Václav Jeřábek

O ohniskách orth. průmětu rovinnového řezu rotačního kužele na rovině kolmé k jeho ose

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 2, 225--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123833

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O ohniskách orth. průmětu rovinnového řezu rotačního kuželе na rovině kolmé k jeho ose.

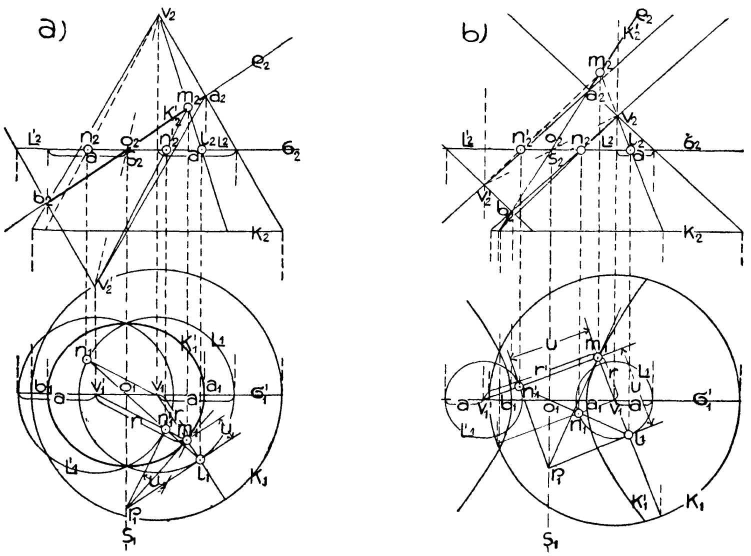
Studujícím napsal V. Jeřábek.

Buď zobrazen (obr. 1. *a*, *b*, obr. 2.) kužel rotační, jehož kruhová podstava jest K (K_1, K_2) a vrchol v (v_1, v_2). Protněme kužel rovinou ϱ stojící ve svém průmětu ϱ_2 kolmo na průmětně druhé ν v kuželosečce K'; její průmět K'_2 na ϱ_2 je vyznačen úsečkou a_2b_2, která je délky konečné v obr. *a)*, nekonečné v obr. *b)* ve dvou směrech a v obr. 2. ve směru jednom. V tomto případě je rovina ϱ rovnoběžna s obrysovou přímkou vc. Rovinné řezy jsou ellipsa (obr. 1.*a*), hyperbola (obr. 1.*b*) a parabola (obr. 2.).

Kuželosečka K' je vzhledem k rovině σ' obrysových přímek va, vb souměrna, má tedy její průmět K'_1 k σ'_1 polohu souměrnou, a průměty a_1, b_1 bodů a, b, v nichž seče rovina ϱ obrysové přímky va, vb, jsou vrcholy kuželosečky K'_1. Při parabolickém řezu (obr. 2.) je b_1 na a_1v_1 v nekonečnu.

Účelem dalších těchto řádků je ukázati, *že v_1 je ohniskem kuželosečky K'_1*.

Kterákoliv povrchová přímka kužele protíná rovinu ϱ v bodě m kuželosečky K'; sestrojme tohoto bodu průměty m_2, m_1 tak, aby v_2m_2, v_1m_1 zobrazovaly površku vm a aby průmět m_2 byl na ϱ_2. Vyznačme dále střed o (o_2, o_1) kuželosečky K' ($a_2o_2 = o_2b_2$, $a_1o_1 = o_1b_1$), a položme tímto středem rovinu σ kolmo k ose kužele, její průmět σ_2 prochází tedy průmětem o_2 kolmo k druhému průmětu osy. Rovina σ seče kužel v kruhu L, jehož druhý průmět L_2 na σ_2 vytínají v_2a_2, v_2b_2; poloviční délka a tohoto průmětu vyznačuje délku poloměru a kruhu L, jehož střed je na ose kužele. Vyznačíme-li průměty v'_1, v'_2 bodu v', jenž má souměrnou polohu k vrcholu v dle středu o ($o_1v'_1 = v_1o_1$, $o_2v'_2 = v_2o_2$) budou přímky vm, $v'm$ a $vn \parallel v'm$ protínati rovinu σ v bodech l (l_2, l_1), n' (n'_2, n'_1), n (n_2, n_1), ležících na průsečnici ol (o_1l_1, o_2l_2) roviny $vv'm$ s rovinou σ. Body n, n' leží souměrně na ol dle středu o, pročež mají též souměrnou polohu n_2, n'_2 na o_2l_2 dle o_2 a n_1, n'_1 na o_1l_1 dle středu o_1. Pohybuje-li se bod



Obr. 1. *a*, *b*.

m na kuželosečce K', bude přímka $vn \parallel v'm$ měniti svou polohu na kuželi daném (vK'), a přímka $v'm$ při současném pohybu rovnoběžném vytvoří plochu kužele ($v'K'$) souměrnou dle o s (vK'). Při tom vytvoří body n, n' v rovině σ souměrné kružnice L, L' dle středu o a jejich průměty n_1, n'_1 kružnice L_1, L'_1 dle o_1 souměrné.

Přímkami vm, $v'm$ položená rovina (vmv') seče, jak jsme již nahoře uvedli, rovinu σ v přímce ol, která obsahuje též body n, n', protože v nich rovinu σ protínají přímky vn a $v'm$ ležící v rovině vmv'. Z toho pak soudíme dále, že i body n_1, n'_1 leží na o_1l_1.

Jsou-li kruhy L_1 a L'_1 o středech v_1, v'_1 a poloměru a zobrazeny, je i jejich střed souměrnosti o_1 dán, takže kuželosečku K'_1 lze sestrojiti takto:

Bodem o_1 vedený paprsek seče kružnice L_1, L'_1 v bodech nesouměrně položených l_1, n'_1; spojnice $v_1 l_1$, $v'_1 n'_1$ protínají se v bodě m_1 kuželosečky K'_1, jejíž poloosy jsou

$$o_1 a_1 = o_1 b_1 = a.$$

Z rovnoběžné polohy přímek vn, $v'm$ soudíme, že

$$v_1 n_1 \parallel v'_1 m_1.$$

Je tedy úhel $m_1 n'_1 l_1 = v_1 n_1 l_1 = v_1 l_1 n'_1$; z rovnosti prvního a posledního úhlu jde, že

$$m_1 n'_1 = m_1 l_1 = u.$$

Znamenáme-li $m_1 v_1 = r$ a $m_1 v'_1 = r'$, jest v případě

a) $r = a - u$,	*b)* $r = u - a$,
$r' = a + u$,	$r' = u + a$,
sečtením	odečtením
$r + r' = 2a$.	$r' - r = 2a$.

Kuželosečka K'_1 je tedy ellipsou nebo hyperbolou o ohniskách v_1, v'_1. *)

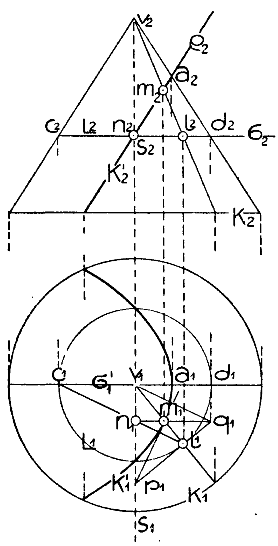
Tečna kuželosečky K' v bodě m je obsažena v rovině tečné τ kužele daného (vK') podél přímky vl a v rovině tečné τ' kužele druhého $(v'K')$ podél přímky $v'm$. Stopy těchto tečných rovin na rovině σ dotýkají se kruhů L, L' resp. v bodech l, n' a protínají se v bodě p, ležícím na průsečnici $S \perp v$ rovin ϱ a σ. Spojnice pm stanoví tečnu kuželosečky K' v bodě m. Sestrojíme-li tedy tečny ke kruhům L_1, L'_1 resp. v bodech l_1, n'_1, budou jimi dány průměty $p_1 l_1$, $p_1 n'_1$ stop rovin tečných τ, τ'. Spojíme-li tedy bod m_1 s bodem p_1, v němž se tečny $p_1 l_1$, $p_1 n'_1$ na S_1 protínají, dostaneme tečnu $p_1 m_1$ kuželosečky K'_1.

Trojúhelníky pravoúhlé $m_1 l_1 p_1$, $m_1 n'_1 p_1$, které mají společnou přeponu a dvě stejné odvěsny $m_1 l_1 = m_1 n'_1 = u$, jsou shodny, pročež úhel $p_1 m_1 l_1 = p_1 m_1 n'_1$.

*) Srovnej *Machovec*: Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody. Str. 11—16.

Půlí tedy tečna m_1p_1 při ellipse úhel vnější a při hyperbole úhel vnitřní průvodičů bodu m_1.

Při parabolickém řezu (obr. 2.) protněme kužel daný rovinou $\sigma \parallel \pi$ jdoucí bodem, ve kterém osa kužele seče rovinu ϱ, v kružnici L; jejím průmětem druhým je úsečka $L_2 \equiv c_2n_2d_2$ ($c_2n_2 = n_2d_2$) a prvním kružnice L_1 sestrojená ze středu v_1 poloměrem $v_1c_1 = n_2c_2$. Povrchová přímka vm kužele seče rovinu ϱ v bodě m (m_2, m_1) a σ v bodě l (l_2, l_1). Rovina vcl má svou stopu na



Obr. 2.

rovině σ v přímce cl protínající průsečnici S rovin ϱ a σ v bodě n. Její průmět $S_1 \perp c_1d_1$ protíná tedy c_1l_1 v průmětu n_1 bodu n, jehož průmět $n_2 \equiv S_2 \equiv (\varrho_2, \sigma_2)$. Přímkou vc, která je s rovinou ϱ rovnoběžna, proložená rovina (vcl) seče rovinu ϱ v přímce $nm \parallel cv$ a tato protíná površku vl v bodě m paraboly K'; pročež je $m_1n_1 \parallel v_1c_1$. Prodlužme n_1m_1 až k bodu q_1 tečny kruhu L_1 v bodě d_1. Nyní je patrno, že $v_1c_1n_1q_1$ je rovnoběžníkem ($c_1v_1 \parallel n_1q_1$, $c_1v_1 = v_1d_1 = n_1q_1$). Lichoběžník $v_1n_1l_1q_1$ je rovnoramenný, neboť jeho úhlopříčky jsou stejny

$$(v_1l_1 = v_1d_1 = n_1q_1),$$

tedy $m_1v_1 = m_1q_1$, t. j. v_1 je ohniskem a d_1q_1 přímkou řídící paraboly K'_1.

Prodloužíme-li q_1l_1 až k bodu p_1 přímky S_1, vznikne rovnoramenný trojúhelník $v_1p_1q_1$, v němž je m_1 průsečíkem jeho výšek. Stopa roviny tečné podél površky vl na rovině σ dotýká se kruhu L v bodě l a protíná průsečnici S' v bodě p, jenž s bodem m určuje průsečnici pm roviny tečné s rovinou ϱ; je tedy pm tečnou paraboly K' v bodě m a p_1m_1 tečnou paraboly K'_1 v bodě m_1. Zároveň poznáváme, že výška p_1m_1 trojúhelníku $v_1p_1q_1$ obsahuje též výšku rovnoramenného trojúhelníku $v_1m_1q_1$ a že tedy tečna p_1m_1 půlí úhel $v_1m_1q_1$.

Máme tedy větu:

Rovinný řez kužele rotačního promítá se na rovinu kolmou k jeho ose do kuželosečky, jejímž ohniskem je průmět vrcholu kužele na řečené rovině.

Parametrická vlastnost kuželoseček.

Napsal **V. Jeřábek.**

*1. Na dané kuželosečce, jejíž hlavní osou je AB, buď zvolen bod M (ξ, η); kolmice MN, MP postavené v bodě M na AM, BN vytínají na AB stálou délku PN rovnající se dvojnásobnému parametru kuželosečky.**)

Vlastnost tuto, která mně odjinud známa není, lze dokázati takto:

Volme vrchol A kuželosečky za počátek a AB za osu pravoúhlé soustavy souřadnic. Její vrcholová rovnice zní:

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Směrnice přímek AM, BM jsou $\frac{\eta}{\xi}$, $\frac{q\eta}{q\xi + 2p}$, tedy kolmice MN, MP mají směrnice $-\frac{\xi}{\eta}$, $-\frac{q\xi + 2p}{q\eta}$.

*) Byla již vlastnost tato někde uveřejněna?