodnot p totiž hodnoty $p_1, \ldots p_{\nu-\varkappa}$. Každá jsouc schopna r různých hodnot, máme patrně $r^{\nu-\varkappa}$ soustav $p_1, \,..\, p_{\nu-\varkappa}$ a tedy i tolik řešení daného úkolu t. j.

„*Danými $ns - \nu r$ body racionálné čáry C^n prochází $r^{\nu-\varkappa}$ čar stupně s, dotýkajících se dané čáry v ν bodech v stupni r—1ním.*“

Dotyčné body čar C^s se vyznamenávají zajímavou vlastností, kterou lze takto odvoditi. Jest známo, že výraz

$$e^{\frac{2h\pi\sqrt{-1}}{r}}$$

podává všecky hodnoty $\sqrt[r]{1}$, učiníme-li posloupně $h = 0, 1, \,..\, r-1$. Máme tedy z (3) a (4) obecně

$$p_i\sqrt[r]{\frac{(b^{(i)}-l_1)\,..\,(b^{(i)}-l_{ns-\nu r})}{(a^{(i)}-l_1)\,..\,(a^{(i)}-l_{ns-\nu r})}} = e^{\frac{2h^{(i)}\pi\sqrt{-1}}{r}}C^{(i)\frac{s}{r}}, \tag{7}$$

$$q_i + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\alpha^{(i)} - l_1} + .. + \frac{1}{\alpha^{(i)} - l_{ns-vr}}\right] = \frac{s}{r} K^{(i)}. \quad (8)$$

Vytkněme si $r - 1$ řešení a buďte $h_1^{(i)}$ hodnoty celistvých čísel h při prvním řešení, při druhém $h_2^{(i)}$ atd., při $(r-1)$ním konečně $h_{r-1}^{(i)}$. Buďte nyní $h_r^{(i)}$ celistvá čísla vyhovující podmínkám, by součty

$$h_1^{(i)} + h_2^{(i)} + .. + h_{r-1}^{(i)} + h_r^{(i)}$$

byly dělitelny číslem r. Čísla $h_r^{(i)}$ stanoví také jednu čáru C^s, t. j. r-té řešení.

Napišme rovnici (7) pro všecka r řešení a násobme; a rovnici (8) a sečtěme, tu patrně se objeví rovnice (1) a (2) a s. budou po levé straně se vyskytovati parametry $l_1, .. l_{ns-vr}$ a parametry dotyčných bodů r čar C^s právě vytknutých.

Nalezá se tedy těchto $ns - vr + vr = ns$ bodů na čáře stupně s t. j.

„*Vedeme-li danými body a body dotyčnými $(r - 1)$-é čáry C^s (které řeší úkol) čáru Γ^s stupně s, tu protne danou čáru v dalších v bodech dotyčných jedné z čar C^s.*“

Zde lze i stotožniti čáry C^s, jichž užito $r - 1$, tedy n. př. první a druhou t. j. lze předpokládati, že $h_1^{(i)} = h_2^{(i)}$; jen že arci čára Γ^s se pak musí vzhledem k té okolnosti dotýkati čáry dané v bodech dotyčných oněch dvou čar, které jsme stotožnili.

Obdobně v případu, kdy stotožníme více čar C^s, třeba i všecky, jichž ve větě užito.

XIX. O použití theorie racionálných čar v počtu integrálném.

Úvah dosavadních lze výhodně upotřebiti v počtu integrálném při vyčíslení jistých integrálů o differenciálech algebraických; vytknutí této souvislosti mezi theorií algebraických čar a mezi počtem integralním jest dojista jednou z předních zásluh *Clebschových.*

Obecný differenciál algebraický jest tvaru

$$R(x, y)\, dx,$$

značí-li R racionálnou funkci argumentů x, y a víže-li proměnné x a y algebraická rovnice

$$f(x, y) = 0;$$

f jest funkce celistvá.

Kdykoli rovnice

$$f(x, y) = 0$$

repraesentuje čáru racionálnou, lze integrál

$$\int R(x, y)\,dx$$

v zakončeném tvaru vyčísliti a s. pomocí funkcí algebraických a logarithmických.

Neboť skutečně v tom případu můžeme vyjádřiti x a y co racionálné funkce téže proměnné t na př.

$$x = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \qquad y = \frac{\gamma(t)}{\delta(t)},$$

a pak

$$dx = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta^2}\,dt,$$

čímž integrál

$$\int R\,dx = \int R\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)\frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta^2}\,dt$$

redukován na integrál differenciálu racionálného; tento pak stanovíme známou cestou pomocí funkcí racionálných a logarithmických proměnné t. Proměnné t ale jest algebraickou funkcí proměnné x a tím dokázán učiněný výrok.

Dán-li n. př. integrál

$$\int R\,[x, \sqrt{a + bx + cx^2}]\,dx,$$

učiňme

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = y$$

a tedy

$$f(x, y) = a + bx + cx^2 - y^2 = 0.$$

Rovnice ta repraesentuje kuželosečku, tedy čáru racionálnou, tedy lze daný integrál známým spůsobem vyčísliti.

Bližších výkladů najde čtenář v pracích *Clebschových*; také v *Hermite*, Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, I. pag. 240.