Alois Strnad

O hyperboloidické čtveřině přímek

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 1, 34--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123867

čili

$$a \geqq \alpha > \frac{m}{\delta};$$

budou tedy dělitelé naši δ vesměs $> \frac{m}{a}$, a vyskytnou se při počítání $a - \left[\frac{m}{\delta}\right]$kráte; takže

$$\sum_{\alpha=1}^{a} \psi\left(k, \frac{m}{\alpha}\right) = \sum_{\delta}\left(a - \left[\frac{m}{\delta}\right]\right),$$

kde δ probíhá dělitele čísla k hovící podmínce

$$\delta > \frac{m}{a}.$$

(Dokončení.)

O hyperboloidické čtveřině přímek.

Napsal

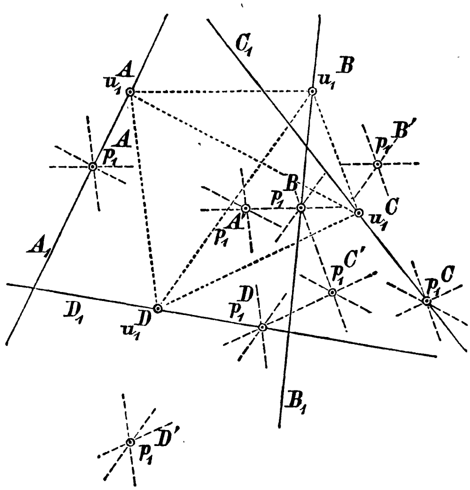
Alois Strnad.

professor v Praze.

V krátké této poznámce chceme ukázati, kterak konstruktivně, methodou deskriptivní geometrie, lze *vyšetřiti, zda-li čtyry mimoběžky dané tvoří čtveřinu hyperboloidickou.* Potřebné konstrukce vykonáme užívajíce obrazů průmětů centrálných; shledáme pak, že jich lze užiti též při obrazech průmětů orthogonálných neb klinogonálných.

Hyperboloidickou čtveřinu tvoří každé čtyry přímky téže soustavy v ploše jednodílného hyperboloidu. Pojmu tomu jmeno dal *Hermes* (Crelle, Journal LXVII. p. 171); při vyšetřování útvarů prostorových mívá taková čtveřina obdobný význam jako při útvarech rovinných trojina paprsků jdoucích týmž bodem. Tak ku př.: Výšky trojúhelníka protínají se v jediném bodě; výšky čtyrstěnu tvoří obecně čtveřinu hyperboloidickou (*Steiner,* Crelle's Journal II. p. 97). Dány-li mimoběžky A, B, C, D, lze sestrojiti vždy dvě příčky M, N, které danou čtveřinu protínají. Kdyby takových příček bylo možných více než dvě, bylo by jich pak nekonečně mnoho, a vyplňovaly by plochu jednodílného hyperboloidu, jemuž by též přímky A, B, C, D, náležely.

Příčky M, N stanoví se tím způsobem, že vyhledáme oba průsečíky přímky D s hyperboloidem určeným přímkami A, B, C a každým z těchto průsečíků vedeme na hyperboloidu přímku té soustavy, které přímky A, B, C nenáležejí. Má-li přímka D s hyperboloidem více než dva body společné, jest v něm cele obsažena a čtveřina A B C D jest hyperboloidická. Na základě této známé theoretické konstrukce ustanovíme *grafické kriterium*, kterým z obrazů čtyr mimoběžek poznáváme čtveřinu hyperboloidickou.



Obr. 1.

Přímky A, B, C, D dány buďtež centrálnými svými obrazy A_1, B_1, C_1, D_1, na nichž vytčeny stopníky p_1^A, p_1^B, p_1^C, p_1^D a úběžníky u_1^A, u_1^B, u_1^C, u_1^D.

Jsou-li A, B, C, D (obr. 1.) přímky jedné soustavy hyperboloidu H, náleží druhé soustavě v téže ploše přímky

$$A' \parallel A,\quad B' \parallel B,\quad C' \parallel C,\quad D' \parallel D,$$

z nichž každá jest k jedné z přímek daných rovnoběžná a ke třem ostatním různoběžná. Dvě a dvě z těchto rovnoběžek mají úběžníky společné, tak že

$$u_1^{A'} \equiv u_1^{A}, \quad u_1^{B'} \equiv u_1^{B}, \quad u_1^{C'} \equiv u_1^{C}, \quad u_1^{D'} \equiv u_1^{D};$$

stopníky přímek těch musí vyhověti podmínkám

$$\begin{array}{ll}
p_1^A p_1^{B'} \parallel p_1^{A'} p_1^B \parallel u_1^A u_1^B & \quad p_1^A p_1^{C'} \parallel p_1^{A'} p_1^C \parallel u_1^A u_1^C \\
p_1^A p_1^{D'} \parallel p_1^{A'} p_1^D \parallel u_1^A u_1^D & \quad p_1^B p_1^{C'} \parallel p_1^{B'} p_1^C \parallel u_1^B u_1^C \\
p_1^B p_1^D \parallel p_1^{B'} p_1^D \parallel u_1^B u_1^D & \quad p_1^C p_1^{D'} \parallel p_1^{C'} p_1^D \parallel u_1^C u_1^D .
\end{array}$$

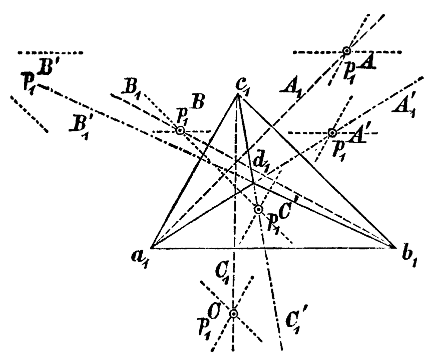
V každém ze stopníků přímek A′, B′, C′, D′ protínají se tři paprsky, z nichž každý jest rovnoběžný se spojnicí dvou úběžníků. Z dané čtveřiny ABCD lze vyjmouti čtyry trojiny: ABC, ABD, ACD, BCD. Zobrazíme-li stopníky jedné z těchto trojin, ku př. p_1^A, p_1^B, p_1^C paprsky rovnoběžné ku přímkám, které úběžníky u_1^A, u_1^B, u_1^C spojují s úběžníkem $u_1^{D'}$. protínají se paprsky ty v jediném průsečíku p_1^D. Geometrický toho význam jest, že roviny položené přímkami A, B, C rovnoběžně ku D protínají se v jedné přímce D′; přímka tato jest ku D rovnoběžná, k A, B, C různoběžná. Zcela obdobně jest tomu u ostatních tří trojin, je-li ABCD čtveřina hyperboloidická. Naopak můžeme souditi: jsou-li příslušné podmínky u tří trojin splněny, nutně jim vyhovuje též trojina čtvrtá. Neboť existují-li ku př. přímky D′, C′, B′ vlastností svrchu řečených, protínají je přímky A, B, C, D a leží tudíž na hyperboloidu, jemuž náleží též přímka A′. Z podmínek těchto, nutných i dostatečných zároveň, jde na jevo hledaný znak hyperboloidické čtveřiny.

Stopníky jedné trojiny z přímek zobrazených veďme paprsky rovnoběžné ku spojnicím úběžníků oněch tří přímek s úběžníkem čtvrtým. Mají-li tyto tři paprsky společný průsečík, a je-li tomu tak ještě u dvou jiných trojin, jest tomu rovněž tak u trojiny čtvrté, a přímky dané tvoří čtveřinu hyperboloidickou.

Kdybychom na místě průmětů centrálných zobrazovali průměty orthogonálné neb klinogonálné, dostačilo by místo úběžníků zobraziti průsečíky přímek s libovolnou stálou rovinou, rovnoběžnou k průmětně. Veškeré konstrukce naše zůstaly by pak platnými až do poslední čáry, jakož jsme mohli předvídati dle známé *věty Staudiglovy*: Všechny úlohy, které se týkají pouhé polohy útvarů prostorových, lze řešiti zcela týmiž konstrukcemi na základě průmětů orthogonálných, klinogonálných i centrálných.

Abychom podali příklad o užití svrchu vyvozeného kriteria, mějme vyšetřiti čtveřinu výšek čtyrstěnových.

Ve čtyrstěnu *abcd* buďtež výšky A, B, C, D kolmé ku stěnám *bcd*, *cda*, *dab*, *abc*. Mimo ně uvažujme ještě jiné čtyry paprsky. V trojhranu *a(bcd)* protínají se totiž v jedné přímce A′ roviny, jdoucí hranami kolmo k protějším stěnám; jsou to roviny (*ab*, B), (*ac*, C), (*ad*, D), výškové roviny trojhranu řečeného. Přímka A′ protíná tedy nejen přímku A (v bodě *a*), ale též výšky B, C, D. Obdobně obdržíme přímky B′, C′, D′ a máme tedy dvě čtveřiny přímek ABCD, A′B′C′D′ v té souvislosti, že každá přímka jedné čtveřiny protíná všechny přímky druhé čtveřiny; obě tudíž náležejí témuž hyperboloidu.



Obr. 2.

Vztahy tyto jeví se velmi jednoduše, dán-li jest čtyrstěn obrazem $a_1 b_1 c_1 d_1$ svého průmětu orthogonálného, při čemž předpokládáme vrchol *d* v průmětně P, vrcholy *a*, *b*, *c* pak v rovině U ∥ P. (Obr. 2.)

Bude pak za těchto podmínek

$$u_1^A \equiv u_1^{A'} \equiv a_1,\ u_1^B \equiv u_1^{B'} \equiv b_1,\ u_1^C \equiv u_1^{C'} \equiv c_1,\ p_1^D \equiv u_1^D \equiv p_1^{D'} \equiv d_1$$
$$A_1 \perp b_1 c_1,\quad B_1 \perp c_1 a_1,\quad C_1 \perp a_1 b_1,\quad D_1 \equiv d_1$$
$$A_1' \equiv a_1 d_1,\quad B_1' \equiv b_1 d_1,\quad C_1' \equiv c_1 d_1.$$

Jeden ze stopníků, ku př. p_1^A můžeme ještě voliti kdekoli v A_1, ale tím již všechny ostatní jsou určeny. Z různoběžnosti příslušných přímek plyne totiž, že

$$p_1^A p_1^{B'} \,||\, p_1^{A'} p_1^B = a_1 b_1$$
$$p_1^B p_1^{C'} \,||\, p_1^{B'} p_1^C \,||\, b_1 c_1$$
$$p_1^C p_1^{A'} \,||\, p_1^{C'} p_1^A \,||\, c_1 a_1.$$

Obrazec takto vzniklý vyhovuje svrchu vysloveným znakům hyperboloidické čtveřiny ABCD, i A′B′C′D′. Vytkneme-li ku př. trojinu BCD, a vedeme-li stopníky p_1^B, p_1^C, $p_1^D \equiv d_1$ paprsky rovnoběžné ku spojnicím $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, $a_1 d_1$, protínají se tyto tři paprsky v jediném průsečíku $p_1^{A'}$; obdobně jest tomu při trojinách ostatních. Tím jeví se stvrzenou známá věta:

Výšky libovolného čtyrstěnu tvoří hyperboloidickou čtveřinu. Přímkami druhé soustavy, které na témž hyperboloidu jdou skrz vrcholy čtyrstěnu, jsou průsečnice výškových rovin ve trojhranech čtyrstěnu náležejících. (*Salmon — Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, II. Aufl., I. Th. p. 142).

O stanovení elliptických drah těles nebeských.

Podává

dr. V. Láska,

docent české vysoké školy technické v Praze.

Jsou-li

x, y, z souřadnice heliocentrické,
ξ, η, ζ „ geocentrické,
X, Y, Z „ slunce,

bude, jak známo,

$$x = \xi - X, \quad y = \eta - Y, \quad z = \zeta - Z.$$

Dejme tomu, že známe tři body heliocentrické a k nim příslušné geocentrické, a to

$$x_1\, y_1\, z_2\,, \quad x_2\, y_2\, z_2\,, \quad x_3\, y_3\, z_3$$
$$\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1\,, \quad \xi_2\, \eta_2\, \zeta_2\,, \quad \xi_3\, \eta_3\, \zeta_3\,,$$