Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 5, 316--336,337,338,339,340,341,342,343,344

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123848

a tanguje pouze horizont, křivka stinná jest parabola virtuelní. Je-li ale číselná hodnota *cos* A, menší nežli jednotka, tu bude křivka stinná hyperbolou, a jest azimut východu a západu uvedeným vzorcem určen.

Úlohy.

Úloha 28.

Řešiti jest rovnici

$$x^5(x-1)+\frac{1}{x}=1.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jiljí Jahn*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Rovnici danou lze psáti též v podobě

$$x^6(x-1)=x-1;$$

rozpadá se tudíž v rovnice

$$x-1=0, \qquad x^6-1=0.$$

První z nich má kořen

$$x_1=1;$$

druhou pak lze rozložiti na

$$(x^3-1)(x^3+1)=0.$$

Je-li $\qquad x^3-1=0$

čili $\qquad (x-1)(x^2+x+1)=0,$

obdržíme kořeny

$$x_2=1, \qquad x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};$$

je-li však $\qquad x^3+1=0$

čili $\qquad (x+1)(x^2-x+1)=0,$

obdržíme kořeny

$$x_5=-1, \qquad x_{6,7}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Úloha 29.

Řešiti jest rovnici

$$2\sqrt{x^2 - x^4} = \cos\alpha.$$

Řešení. (Zaslal p. *Vladimír Ibl,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Zdvojmocněním přechází daná rovnice v rovnici 4. stupně

$$4\,(x^2 - x^4) = \cos^2\alpha$$

čili

$$x^4 - x^2 + \frac{\cos^2\alpha}{4},$$

z které nalezneme

$$x^2 = \frac{1 \pm \sin\alpha}{2}.$$

Je-li

$$x^2 = \frac{1 + \sin\alpha}{2} = \cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

bude

$$x_{1,2} = \pm\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right);$$

v případě

$$x^2 = \frac{1 - \sin\alpha}{2} = \sin^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

nalezneme

$$x_{3,4} = \pm\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Úloha 30.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$(x + y)\cos\alpha = 2$$
$$xy\cot g^2\alpha = 1.$$

Řešení. (Zaslal p. *Florian Dvořák,* stud. VIII. tř. g. v Táboře.)

Daná soustava rovnic může býti nahražena touto:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4}{\cos^2\alpha}$$
$$4xy = 4\operatorname{tg}^2\alpha;$$

odtud rozdílem ustanovíme

$$(x-y)^2 = \frac{4}{\cos^2\alpha} - 4\operatorname{tg}^2\alpha = 4.$$

Jest tedy řešiti soustavu

$$x - y = \pm 2$$
$$x + y = \frac{2}{\cos\alpha};$$

z této jde známým spůsobem

$$x_1 = y_2 = \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha},$$
$$x_2 = y_1 = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

kteréž výrazy lze takto upraviti

$$\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\alpha\,.\,\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\alpha\,.\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\alpha\,.\,\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\alpha\,.\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Jest tedy

$$x_1 = y_2 = \operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

$$x_2 = y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Úloha 31.

Vyloučiti jest x ze soustavy rovnic

$$\operatorname{cosec} x - \sin x = a$$
$$\sec x - \cos x = b.$$

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Kroutil*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí).

Dané rovnice takto upravme:

$$\frac{1}{\sin x} - \sin x = a$$

čili

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} = a; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x = b;$$

čili

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} = b. \tag{2}$$

Znásobivše rovnice (1) a (2) obdržíme

$$ab = \sin x \,.\, \cos x;$$

povýšíme-li však obě na mocnost $\frac{2}{3}$ a sečteme-li je pak, obdržíme

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x \cos x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(ab)^{\frac{2}{3}}}.$$

Tudíž výsledek eliminace jest

$$(ab)^{\frac{2}{3}} (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = 1$$

čili

$$a^{-\frac{2}{3}} + b^{-\frac{2}{3}} = 1.$$

Úloha 32.

Vedeme-li v pravoúhlém trojúhelníku abc výšku $\overline{cd} = v$, *a značí-li* ϱ, ϱ_1, ϱ_2 *poloměry kružnic vepsaných v trojúhelníky abc, acd, bcd, jest*

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \varrho^2,$$
$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = v.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Tomáš*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.)

Poněvadž $\triangle\, abc \sim \triangle\, acd \sim \triangle\, bcd$, platí úměry

$$\overline{ac} : \overline{ad} : \overline{cd} = \varrho : \varrho_1 : \varrho_2,$$
$$\overline{ac}^2 : \overline{ad}^2 : \overline{cd}^2 = \varrho^2 : \varrho_1^2 : \varrho_2^2,$$

$$\overline{ac}^2 : (\overline{ad}^2 + \overline{cd}^2) = \varrho^2 : (\varrho_1^2 + \varrho_2^2);$$

jelikož pak

$$\overline{ad}^2 + \overline{cd}^2 = \overline{ac}^2,$$

jest také

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \varrho^2.$$

Je-li Δ obsah trojúhelníka abc, jest

$$2\Delta = \overline{ab} \,.\, \overline{cd} = (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac})\,\varrho.$$

Jest však

$$\overline{ab} : \overline{ac} : \overline{bc} = \varrho : \varrho_1 : \varrho_2;$$

tudíž

$$\overline{ab} \,.\, v = (\varrho + \varrho_1 + \varrho_2) \,.\, \overline{ab},$$

pročež obdržíme

$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = v.$$

Úloha 33.

Střední příčka lichoběžníka rovnoramenného jest p, půdice mají se k sobě a k rameni jako 5 : 3 : 2. Která jest strana rovnostranného trojúhelníka rovného obsahem danému lichoběžníku?

Řešení: (Zaslala slč. *Marie Šmelíková*, chov. III. ročníku učit. ústavu v Olomouci).

Jsou-li $a > b$ půdice, c rameno lichoběžníka, jest dle podmínky

$$a : b : c = 5 : 3 : 2;$$

výška v lichoběžníka jest

$$v = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Jest však

$$a : (a+b) = 5 : 8$$
$$b : (a+b) = 3 : 8$$
$$c : (a+b) = 2 : 8$$

čili

$$a = \frac{5}{4}p,\ b = \frac{3}{4}p,\ c = \frac{1}{2}p,$$

odtud pak

$$v=\sqrt{\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{16}}=\frac{p}{4}\sqrt{3}\,.$$

Obsah lichoběžníka

$$L=pv=\frac{p^2}{4}\sqrt{3}\,,$$

z čeho patrno, že strana rovnostranného trojúhelníka rovného obsahem danému lichoběžníku jest p.

Úloha 34.

Kterou hodnotu má poměr $tg\,x : tg\,y$, je-li

$$\sin x=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{4-3\sin^2\alpha}},\quad \sin y=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{4-3\cos^2\alpha}}\,?$$

Řešení: (Zaslal p. *Josef Kugler*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze).

Z daných rovnic plyne

$$\cos x=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{4-3\sin^2\alpha}},\qquad \cos y=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{4-3\cos^2\alpha}}\,;$$

proto jest

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,,\qquad \operatorname{tg} y=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha\,,$$

a tedy hladaný poměr

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Úloha 35.

$$\frac{\cos x+\cos 3x}{\cos 2x+\cos 4x}+\frac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x+\sin 4x}=2.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jan Sieger*, stud. VII. tř. g. v Plzni.)

Dle známých vzorců goniometrických upravíme rovnici na tvar

$$\frac{\cos 2x}{\cos 3x}+\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=2\,,$$

čili

$$\sin 2x\cos 3x+\sin 3x\cos 2x=2\sin 3x\cos 3x\,,$$

aneb v podobě nejjednodušší

$$\sin 5x = \sin 6x.$$

Odtud plyne

$$5x + 6x = (2n-1) \,.\, 2R,$$

pročež

$$x = \frac{(2n-1) \,.\, 2R}{11},$$

kdež klásti jest $n = 1, 2, \ldots, 11$. Tím obdržíme úhly, které rovnici vyhovují a 360^0 nepřesahují:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 16^0\,21'\,49'' & x_6 = 180^0 \\ x_2 = 49^0\ \ 5'\,27'' & x_7 = 212^0\,43'\,38'' \\ x_3 = 81^0\,49'\ \ 5'' & x_8 = 245^0\,27'\,16'' \\ x_4 = 114^0\,32'\,43'' & x_9 = 278^0\,10'\,54'' \\ x_5 = 147^0\,16'\,21'' & x_{10} = 310^0\,54'\,32'' \end{array}$$

$$x_{11} = 343^0\,38'\,11''.$$

Úloha 36.

Úsečka $\overline{ab}$ pohybuje se krajními body svými po ramenech pravého úhlu. Přiblíží-li se počátek její a o 30 cm k vrcholu o, vzdálí se koncový bod b o 40 cm od o. Úhel, jejž původní poloha tvoří s novou, jest $45^0 14' 23''$. Vypočítati $\overline{ab} = x$.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Grohman* v Ivanovicích na Moravě.)

Budiž $\overline{ab}$ původní poloha úsečky x, $\overline{a'b'}$ poloha nová; pošiňme pak trojúhelník oab do polohy $o'a'b''$, při které

$$a'b'' \parallel a'b'.$$

Potom bude

$$a'b' = a'b'' = x,$$
$$aa' = oa' = bb'' = 30,$$
$$bb' = 40,\ b'b'' = 50;$$

mimo to jest

$$\sphericalangle\, b'a'b'' = \alpha = 45^0\,14'\,23''.$$

Z rovnoramenného trojúhelníka $a'b'b''$ jde

$$x = \frac{\overline{b_1 b_2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

z čehož vypočítáme $x = 65$ *cm*.

Jiné řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Potocký*, stud. VII. tř. g. v Praze.)

Označíme-li $\sphericalangle oab = \beta$, nalezneme dle věty sinusové

$$x = \frac{40 \sin \beta + 30 \cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$x = \frac{40 \sin(\alpha + \beta) + 30 \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

a odtud po snadném zjednodušení

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4 \sin \alpha - 3(1 - \cos \alpha)}{4(1 - \cos \alpha) + 3 \sin \alpha}.$$

Výrazu tomuto lze dáti podobu

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4 \cos \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{\alpha}{2}},$$

z čehož vyvodíme

$$\sin \beta = \frac{1}{5}\left(4 \cos \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{5}\left(4 \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do první rovnice pro x, vyjde

$$x = \frac{25}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 65.$$

Úloha 37.

Jaké úhly má rovnoramenný trojúhelník, ve kterém vzdálenost středů kružnice opsané a vepsané rovná se $\frac{3}{8}$ výšky?

Řešení. (Zaslal p. *B. Ženíšek*, stud. VI. tř. g. v Plzni.) V trojúhelníku rovnoramenném *abc* veďme výšku

$$v = \overline{cd} \perp \overline{ab};$$

na ni vytkněme střed *s* kružnice trojúhelníku opsané i střed *o* kružnice vepsané. Jelikož $\sphericalangle asd = 2R - 2\alpha$, značí-li α úhel při půdici $\overline{ab} = a$, jest

$$\overline{sd} = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}(2R - 2\alpha) = -v \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} 2\alpha;$$

mimo to jest

$$\overline{od} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = v \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Užijeme-li vzorců

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2 \sin\alpha \cos\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

obdržíme vzdálenost obou středů

$$\overline{os} = \overline{sd} - \overline{od} = -v \operatorname{cotg}\alpha \left(\operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{v(1 - 2\cos\alpha)}{2\sin^2\alpha}.$$

Dle podmínky v úloze má býti $\overline{os} = \frac{3}{8} v$, z čehož plyne rovnice

$$3\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 1 = 0;$$

z této ustanovíme

$$\cos\alpha = \frac{4 - \sqrt{13}}{3} = 0{\cdot}13148,$$

$$\alpha = 82^\circ\, 26'\, 35''.$$

Úloha 38.

V kruhu poloměru $r = 25$ cm vedena tetiva $t = 48{\cdot}9$ cm; v kterém poměru dělí plochu kruhu?

Řešení. (Zaslal p. *Václav Janák*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze.)

K dané tetivě přísluší středový úhel

$$\alpha = 153^0\,48'\,40''.$$

Obsah menší úseče tetivou odetnuté jest

$$U_1 = \frac{r^2}{2}\,(arc\,\alpha - \sin\alpha)\,,$$

větší pak

$$U_2 = \pi r^2 - U_1.$$

Z tabulek vyhledáme

$$arc\,\alpha = 2{\cdot}68451$$
$$\sin\alpha = 0{\cdot}44134\,;$$

odtud vypočítáme

$$U_1 = 1{\cdot}12159\,r^2, \qquad U_2 = 2{\cdot}02000\,r^2$$

a ustanovíme, že přibližně

$$U_1 : U_2 = 5 : 9.$$

Úloha 39.

O trojúhelník abc, jehož výšky protínají se o bodě v, opsána kružnice; mimo to opsány kružnice trojúhelníkům abv, bcv, cav. Dokázati, že součet obloukových trojúhelníků abv, bcv, cav rovná se dvojnásobnému obsahu trojúhelníka abc.

Řešení. (Zaslal p. *Oskar Tomandl,* stud. VII. tř. g. v Brně.)

Jelikož jest

$$\sphericalangle\, bvc = R - \alpha, \quad \sphericalangle\, cva = R - \beta, \quad \sphericalangle\, avb = R - \gamma,$$

při čemž α, β, γ značí úhly trojúhelníka *abc*, jsou kružnice *bvc*, *cva*, *avb* shodny s kružnicí opsanou o trojúhelník *abc*. Budiž s střed této kružnice a označme

$$T_1 = \triangle\, bcs, \qquad T_2 = \triangle\, cas, \qquad T_3 = \triangle\, abs\,;$$

mimo to znamenejme obloukové trojúhelníky

$$\varDelta_1 = bcv, \qquad \varDelta_2 = cav, \qquad \varDelta_3 = abv.$$

Úseče na stranách *bc*, *ca*, *ab* jmenujme U_1, U_2, U_3, úseče na tetivách *av*, *bv*, *cv* jmenujme u_1, u_1, u_3. Potom můžeme psáti:

$$\Delta_1 = 2\,(U_1 - u_2 - u_3)$$
$$\Delta_2 = 2\,(U_2 - u_3 - u_1)$$
$$\Delta_3 = 2\,(U_3 - u_1 - u_2),$$
$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 2\,(U_1 + U_2 + U_3) - 4(u_1 + u_2 + u_3).$$

Jest však

$$U_1 = \frac{\pi r^2 \alpha}{180} - T_1$$
$$U_2 = \frac{\pi r^2 \beta}{180} - T_2$$
$$U_3 = \frac{\pi r^2 \gamma}{180} - T_3\,,$$

tudíž
$$U_1 + U_2 + U_3 = \pi r^2 - T,$$

kdež $T = T_1 + T_2 + T_3$ jest plocha trojúhelníka *abc*. Mimo to jest

$$2\,(u_1 + u_2 + u_3) = \pi r^2 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3);$$

proto

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 2\,(\pi r^2 - T) - 2\,[\pi r^2 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)],$$

z čehož konečně

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 2T,$$

jak bylo dokázati.

Úloha 40.

Z určité vzdálenosti jeví se celý pomník Karla IV. v Praze v úhlu $\alpha = 10^0 14'$, podstavec jeho v úhlu $\beta = 6^0 29'$, je-li oko v stejné výši s patou pomníku. Přiblížíme-li se o 30 m, jeví se podstavec sochy v úhlu $\gamma = 15^0 51'$. Vypočítati výšku sochy i podstavce,

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Pešek*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.

Je-li x výška podstavce, y výška sochy, jsou neznámé tyto vyjádřeny vzorci

$$x = \frac{v \sin\beta \sin\gamma}{\sin\,(\gamma - \beta)}\,,$$
$$y = \frac{v \sin\,(\alpha - \beta) \sin\gamma}{\cos\alpha \sin\,(\gamma - \beta)}\,,$$

kdež v značí udanou vzdálenost 30 *m*.

Při daných hodnotách úhlů α, β, γ vypočítáme užitím logarithmů

$$x = 5{\cdot}68\,m, \qquad y = 3{\cdot}80\,m;$$

jest tudíž celá výška pomníku 9·48 *m*.

Úloha 41.

Bodem uvnitř trojhranu daným sestrojiti kouli, která se dotýká jeho stěn.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Půček*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.)

Roviny půlící stěnové úhly trojhranu protínají se v přímce O, která jest geom. místem středů všech koulí vepsaných danému trojhranu. Budiž K jedna z těchto koulí, o její střed. Spojíme-li vrchol v trojhranu s bodem daným m, protíná spojnice $\overline{vm}$ plochu kulovou K v bodech m_1, m_2. Ustanovíme-li pak v přímce O body o_1, o_2 tím způsobem, že jest

$$o_1m \parallel om_1, \qquad o_2m \parallel om_2,$$

jsou body o_1, o_2 středy dvou koulí K_1, K_2, úloze vyhovujících. Všechny tři koule mají bod v společným středem podobnosti.

Úloha 42.

Který jest povrch čtyřstěnu abcd, ve kterém

$$ab = 3, \qquad ac = 2, \qquad ad = 4,$$
$$\sphericalangle\, dab = \sphericalangle\, dac = \sphericalangle\, dcb = 90^0?$$

Řešení. (Zaslal p. *Václav Měšťák*, stud. g. v Ml. Boleslavi.)

Z daných podmínek vypočítáme

$$bd = 5, \quad cd = 2\sqrt{5}, \quad bc = \sqrt{5};$$

potom jest obsah pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle\, abd = 6, \quad \triangle\, acd = 4, \quad \triangle\, bcd = 5,$$

a obsah trojúhelníka *abc* dle vzorce Heronova

$$\triangle\, abc = \sqrt{5}.$$

Celý povrch čtyřstěnu jest pak

$$P = 15 + \sqrt{5}.$$

Úloha 43.

Osový řez válce má obvod 183 cm, plášť válce rovná se kruhu poloměru 45 cm; které jsou rozměry válce?

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Balada*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích).

Poloměr základny válcové označme r, výšku válce v; poloměr daného kruhu budiž $\varrho = 45$. Pak můžeme postaviti rovnice

$$4r + 2v = 183,$$
$$2\pi r v = \pi \varrho^2,$$

z nichž druhá zjednodušená jest

$$2rv = 2025.$$

Vyloučíme-li v, přijdeme k rovnici

$$4r^2 - 1383r + 2025 = 0,$$

jejíž kořeny jsou

$$r_1 = 27, \qquad r_2 = 18{\cdot}75;$$

k nim pak sluší hodnoty

$$v_1 = 37{\cdot}5, \qquad v_2 = 54.$$

Úloha 44.

Který jest obsah tělesa omezeného dvěma vrchlíky kulovými, jichž poloměry jsou $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 73$ cm a vzdálenost středů jich $s = 92$ cm?

Řešení. (Zaslal p. *Bohumil Voženílek*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Kulové plochy o poloměrech $r_1 = 60$, $r_2 = 73$ a mající středy u vzdálenosti $s = 91$, omezují těleso složené ze dvou úsečí kulových, jichž výšky jsou v_1, v_2 a společná hrana kruhová má poloměr ϱ. Tyto 3 neznámé vypočteme z rovnic

$$\varrho^2 = v_1\,(2r_1 - v_1)$$
$$\varrho^2 = v_2\,(2r_2 - v_2)$$
$$s = r_1 + r_2 - (v_1 + v_2).$$

Ježto by obecné řešení nevedlo k výsledku jednoduchému, dosaďme hodnoty dané do těchto rovnic a obdržíme tak

$$v_1 = 24, \qquad v_2 = 18, \qquad \varrho = 48.$$

Obsahy úsečí těleso skládajících jsou pak

$$U_1 = \frac{\pi v_1}{6}(3\varrho^2 + v_1^2) = 29952\pi,$$

$$U_2 = \frac{\pi v_2}{6}(3\varrho^2 + v_2^2) = 21708\pi,$$

tudíž obsah celého tělesa

$$V = U_1 + U_2 = 51660\pi \doteq 162300\ cm^3.$$

Úloha 45.

Na ose X dány dvě družiny bodů rovnicemi

$$x^2 - 18x + 17 = 0, \quad 3x^2 - 4x - 15 = 0.$$

Dokázati, že body ty tvoří harmonickou čtveřinu.

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Ottis*, stud. VIII. tř. g. v Plzni).

První rovnice značí body a, b, jichž úsečky jsou

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 17;$$

druhá stanoví body c, d mající úsečky

$$x_3 = 3, \qquad x_4 = -\frac{5}{3}.$$

Dvojpoměr bodů a, b, c, d jest

$$(abcd) = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2};$$

dosazením hodnot obdržíme

$$(abcd) = -1,$$

pročež body ty tvoří harmonickou čtveřinu.

Úloha 46.

Strany úplného čtyrstranu mají rovnice

$$y = 0, \quad x = 0, \quad 2x = 3y + 6 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0.$$

Které jsou rovnice jeho úhlopříček? Dokázati, že středy úhlopříček těch leží v jedné přímce, a ustanoviti její rovnici.

Řešení. (Zaslal p. *František Bilovský*, stud. VIII. tř. č. gymnasia v Brně).

Dané přímky protínají se v bodech

$$a\,(0,\ 0), \quad b\,(3,\ 0), \quad c\,(-3,\ 0)$$
$$d\,(1{\cdot}5,\ 3), \quad e\,(0,\ 2), \quad f\,(0,\ 6).$$

Úhlopříčky čtyrstranu jsou $U_1 \equiv ad$, $U_2 \equiv be$, $U_3 \equiv cf$, a rovnice jich

$$U_1 \equiv x - 2y = 0,$$
$$U_2 \equiv 2x + 3y - 6 = 0,$$
$$U_3 \equiv 2x - y + 6 = 0.$$

Středy úhlopříček jsou body

$$g\,(0{\cdot}75,\ 1{\cdot}5),\quad h\,(1{\cdot}5,\ 1),\quad k\,(-1{\cdot}5,\ 3);$$

jelikož pak determinant

$$\begin{vmatrix} 0{\cdot}75, & 1{\cdot}5, & 1 \\ 1{\cdot}5\ , & 1\ , & 1 \\ -1{\cdot}5\ , & 3\ , & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

leží tyto body v jedné přímce.

Úloha 47.

Řešiti rovnici

$$\begin{vmatrix} 1-a, & b, & x \\ x, & 1-b, & c \\ a, & x, & 1-c \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení. (Zaslal p. *Petr Pecl,* stud. VI. tř. g. v Klatovech.)

Vyčíslíce determinant přijdeme k rovnici

$$x^3 - [a\,(1-b) + b\,(1-c) + c\,(1-a)]\,x$$
$$+ (1-a)\,(1-b)\,(1-c) + abc = 0$$

čili $\quad x^3 + 1 - [a + b + c - ab - bc - ca]\,(x+1) = 0.$

Jeden kořen této rovnice jest patrně $x_1 = -1$; dělíme-li kořenovým činitelem $(x+1)$, obdržíme rovnici kvadratickou

$$x^2 - x + 1 - (a + b + c) + ab + bc + ca = 0,$$

z které plynou ještě další dva kořeny x_2, x_3 tvaru irracionálného:

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}\,[1 \pm \sqrt{4\,(a + b + c - ab - bc - ca) - 3}\,].$$

Úloha 48.

Kolik jest celých čísel, jichž harmonický průměr s číslem 24 jest též číslem celým? Která jsou ta čísla?

Řešení. (Zaslal p. *Bohuslav Masák*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze.)

Žádané číslo x má hověti úměře

$$(x - y) : (y - 24) = x : 24,$$

v níž y značí harmonický průměr čísel 24 a x. Jest tedy

$$y = \frac{48\,x}{x + 24} = 48 - \frac{1152}{x + 24},$$

Úloha vyžaduje, abychom za x vyhledali takové hodnoty kladné, při kterých podíl $1152 : (x + 24)$ nabývá hodnoty celistvé; musí tudíž $x + 24$ býti dělitelem čísla 1152. Jelikož jest $1152 = 2^7 . 3^2$, má toto číslo $8 . 3 = 24$ dělitelů, z nichž jest 13 větších než 24, totiž

32, 36, 48, 64, 72, 96, 128, 144, 192, 288, 384, 576, 1152.

Má pak úloha těchto 13 řešení:

$x = 8$	12	24	40	48	72	104	120	168	264	360	552	1128
$y = 12$	16	24	30	32	36	39	40	42	44	45	46	47.

Úloha 49.

V kterých létech příštího století bude měsíc únor míti pět neděl?

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Ottis*, stud. VII. tř. g. v Plzni.)

Tento zjev opakuje se vždy, když v přestupném roce únor začíná nedělí, a tedy když jest prvního ledna ve čtvrtek.

Ježto dvacáté století počíná 1. lednem 1901, což bude v úterý, označme úterý číslem: $1 + 7k$, středu: $2 + 7k$, čtvrtek: $3 + 7k$ atd., kdež k značí libovolné positivní číslo celistvé. V roce $1900 + 4x$ padne 1. leden na den, jehož číslo jest: $4x + \frac{4x}{4} - 1 = 5x - 1$, a aby to byl dle dané podmínky čtvrtek, musí

$$5x - 1 = 3 + 7k.$$

Kořeny této rovnice neurčité jsou $x = 7t - 2$, kde t jest číslo celistvé. Dle podmínky:

$$0 < 4x < 100 \quad \text{a proto} \quad x = 20,\ 48,\ 76.$$

$$N = 1920,\ 1948,\ 1976.$$

Úloha 50.

Řešiti soustavu rovnic

$$ax^2 - 2b^2y = 3ab^2 \qquad (\alpha)$$

$$by^2 - 2a^2x = 3a^2b\,. \qquad (\beta)$$

Řešení. (Zaslal p. *Petr Pecl,* stud. VI. tř. g. v Klatovech.)

Dělíce první rovnici druhou, obdržíme po krátké redukci

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 2ab\,(ax - by).$$

Z této plyne

$$ax = by, \tag{1}$$

$$ax + by = -2ab. \tag{2}$$

Řešíme-li (1) s (α) obdržíme

$$x_1 = 3b, \qquad y_1 = 3a,$$

$$x_2 = -b, \qquad y_2 = -a.$$

Řešením (2) a (α) obdržíme

$$x_3 = -b, \qquad y_3 = -a.$$

Úloha 51.

Sestrojiti trojúhelník, dány-li body, ve kterých osy vnitřních jeho úhlů protínají kružnici opsanou.

Řešení. (Zaslal p. *Emanuel Mencl,* stud. V. tř. g. v Plzni.)

Do kružnice K vepsán jest trojúhelník abc; osy vnitřních jeho úhlů protínají tuto kružnici v bodech a_1, b_1, c_1, jimiž veďme průměry a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2. Značí-li α, β, γ počet úhlových stupňů úhlů v trojúhelníku abc, mají týž počet stupňů obloukových oblouky

$$\widehat{ba_1} = \widehat{a_1c} = \alpha\,,$$

$$\widehat{cb_1} = \widehat{b_1a} = \beta\,,$$

$$\widehat{ac_1} = \widehat{c_2b} = \gamma\,.$$

V trojúhelníku pravoúhlém $a_1c_1c_2$ jest

$$\sphericalangle a_1c_2c_1 = \frac{\alpha+\gamma}{2}\,,$$

tedy

$$\sphericalangle a_1c_1c_2 = \frac{\beta}{2}.$$

Ježto jest také $\quad \sphericalangle b_2b_1c = \dfrac{\beta}{2}\,,$

jest $\quad \widehat{a_1c_2} = \widehat{cb_1}\,, \qquad \widehat{a_1c_2} = \widehat{cb_1}$

a proto $a_1b_2 \,||\, cc_2$. Podobně jest $b_1c_1 \,||\, aa_2$, $c_1a_1 \,||\, bb_2$; z rozboru tohoto plyne bezprostředně sestrojení žádaného trojúhelníka abc, dán-li trojúhelník $a_1b_1c_1$.

Úloha 52.

Vně trojúhelníka abc sestrojeny nad stranami jeho čtverce cba_1a_2, bac_1c_2; *jsou-li* a, b, c *strany daného trojúhelníka, který jest obsah šestiúhelníka* $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$?

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Bradáček*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze.)

Jsou-li a, b, c strany, α, β, γ úhly trojúhelníka abc, jest obsah jeho vyjádřen vzorcem Heronovým

$$\varDelta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kdež $2s = a + b + c$. Mimo to jest

$$\triangle\, ab_2c_1 = \frac{1}{2}\, bc \sin(2\mathrm{R} - \alpha) = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha = \varDelta\,,$$

$$\triangle\, bc_2a_1 = \frac{1}{2}\, ca \sin(2\mathrm{R} - \beta) = \frac{1}{2}\, ca \sin\beta = \varDelta\,,$$

$$\triangle\, ca_2b_1 = \frac{1}{2}\, ab \sin(2\mathrm{R} - \gamma) = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \varDelta\,.$$

Veškerý obsah šestiúhelníka $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ jest tudíž

$$\mathrm{S} = a^2 + b^2 + c^2 + 4\varDelta\,.$$

Poznámka. Rozpolme strany ca, ab, bc v bodech a_3, b_3, c_3, a veďme těžnice aa_3, bb_3, cc_3; potom lze snadně dokázati, že jest

$$\overline{b_2c_1} = 2\,.\,\overline{aa_3}\,,\quad \overline{c_2a_1} = 2\,.\,\overline{bb_3}\,,\quad \overline{a_2b_1} = 2\,\overline{cc_3}\,.$$

Úloha 53.

Přepona ab trojúhelníka pravoúhlého abc rozdělena ve 3 stejné díly

$$am = mn = nb.$$

Je-li

$$\sphericalangle\, acm = x,\ \sphericalangle\, bcn = y,\ \sphericalangle\, mcn = z,\ \sphericalangle\, cab = \alpha,$$

jest dokázati relace

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,,\ \mathrm{tg}\, y = \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,,\ \mathrm{tg}\, z = \frac{3}{4}\sin 2\,\alpha\,.$$

Řešení. (Zaslal p. *Oskar Tomandl*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Vedeme-li v trojúhelníku daném příčky

$$mm_1 \perp ac\,,\quad nn_1 \perp bc\,,$$

jest
$$mm_1 = \frac{1}{3} bc, \quad cm_1 = \frac{2}{3} ac,$$
$$nn_1 = \frac{1}{3} ac, \quad cn_1 = \frac{2}{3} bc.$$

Z toho vychází
$$\operatorname{tg} x = \frac{mm}{cm_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{ac} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{nn_1}{cn_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ac}{bc} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha;$$
jelikož pak
$$z = R - (x + y),$$
jest
$$\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}.$$

Hledíce k rovnicím dříve vyvinutým, obdržíme
$$\operatorname{tg} z = \frac{3}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)} = \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}$$
čili
$$\operatorname{tg} z = \frac{3}{4} \sin 2\alpha.$$

Úloha 54.

Řešiti pravoúhlý trojúhelník, dán-li rozdíl odvěsen
$$a - b = 48{\cdot}89\ cm$$
a rozdíl úhlů
$$\alpha - \beta = 44^0 5' 48''.$$

Řešení. (Zaslal p. *Ludvík Hlaváč*, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze.)

Úhly trojúhelníka vypočítáme přímo z rovnic
$$\alpha + \beta = 90^0, \quad \beta = 44^0 5' 48'';$$
nalezneme
$$\alpha = 67^0 2' 54'', \quad \beta = 22^0 57' 6''.$$

Dále pak jest
$$c \sin \alpha = a, \quad c \cos \alpha = b,$$
tedy při
$$a - b = d$$
$$c = \frac{d}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{d}{\sqrt{2} \cdot \sin(\alpha - 45^0)}.$$

Dosazením hodnoty d a úhlu α ustanovíme logarithmicky
$$c = 92{\cdot}09\ cm$$
a z toho pak
$$a = 84{\cdot}80\ cm, \quad b = 35{\cdot}91\ cm.$$

Úloha 55.

V rovnoramenném trojúhelníku abc ($ac = bc$) jest půdice $ab = 518$ mm, úhel při půdici $\alpha = 18^0 55' 19''$. Vrcholem c vedena příčka cd, která s ab svírá úhel $53^0 7' 48''$.

Jak dlouhá jest tato příčka a v kterém poměru dělí trojúhelník?

Řešení. (Zaslal p. *Bedřich Zvelebil,* stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech.)

Hledaná příčka $\overline{cd} = z$ dělí půdici $\overline{ab} = c$ v části $\overline{ad} = x$, $\overline{bd} = y$ a svírá s ní úhel $bdc = \delta$. Potom jest, značí-li u délku ramene

$$z = \frac{a \sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \delta},$$

$$x = \frac{a \sin(\delta - \alpha)}{\sin \delta} = \frac{c \sin(\delta - \alpha)}{2 \cos \alpha \sin \delta},$$

$$y = \frac{a \sin(\delta + \alpha)}{\sin \delta} = \frac{c \sin(\delta + \alpha)}{2 \cos \alpha \sin \delta}.$$

Při daných hodnotách vypočítáme

$$z = 111, \quad x = 192{\cdot}4, \quad y = 325{\cdot}6;$$

příčna $\overline{cd}$ dělí trojúhelník abc v poměru

$$x : y = 13 : 22.$$

Úloha 56.

Výška aa′ bb′ cc′ trojúhelníka abc protínají se v bodě v tak, že

$$av : va' = 3 : 1, \quad bv : vb' = 7 : 2.$$

V kterém poměru jest cv : cv′ a které jsou úhly trojúhelníka?

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Grohman* v Ivanovicích na Moravě.)

Jsou-li a, b, c strany, α, β, γ protější jim úhly daného trojúhelníka, jest

$$\overline{av} = \frac{c \cos \beta}{\sin \gamma}, \qquad \overline{va'} = \frac{c \cos \beta}{\operatorname{tg} \gamma},$$

proto

$$\frac{av}{va'} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} = 3;$$

podobně jest

$$\frac{bv}{vb'}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}=\frac{7}{2}.$$

Jest však $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$, z čehož snadně vyvodíme

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1;$$

obdobně jest

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1,$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-1.$$

Dosazením hořejších hodnot přijdeme k rovnicím

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=\frac{9}{2},$$

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=4;$$

připojíme-li k rovnicím těmto známou o úhlech trojúhelníka relaci

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma,$$

vypočítáme, majíce na mysli trojúhelník ostroúhlý,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{19}\sqrt{38},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{9}{38}\sqrt{38}.\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{38}.$$

Úhly trojúhelníka jsou pak

$$\alpha=52^0\,23'\ \ 2'',$$

$$\beta=55^0\,35'\,29'',$$

$$\gamma=72^0\ \ 1'\,29''.$$

Průsečík v dělí třetí výšku v poměru

$$\frac{cv}{vc'}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1=\frac{17}{19}.$$

Úloha 57.

Mají-li obě základny hranolu (primatoidu) stejný obvod, má týž obvod každý řez k těmto základnám rovnoběžný. Dokázati.

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Půček*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.)

Jedna základna hranolu měj strany $a_1, b_1, c_1, \ldots$, druhá $a_2, b_2, c_2, \ldots$; obvody základen těchto jsou

$$O_1=a_1+b_1+c_1+\ldots,\quad O_2=a_2+b_2+c_2+\ldots$$

Veďme řez rovnoběžný k základnám a mající od nich vzdálenosti v poměru $m:n$; strany tohoto řezu nechť jsou

$$a_3 \parallel a_1, \quad b_3 \parallel b_1, \quad c_3 \parallel c_1, \ldots,$$
$$a_4 \parallel a_2, \quad b_4 \parallel b_2, \quad c_4 \parallel c_2, \ldots$$

Potom jest

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1} = \frac{c_3}{c_1} = \ldots = \frac{m}{m+n},$$
$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{b_4}{b_2} = \frac{c_4}{c_2} = \ldots = \frac{m}{m+n},$$

tudíž

$$a_3 + b_3 + c_3 + \ldots = \frac{m}{m+n} O_1,$$
$$a_4 + b_4 + c_4 + \ldots = \frac{n}{m+n} O_2.$$

Celý obvod řezu jest

$$O = \frac{mO_1 + nO_2}{m+n}.$$

Je-li $O_1 = O_2$, jest také $O = O_1 = O_2$, nechať má poměr $m : n$ hodnotu jakoukoliv.

Poznámka. Obvod středního řezu prismatoidu má obvod

$$O = \frac{1}{2}(O_1 + O_2).$$

Úloha 58.

Kolmý průmět čtverce o straně a jest rovnoběžník o stranách b, c. Který úhel svírají strany tyto? Kterou odchylku má rovina čtverce od průmětny?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Půček,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.)

Předpokládejme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník abc tak, že vrchol a pravého úhlu leží v průmětně; průměty vrcholů b, c buďtež b_1, c_1. Označme

$$\overline{ab} = \overline{ac} = a, \quad \overline{bc} = a\sqrt{2},$$
$$\overline{ab_1} = b, \quad \overline{ac_1} = c, \quad \overline{bb_1} = x, \quad \overline{cc_1} = y, \quad \overline{b_1c_1} = z.$$

hledaný úhel $b_1ac_1 = \alpha$. Potom jest

$$x^2 = a^2 - b^2, \quad y^2 = a^2 - c^2,$$
$$z^2 = 2a^2 - (x-y)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Z rovnic těchto ustanovíme

$$\cos\alpha = -\frac{1}{bc}\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,,$$

načež

$$\sin\alpha = \frac{a}{bc}\sqrt{b^2+c^2+a^2}\,.$$

Značí-li $P = a^2$ obsah čtverce, jest obsah průmětu jeho

$$P_1 = bc\sin\alpha = a\sqrt{b^2+c^2+a^2} = P\cos\varphi\,,$$

kdež φ jest odchylka roviny čtverce od průmětny; jest tudíž

$$\cos\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{b^2+c^2+a^2}\,.$$

Úloha 59.

Koule a dvojitý kužel, jehož osový řez je čtverec, mají stejné krychlové obsahy. Stanoviti poměr povrchů obou těles, aby chyba byla menší než $^1/_{1000}$.

Řešení. (Zaslal p. *Oskar Tomandl*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Je-li ϱ poloměr koule, r poloměr kruhové hrany na dvojitém kuželi, má býti

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 = \frac{2}{3}\pi r^3\,,$$

tedy

$$r = \varrho\sqrt[3]{2}\,.$$

Jest pak povrch koule

$$A = 4\pi\varrho^2\,,$$

povrch dvojkužele

$$B = 2\pi r^2\sqrt{2}\,,$$

pročež

$$A : B = 2\varrho^2 : r^2\sqrt{2} = \sqrt{2} : \sqrt[3]{4}$$

čili

$$A : B = 1 : \sqrt[6]{2}\,.$$

Vyjádříme-li $\sqrt[6]{2} = 1{\cdot}1224\ldots$ řetězovým zlomkem, obdržíme

$$A : B = {}^1/_1 + {}^1/_8 + {}^1/_5 + {}^1/_1 + {}^1/_7 + {}^1/_1 + {}^1/_2 + \cdots,$$

kdež třetí hodnota sblížená vystihuje poměr $A : B$ s chybou menší než $1 : 1000$; jestiť pak

$$A : B = 49 : 55\,.$$

Úloha 60.

První stopa roviny ϱ, která stojí kolmo na rovině totožnosti, uzavírá s osou X úhel $b = 57^0 40'$; jak velké jsou odchylky této roviny od obou průměten π, v a kterak lze přímo sestrojiti odchylku, jest-li dán úhel, který uzavírá stopa roviny s osou X a naopak?

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Milota*, stud. V. tř. g. v Písku.) První stopa A dané roviny ϱ, stopa její druhá B a osa průmětná C tvoří trojhran pravoúhlý při C, ve kterém hranový úhel

$$\sphericalangle BC = a = 2R - b .$$

Značí-li α odchylku roviny ϱ od průmětny první, β odchylku od průmětny druhé, jest dle známých vět sférické trigonometrie

$$\sin b = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{cotg} \alpha , \qquad \sin a = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{cotg} \beta ,$$

tudíž za podmínky hořejší

$$\operatorname{cotg} \alpha = - \cos b , \qquad \operatorname{cotg} \beta = + \cos b .$$

Při dané hodnotě b jest

$$\alpha = 118^0 8' 24'' , \qquad \beta = 61^0 51' 36'' .$$

Dle rovnice $\operatorname{cotg} \beta = \cos b$ lze přímo sestrojiti úhel β k danému b aneb naopak.

Správné řešení úloh zaslali pp.: *)

Karel Bachura, stud. VI. tř. r. v Pardubicícb, úl. 28., 29., 30., 32., 33., 34., 40., 42.

František Balada, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 40., 43.

Zdeněk Bažant, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 28., 29., 30., 32., 33., 34., 40., 42.

František Bilovský, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 24. až 46.

*) Ostatní řešitelé úloh 1. až 26. jmenováni v čísle II. a IV.

Adolf Bradáček, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 52., 54.
Jan Bruckner, stud. VII. tř. g. v Něm. Brodě, úl. 28., 29., 43., 46.
Josef Daníček, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 28. až 31., 42., 43.
Ignác Deyl, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34. 36., 40., 42., 43.
Richard Dobrkovský, stud. VI. tř. v Ječné ulici v Praze, úl. 28., 29., 34.
Petr Dostal, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 25.
František Dostál, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34., 40., 43.
Florian Dvořák, stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 25., 28., 29., 30., 33., 34., 35., 37., 40., 42., 43., 44., 46.
Karel Erban, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 38., 40., 42.
Josef Fleissner, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28. až 31., 40.
Robert Frank, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 29., 30., 40.
Josef Frieb, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 24., 25., 28., 29., 30.
Jaromír Frus, stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 43.
Ferdinand Gillar, stud. V. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 28., 43.
Josef Grohman v Ivanovicích na Moravě, úl. 29., 35., 36., 37., 40., 42., 43., 44., 50., 51., 53. až 57.
Václav Havlíček, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 43.
Vladimír Havlíček, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 28., 29., 30., 32., 34.
František Herrmann, stud. VI. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 33., 42., 43., 44.
Ludvík Hlaváč, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 52., 54., 55.
Richard Holl, stud. VI. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 28., 33., 42., 43.
Jaroslav Homola, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 54., 55.

Jan Horák, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 42., 43., 46.
Vladimír Ibl, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34., 40., 43.
Jiljí Jahn, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 24., 28. až 34., 38., 40., 43.
Václav Janák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 20. 38., 40.
Antonín Janíček, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 24., 25.
Otto Jílek, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 32., 33,, 43.
Zeno Jockl, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 28., 29., 30., 34., 40., 43.
František Korbel, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 28., 29., 30., 40., 43.
Victor Kornfeld, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 28., 29., 30., 34.
Jan Koutný, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 28., 29., 30., 31., 34., 46.
Rudolf Kropáč, stud. VII. tř. g. v Uherském Hradišti, úl. 28. 29., 30., 42., 43.
František Košelka, stud. V. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 43.
Jan Kroupa, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 25.
František Kroutil, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 24., 25.
Václav Kroužil, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34., 40., 43.
Tobiáš Kudela, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 25.
Josef Kugler, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 40.
Karel Kutílek, stud. VI. tř. g. v Chrudimi, úl. 33., 43.
Karel Laštovka, stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 28., 29., 30., 33., 34.
Bedřich Mácha, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 28. až 31., 33., 34., 40., 43.
Bohuslav Masák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 37., 40., 42., 43., 44., 48., 52., 54., 55.
Emanuel Mencl, stud. V. tř. g. v Plzni, úl. 28., 32., 33., 42., 43., 44., 49., 51., 52., 59.
Jakub Menšík, gymn. abiturient v Kroměříži, úl. 24., 25.

Václav Měšťák, stud. g. v Ml. Boleslavi, úl. 28. až 31., 33., 34., 35., 40., 42., 43., 44.
Karel Milota, stud. VI. tř. g. v Písku, úl. 25.
Rudolf Milota, stud. V. tř. g. v Písku, úl. 26. až 60.
Karel Nečas, stud. V. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 43.
Otakar Neudörfl, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 28. až 31., 33., 34., 35., 38., 40. až 44., 46.
Alois Neumann, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 28. až 31., 34., 35., 38., 40., 43., 44.
Theodor Novák, stud. VI. tř. g. v Litomyšli, úl. 33., 43.
Jaroslav Novotný, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 28., 29., 30., 33., 34,, 42., 43., 46.
Adolf Ottis, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 24. až 60.
Josef Panocha, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 29.
Josef Pašta, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 35.
Karel Pavlíček, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 28., 29., 30., 34.
František Pecina, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34., 38., 42., 43.
Petr Pecl, stud. VI. tř. g. v Klatovech, úl. 28., 42., 43., 47., 50., 51., 52., 54., 55.
Václav Pejšek, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28. až 31., 40.
Antonín Pešek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 28. až 31., 33., 34., 37., 40., 42., 43.
Josef Pexider, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 25., 28. až 31., 34., 43., 46.
Karel Platzer, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 29., 30., 33., 40., 42., 43.
Narcis Plesche, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34.
Josef Poláček, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 28., 38., 41.
Jaroslav Potocký, stud. VII. tř. g. v Praze, úl. 28 až 46.
Jan Procházka, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 28. až 30., 32. až 38., 40. až 44.
Josef Půček, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 28. až 44., 46. až 59.

Josef Rieger, stud. V. tř. r. v Jičíně, úl. 24., 28. až 31., 33., 34., 38., 40., 44.

Leopold Rosenberg, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 28., 29., 30., 33., 34.

František Sekyra, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 30., 33., 40., 42., 43.

Stanislav Schiller, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 29., 30.

Alois Schmidt, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 28., 29., 30., 33., 40.

Jan Sieger, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 28., 29., 30., 32. až 40., 42., 43., 44., 46.

Eduard Smrčka,, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 28. až 31., 33., 34., 35., 38., 40.

Josef Sura, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 28., 29., 30.

Jaroslav Šilhan, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 54., 55.

slč. *Marie Šmelíkova,* chov. III. r. učit. ústavu v Olomouci, úl. 32., 33., 41., 42.

Josef Štolba, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 28., 29., 30., 32., 33., 34.

František Štrajt, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 28. až 31., 33., 34., 38., 40., 42., 43., 44.

Josef Ticháček, stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 40.

Vincenc Tiefenbach, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 28. až 31., 33., 34., 35., 38., 40., 42., 43., 44., 46.

Oskar Tomandl, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 28. až 34., 36., 37., 39., 40., 42., 43., 46., 50. až 55., 59.

Josef Tomáš, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 24., 25., 28. až 35.

Hynek Tomeš, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 28., 40.

Jaroslav Topol, stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 28., 29., 30., 33., 34., 43.

Josef Vafek, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 28., 29., 30., 32., 33., 34., 37., 40., 42., 43.

Miloslav Valouch, stud. VII. tř. g. v Olomouci úl. 28. až 31., 33., 34., 40., 42., 43., 46.

Josef Vavrouch, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 25., 28., 29., 30., 32., 33., 34.

Karel Velkoborský, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 32., 42.

Vítězslav Víc, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 28., 29., 30., 32. až 36., 39., 40.

František Vodseďálek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 28. až 38., 40., 42., 43.

Bohumil Voženílek, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 28. až 34., 36., 40., 44.

Jan Vrabec, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 28., 29., 30., 33., 34.

Antonín Vyhlídal, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 28. až 33.

O. Wild, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 28., 29., 30., 32. až 35.

Josef Záleský, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 28., 29., 30., 34,, 40., 43.

Bedřich Zvelebil, stud. VI. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 54., 55.

Ferdinand Žebrák, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 28., 30., 33., 34., 43.

B. Ženíšek, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 28., 29., 30., 33. až 44., 46.

L. N., stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 28., 30., 31., 38., 42., 43.

M. U. C. A. S. v Praze, úl. 28., 29., 30., 33.

N. v Hradci Králové, úl. 50., 51., 52., 54., 55.