Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. Najman

Lom světla v čočkách a centrických systémech. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 2, 224--232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123772`

Lom světla v čočkách a centrických systémech.

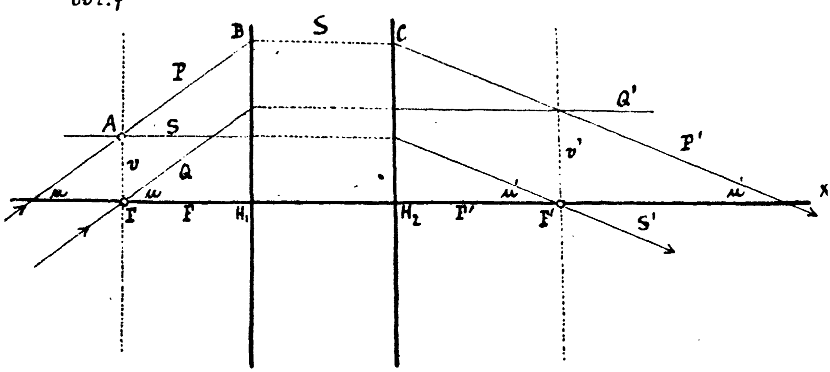
Napsal prof. J. Najman z Rakovníka.

(Pokračování.)

Zavedení hlavních rovin děkujeme C. F. Gaussovi. Význam jejich spočívá v tom, že užitím jich dostaneme, i když přihlížíme k tloušťce čočky, rovnice pro lom světla v čočce tak jednoduchého tvaru, jako kdybychom tloušťku čočky zanedbali, a že při konstrukci obrazu ku předmětu netřeba bráti ohled na to, jak paprsek světelný v čočce samotné probíhá.

C. Fr. Gauss odvozuje v „Dioptrische Untersuchungen“ z r. 1840 pojem hlavních rovin pomocí prostorové geometrie analytické tak, že vyjadřuje paprsek procházející optickým systémem centrickým rovnicemi přímky a hledá dvě roviny kolmé k ose té vlastnosti, aby je paprsek dopadající a vystupující protínal ve stejné vzdálenosti od osy. Gausse k tomu vedla ne-

obr. 7



ustálenost, jaká po tu dobu panovala v definici ohniskových dálek čoček. Do té doby byly totiž známy jen ty rovnice lomu světla v čočkách, při nichž se zanedbávala tloušťka čočky, a ohniskové distance byly počítány buď od středu čočky neb od obou sférických ploch, čímž vypadly ohniskové vzdálenosti i při totožném prostředí prvém a třetím nestejně veliké, s chybou téhož řádu jako tloušťka čočky. Neustálenost tu odstranil Gauss zavedením hlavních rovin. Definoval též přesně ohniskovou dálku. Dle něho jedině účelná definice ohniskové dálky je ta, že je to poměr velikosti obrazu nekonečně vzdáleného předmětu ku zdánlivé velikosti tohoto předmětu*), díváme-li se naň s místa čočky.

Poněvadž jsou ohniska systému a hlavní body body pevnými, jsou též vzdálenosti hlavních bodů od příslušných ohnisek veličinami stálými a pro daný systém charakteristickými, a zavádějí se jako ohniskové vzdálenosti daného systému. Obě ohniskové dálky, jež nemusí býti stejně velikými, počítejme od ohnisek v pravo kladně; prvá ohnisková dálka $F = \overline{FH_1}$ (v obrazci 7. kladná), a druhá $F' = \overline{FH_2}$ (v témž obrazci záporná). Systém S je opticky zúplna určen, dána-li je poloha hlavních rovin a obou ohnisek, neboť potom lze sestrojiti k paprsku P lomený P' tak, že vedeme z bodu A, kde P protíná prvou fokální rovinu, paprsek $S \parallel X$, jenž jde po lomu ohniskem F'. Paprsek P, jenž protíná první hlavní rovinu v bodě B, dává lomený paprsek P', který musí procházeti bodem C, obrazem to bodu B, a pak probíhati s S' parallelně, neboť obraz bodu A v prvé fokální rovině leží v nekonečnu. Tím je lomený paprsek P' dokonale určen. Vedeme-li z F paprsek $Q \parallel P$, tu lomený paprsek Q' jde rovnoběžně s osou a protíná druhou fokální rovinu v témže bodě jako P', neboť paprsky P a Q vycházejí z bodu nekonečně vzdáleného.

Paprsky sdružené P a P' odetínají ve fokálních rovinách úsečky v a v' a svírají s osou úhly u a u'. Z obrazce seznáváme, že ohniskové vzdálenosti systému jsou dány vzorci:

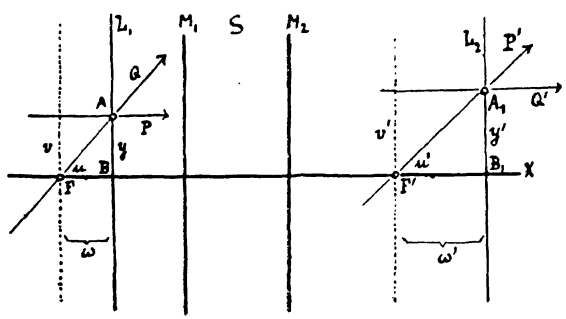
$$F = \frac{v'}{tg\, u}, \qquad F' = \frac{v}{tg\, u'}. \tag{9}$$

Ježto paprsky P a Q jsou rovnoběžny, lze považovati v' za obraz předmětu ∞ vzdáleného a $tg\, u$ za zdánlivou velikost, ve které předmět ten od systému vidíme. Jest tedy F poměr velikosti obrazu ∞ vzdáleného předmětu ku zdánlivé velikosti toho předmětu, a proto jest přední ohnisková vzdálenost takovou,

*) Tato definice shoduje se úplně s definicí fokální distance danou rovnicí (3). Tam je y' dle obrazce (2) velikostí obrazu a $tg\, u$ zdánlivou velikostí vzdáleného předmětu z místa čočky a to tím přesněji, čím spíše se v obrazci (2) dá f proti ∞ vzdálenosti předmětu $\overline{AB}$ zanedbati.

jak ji definoval Gauss. Podobně jest druhá ohnisková vzdálenost F' rovna poměru velikosti předmětu v první ohniskové rovině ku zdánlivé velikosti jeho obrazu v nekonečnu. Tím také jest fokální distance u centrického systému definována docela stejně jako fokální distance u jediné sférické plochy (viz předešlou poznámku).

obr. 8.



Veďme si v daném systému S o hlavních rovinách M_1 a M_2 dvě sdružené roviny L_1 a L_2, t. j. takové, že bodům na L_1 příslušejí jako obrazy body na L_2 a naopak. Pak budou paprsky P a Q jdoucí bodem A na L_1 po lomu procházeti obrazem bodu A, totiž bodem A_1 na L_2; při tom patří paprsku $P \parallel X$ lomený P' jdoucí ohniskem F' a podobně paprsku Q paprsek Q'. Předmětu y bude přidružen obraz y'. Poměr $\frac{y}{y'}$ je příčným zvětšením, t. j. poměrem velikosti obrazu a předmětu a to jest pro dané dvě sdružené roviny stálé (mění se však, volíme-li jiný pár sdružených rovin).

Označíme-li pak ω a ω' vzdálenosti sdružených bodů B a B_1 od ohnisek, a čítáme-li je ve směru šíření světla (v pravo) od těchto kladně, platí:

$$\frac{v'}{tg\,u} = \frac{y'}{tg\,u} = F, \quad \frac{v}{tg\,u'} = \frac{y}{tg\,u'} = F'$$

$$tg\,u = \frac{y}{\omega}, \quad tg\,u' = \frac{y'}{\omega'}$$

odtud pak:

$$\omega\omega' = FF' \tag{10}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{F}{\omega} = \frac{\omega'}{F'}. \tag{11}$$

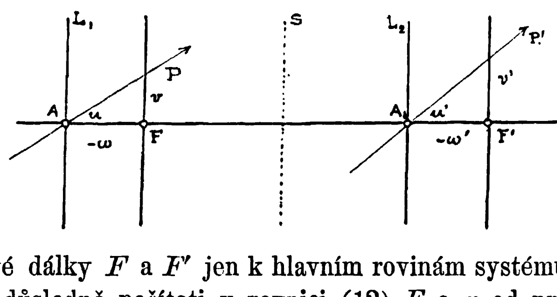
Tyto rovnice (10) a (11) jsou úplně stejné s rovnicemi (4) a (5) odvozenými pro jedinou sférickou plochu. Prvá z nich, která praví, že součin vzdálenosti předmětu a obrazu od příslušných ohnisek je veličinou stálou, slouží k tomu, abychom k danému ω našli ω', t. j. abychom našli polohu obrazu daného předmětu. Druhá rovnice udává nám příčné zvětšení, t. j. poměr velikosti obrazu k velikosti předmětu. Když poloha hlavních rovin a obě ohniskové dálky jsou známy, tu ty dvě rovnice zúplna postačují, abychom mohli prostor předmětový sférickým systémem dokonale zobraziti. Konstrukce obrazu k danému předmětu při centrickém systému lámavém uvedena bude později.

Jako bylo možno pomocí obrazce (3) přeměniti rovnici (2) na tvar (4) a naopak, podobně lze dáti dle obrazce (3.) rovnici (10) tento tvar

$$\frac{F}{x} + \frac{F'}{x'} = 1. \tag{12}$$

V rovnici (2) počítali jsme f a x, f' a x' od vrcholu sférické plochy v pravo kladně. Při centrickém systému však sahají

obr. 9



ohniskové dálky F a F' jen k hlavním rovinám systému, a proto musíme důsledně počítati v rovnici (12) F a x od první hlavní roviny a F' a x' od druhé hlavní roviny též na pravo kladně. Když v obr. 3. zaměníme veličiny f a f' ohniskovými délkami systému F a F', dá se tím obrazcem rovnice (12) též graficky diskutovati.

Odvoďme si také výraz pro úhlové zvětšení centrické soustavy. Mějme v daném systému S dvě sdružené roviny L_1 a L_2; pak musí paprsku P jdoucímu bodem A příslušeti nějaký lomený paprsek P' procházející bodem A_1, obrazem to bodu A. Úhlové zvětšení definujeme jako dřív: jest to poměr tangent úhlů, které svírá paprsek lomený a dopadající s osou, tedy výraz $\frac{tg\, u'}{tg\, u}$. Jsou-li roviny sdružené L_1 a L_2 vzdáleny od příslušných ohnisek o sdružené úsečky $-\omega$ a $-\omega'$, lze psáti ohniskové dálky dle obr. 9. takto:

$$F = \frac{v'}{tg\, u} = -\omega' \frac{tg\, u'}{tg\, u}; \quad F' = \frac{v}{tg\, u'} = -\frac{\omega\, tg\, u}{tg\, u'}.$$

Odtud úhlové zvětšení:

$$\frac{tg\, u'}{tg\, u} = -\frac{F}{\omega'} = -\frac{\omega}{F'}; \tag{13}$$

závisí tudíž jen od ω, t. j. polohy předmětu a ne od jeho velikosti.

Jak známo, nemění se výraz $yn\, tg\, u$ (rovnice 8), láme-li se svazek centrálních paprsků centrickým systémem; je-li tedy y' velikost obrazu a n' index lomu posledního prostředí a u' úhel, který svírá konečný paprsek lomený s osou optickou, platí rovnice

$$yn\, tg\, u = y'n'\, tg\, u';$$

odtud dostaneme, použijeme-li rovnice (11) a (13)

$$\frac{n'}{n} = \frac{y\, tg\, u}{y'\, tg\, u'} = \frac{F'}{\omega'} - \frac{\omega'}{F},$$

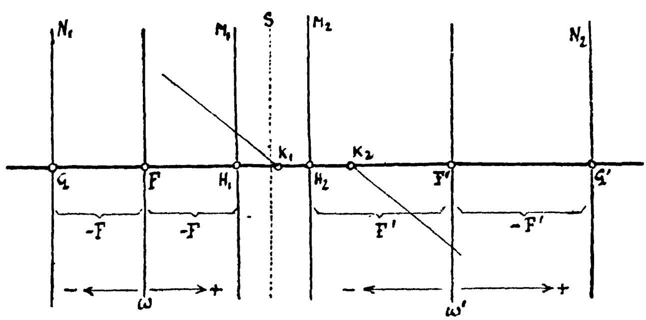
čili

$$\frac{F'}{F} = -\frac{n'}{n}. \tag{14}$$

Jest tedy poměr ohniskových délek obecné soustavy centrické roven záporně vzatému poměru indexů lomu krajních prostředí a nezávisí na prostředích středních; jest též stálý, jako tomu bylo u jediné sférické plochy (rovnice 2). Vidíme též, že při obecném systému lámavém (dioptrickém), jakým jsou ku př. čočky, mají ohniskové dálky znamení opačná; absolutní jejich hodnoty budou jen tehda stejné, je-li poslední prostředí totožné s prvým; pak $n' = n$ a $F' = -F$.

Uvážíme-li, že lom světla jedinou plochou sférickou je dán rovnicemi (4), (5), (7), (2), které jsou totožnými s rovnicemi (10), (11), (13), (14), seznáváme, že lom světla jedinou sférickou plochou je pouze zvláštním případem lomu světla systémem centrovaným. Lom světla na jedné sférické ploše dá se však také převésti na odraz světla na sférickém zrcadle Pro zrcadla platí totiž, že $n' = -n$, poněvadž u zrcadel se vrací světlo do téhož prostředí zpět; pak $F' = F$, t. j. ohniskové dálky u zrcadla mají stejná znamení, jsou stejně veliká a leží tudíž, splývajíce, na téže straně od zrcadla. *Mají tedy rovnice (10), (11), (13), (14) obecnou platnost, ať se jedná o lom světla na systému dioptrickém (sfér. plochy lámavé, čočky), anebo jedná-li se o odraz světla na systému katoptrickém (zrcadla sférická).*

obr. 10



Zůstaneme zatím při obecném systému dioptrickém. Některé body centrického systému na ose optické mají zvláštní důležitost, a zavedením jich dá se lom světla systémem daleko jednoduššeji znázorniti. Jsou to body, kde

1. příčné zvětšení $= \pm 1$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{F}{\omega} = \frac{\omega'}{F'} = \pm 1.$$

V prvém případě $\omega = F$ a $\omega' = F'$, a dostaneme body H_1 a H_2.

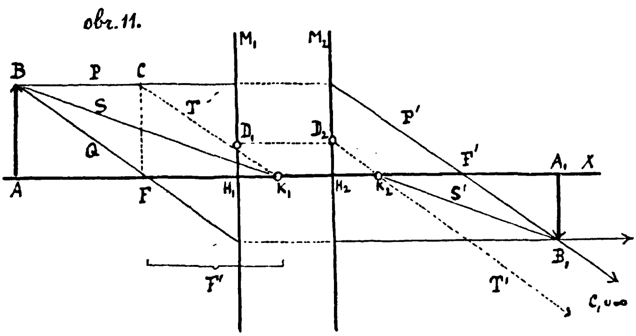
V druhém případě $\omega = - F$ a $\omega' = - F'$ a dostaneme body G a G'.

V rovinách M_1 a M_2, čili v positivních hlavních rovinách je obraz s předmětem stejně veliký a stejně položený; v druhých či negativních hlavních rovinách N_1 a N_2, jež jsou k prvním kol ohnisek symmetricky rozloženy, je obraz s předmětem sice stejně veliký, ale obrácený.

2. Jiný pár takových význačných bodů dostaneme, volíme-li úhlové zvětšení

$$\frac{tg\,u'}{tg\,u} = -\frac{F}{\omega'} = -\frac{\omega}{F'} = 1; \text{ odtud } \omega = - F', \; \omega' = - F.$$

Tím našli jsme dva body, tak zvané uzlové, K_1 a K_2. Mají tu vlastnost, že paprsek mířící k prvému z nich K_1 vychází po



lomu systémem z druhého z nich K_2 nelomen, jen rovnoběžně posunut (obr. 10.). Poněvadž $\overline{FK_1} = - F'$ a $\overline{F'K_2} = - F$, jest $\overline{K_1K_2} = \overline{H_1H_2}$, to jest vzdálenost bodů uzlových rovná se vzdálenosti bodů hlavních. (Ve výkresu (10) byla volena ohnisková dálka F' záporně; jest tedy výraz $\omega = - F'$ kladný.)

Po zavedení těchto bodů vypadne konstrukce obrazu při sférickém systému poměrně jednoduše. Z bodu B předmětu $\overline{AB}$ vedeme paprsek hlavní S, který míří k prvému bodu uzlovému K_1; jeho paprsek lomený S' vychází z K_2 paralelně ke směru dopadajícího paprsku; druhý paprsek (vedlejší) P vedeme z bodu B paralelně s osou až ke druhé hlavní rovině, odkudž se láme do druhého ohniska. Obraz B' leží na průseku paprsku vedlejšího a hlavního. Týmž bodem B' musí procházeti paprsek jdoucí předním ohniskem, jenž pak lomen vychází od prvé hlavní roviny rovnoběžně s osou. Kdybychom uzlových bodů neznali, bylo by možno provésti konstrukci obrazu též pomocí paprsků P a Q.

Uzlové body lze nalézti též konstruktivně. Vedeme z bodu C v prvé fokální rovině paprsek $P \parallel X$; k němu patří lomený paprsek P'; dále pak paprsek $T \parallel P'$; jejich lomené paprsky P' a T' musí býti spolu rovnoběžny, ježto obraz bodu C je v ∞. Jest tedy též $T' \parallel T$ a body K_1 a K_2 body uzlovými. Najdeme tudíž uzlový bod K_1, vedeme-li z bodu C paprsek $T \parallel P'$. Druhý uzlový bod K_2 najdeme tak, že vedeme z bodu D_2, obrazu to bodu D, paprsek T' rovnoběžný s T.

Bylo již dříve řečeno, že se lom světla sférickým systémem dá vyjádřiti rovnicemi zcela analogickými s těmi, které platí pro jedinou plochu sférickou. Naskýtá se tedy otázka, zda se optický účinek centrického systému nedá nahraditi účinkem jediné plochy kulové. Posuneme za tím účelem druhou hlavní rovinu M_2 v obrazci (11), až splyne s první hlavní rovinou M_1; pak též uzlový bod K_2 splyne s prvním uzlovým bodem K_1 a paprsek S by procházel takto pozměněným systémem nejen nelomen, ale také nepošinut. Obraz $\overline{A_1B_1}$ zůstal by stejně velikým a téhož směru, jen by se posunul o vzdálenost $\overline{H_1H_2}$ obou hlavních rovin v témže směru. Takto pozměněná konstrukce v obrazci (11) bude však potom zcela totožná s konstrukcí v obrazci (2). Hlavní rovina M v obrazci (2) bude zastupovati hlavní rovinu M_1 a s ní splynulou rovinu M_2 v obrazci (11), a střed křivosti O splynulé uzlové body K_1 a K_2.

Jedná-li se nyní o to, nalézti jedinou kulovou plochu, jež zobrazuje předmět tak jako daný sférický systém, počínáme si takto: Volíme ohniskové dálky hledané sférické plochy rovny daným ohniskovým distancím systému: $f = F$, $f' = F'$; hlavní rovinu M sférické plochy položíme do prvé hlavní roviny M_1 centrického systému, střed křivosti O do prvého uzlového bodu K_1, ponecháme obě prostředí u sférické plochy totožnými s prvním a posledním prostředím centrického systému a pak provedeme konstrukci obrazu k danému předmětu tak, jak se provádí u jediné plochy kulové. Obraz takto vzniklý jen posuneme zpět ve smyslu dané vzdálenosti hlavních rovin soustavy sférických ploch. (Dokončení.)

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu.

Dr. Jan Vojtěch v Brně.

(Pokračování.)

Uveďme si na pamět ještě jeden příklad z nauky o teple; dle zákona Gay-Lussacova zvětšuje se objem plynu rovnoměrně s teplotou, obrazem toho zákona je zase přímka; rychlost, kterou se zvětšuje objem při rostoucí teplotě, jest dána číslem $\beta = \frac{1}{273}$. Označíme-li původní objem plynu při teplotě 0° číslem 1, objem plynu toho při teplotě x^0 číslem y, jest rychlost zvětšování objemu s rostoucí teplotou dána poměrem $\frac{y-1}{x-0}$ a jest rovna β, odtud $y - 1 = \beta x$ čili $y = \beta x + 1$, tedy $y = \frac{x}{273} + 1$.

Všechny proměny, které se dějí rovnoměrně, jest možno vyjádřiti rovnicí lineární a lze je tedy znázorniti přímkou; jsou charakterisovány rychlostí, kterou lze posouditi ze stoupání přímky příslušné a která jest dána směrnicí v rovnici této přímky.

Úkoly: 1. Znázorniti průběh jízdy železniční mezi dvěma městy dle jízdního řádu se zřetelem jenom k delším zastávkám (v největších několika stanicích) a s předpokladem, že jízda mezi těmito stanicemi je pokaždé rovnoměrná (třebas snad s různou rychlostí). 2. Zobraziti závislost mezi teplotou ve stupních Celsiových a Réaumurových (značí-li x stupně C, y pak R, platí $y = \frac{4}{5} x$); závislost mezi teplotou ve stupních Celsiových (x) a Fahrenheitových (y) $\left[y = \frac{9}{5} x + 32\right]$.