Václav Hübner

Stanovení pláště rotačního kužele obsaženého mezi dvěma sečnými rovinami

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 321--331

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123972

jsouť to hodnoty úseček bodů imaginárných průsečných některé z přímek

$$P_{1,2} \equiv y = \pm \sqrt{k}$$

s kružnicí

$$K \equiv x^2 + y^2 = 0.$$

Stanovení pláště rotačního kužele obsaženého mezi dvěma sečnými rovinami.

Podává

Václav Hübner,

professor na Král. Vinohradech.

Řádky tyto mají za účel doplniti jen články, které jsem podal v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky o stanovení pláště rotačního kužele seříznutého v ellipse a v parabole, když totiž má býti stanoven plášť rotačního kužele, který jest obsažen mezi dvěmami rovinami, z nichž 1) obě jej protínají v ellipse, 2) jedna rovina protíná jej v ellipse a druhá v parabole, 3) obě roviny protínají jej v parabole.

I.

Protneme rotační kužel rovinou

ϱ v ellipse E o poloosách a, b

σ „ E' „ a', b';

odchylka roviny $\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}$ od základny kruhové Z budiž $\begin{matrix}\omega\\ \omega'\end{matrix}$.

Ve všech případech buďtež roviny ϱ, σ kolmé ke druhé průmětně.

Značí-li α odchylku stran kužele od základny Z, jest $\left\{\begin{matrix}\omega\\ \omega'\end{matrix}\right\} < \alpha$ (obr. 1.).

Základní rovnice, kterou určíme hledaný plášť p obsažený mezi rovinami ϱ, σ jest

$$Z - E'_1 - (Z - E_1) = p \cos \alpha$$

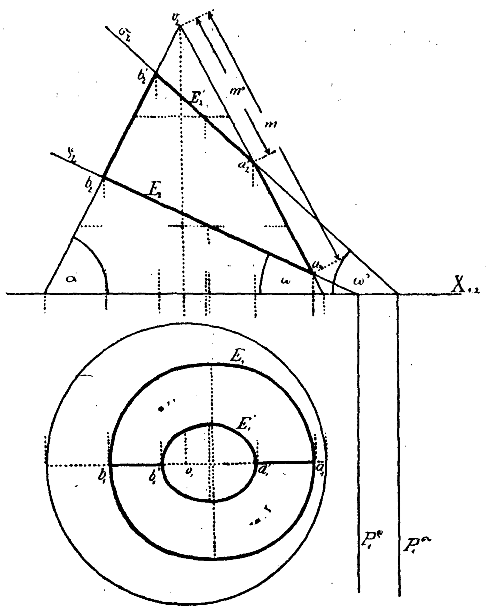
čili

$$E_1 - E'_1 = p \cos \alpha,$$

tudíž

$$p = \frac{E_1 - E'_1}{\cos \alpha}.$$

(E_1, E'_1 značí obsahy průmětů ellips E, E' do roviny základny π).



Obr. 1.

Ježto

$$E_1 = \pi\, ab \cos \omega, \quad E'_1 = \pi\, a' b' \cos \omega',$$

jest

(1) $$p = \frac{\pi}{\cos \alpha} (ab \cos \omega - a' b' \cos \omega').$$

Odchylky rovin ω, ω' určíme z rovnic

$$\sin \omega = \frac{e \sin \alpha}{a},$$

$$\sin \omega' = \frac{e' \sin \alpha}{a'}$$

e, e' jsou délkové výstřednosti ellips E, E'); mimo to jest

$$a = \frac{m \sin\alpha \cos\alpha}{\sin(\alpha - \omega)}, \qquad a' = \frac{m' \sin\alpha \cos\alpha}{\sin(\alpha - \omega')};$$

$$b = m \cos\alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \omega)}{\sin(\alpha - \omega)}}, \qquad b' = m' \cos\alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \omega')}{\sin(\alpha - \omega')}},$$

při čemž jest $\qquad \overline{v_2 a_2} = m, \qquad \overline{v_2 a'_2} = m'.$

Rovnice (1) přejde tudíž v

$$(2) \quad p = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[b\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2\alpha} - b'\sqrt{a'^2 - e'^2 \sin^2\alpha}\,\right].$$

Je-li $\varrho \,||\, \sigma$, jest $\omega = \omega'$ a $\dfrac{e}{a} = \dfrac{e'}{a'}$, pročež

$$p = \frac{\pi}{\cos\alpha}(ab - a'b')\sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2}\sin^2\alpha}$$

čili

$$(3) \qquad p = \frac{\pi}{a \cos\alpha}(ab - a'b')\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2\alpha}.$$

Pro $a = b$, $a' = b'$, jest $e = e' = 0$ a $\omega = \omega' = 0$ (řezy jsou kruhové), tudíž z rov. (3)

$$p = \frac{\pi}{\cos\alpha}(a^2 - a'^2).$$

Ježto

$$a^2 - a'^2 = (a + a')(a - a')$$

a

$$a - a' = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sin(\alpha - \omega)}(m - m') = (m - m')\cos\alpha,$$

jest

$$p = \pi(a + a')(m - m')$$

(plášť rotačního kužele komolého).

Pro $a = b$, $a' = b' = 0$ obdržíme

$$p = \pi a \frac{a}{\cos\alpha};$$

poněvadž

$$\frac{a}{\cos\alpha} = m,$$

jest

$$p = \pi a m$$

(plášť rotačního kužele).

Připomenutí. Označíme-li nejkratší a nejdelší strany odříznutého kužele rovinou $\left\{\begin{matrix}\varrho \\ \sigma\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}m, n \\ m', n'\end{matrix}\right\}$, nabudeme pro plášť kužele mezi rovinami ϱ, σ vzorce

$$p = \frac{\pi\cos\alpha}{2}\left[(m+n)\sqrt{mn} - (m'+n')\sqrt{m'n'}\right].$$

II.

Rovina ϱ protíná rotační kužel v ellipse E o poloosách a, b a rovina σ ($\omega' = \alpha$) v parabole P, jejíž parametr

$$p = 2n\cos^2\alpha, \quad n = \overline{v_2 a_2}.$$

Značí-li Z obsah základny o poloměru r, dále U_1, U_1' obsahy úseče kruhové a úseče parabolické obě vzniklé stopou P^σ roviny σ a E_1 obsah průmětu ellipsy E na základně Z (obr. 2.), jest pro stanovení pláště p obsaženého mezi rovinami ϱ, σ tato základní rovnice

$$Z - E_1 - [Z - (U_1 + U_1')] = p\cos\alpha$$

čili

$$p = \frac{U_1 + U_1' - E_1}{\cos\alpha}.$$

Ježto

$$U_1 = \frac{\pi r^2}{360}\beta - \overline{b_1 u}\,.\,\overline{v_1 u},$$

$$U_1' = \frac{4}{3}\overline{a_1 u}\,.\,\overline{b_1 u},$$

$$E_1 = \pi ab\cos\omega = \pi b\sqrt{a^2 - e^2\sin^2\alpha},$$

jest

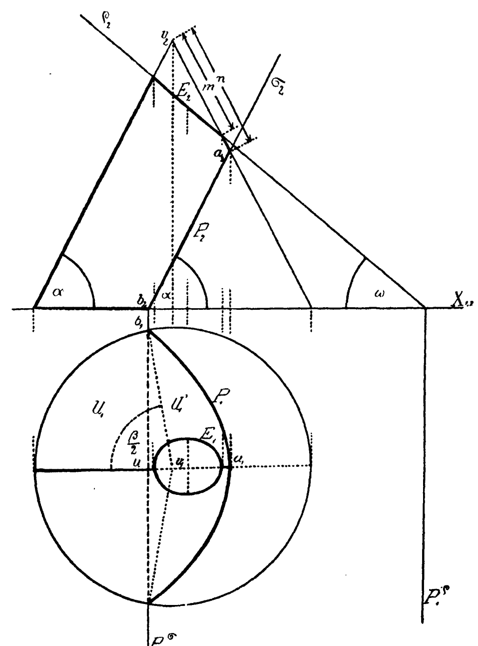
$$(4)\quad p = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{\pi r^2}{360}\beta + \frac{1}{3}\overline{b_1 u}\,(4\overline{a_1 u} - 3\overline{uv_1}) - \pi b\sqrt{a^2 - e^2\sin^2\alpha}\right];$$

odchylka ω roviny ϱ od základny Z určena (v odst. I.) a β, úhel středový, příslušný k úseči U_1 stanoví se z $\triangle\, uv_1 b_1$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{uv_1}}{r}.$$

V rovnici (4) dosud neznámé veličiny určí se z rovnic

$$\overline{b_1 u} = 2\sqrt{n\,(r - n\cos\alpha)\cos\alpha},$$
$$\overline{a_1 u} = r - n\cos\alpha,$$
$$\overline{uv_1} = r - 2n\cos\alpha.$$



Obr. 2.

V tomto obecném řešení zahrnuty jsou zvláštní případy, když totiž 1) $\omega = 0$ čili $a = b$, tudíž $e = 0$ a $\beta = 360^0$, t. j. $n = s$ (délce strany kužele); a 2) $a = b = 0$, $n = s$.

V prvním případě jest $n\cos\alpha = r$; tedy $\overline{b_1 u} = 0$, $\overline{a_1 u} = 0$, $\overline{uv_1} = -r$, pročež z rov. (4)

$$p = \frac{\pi}{\cos\alpha}(r^2 - a^2)$$

čili

$$p = \pi(r + a)(s - m)$$

(plášť rotačního kužele komolého), ježto

$$\frac{r-a}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha} - \frac{a}{\cos\alpha} = s - m.$$

Význam veličiny m jest znám z odst. I.

V druhém případě jest

$$p = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha} = \pi r s$$

(plášť rotačního kužele).

III.

Roviny $\varrho \,||\, \sigma$, jichž odchylku od základny Z jest α, protínají kužel v parabolách P, P'; parametry jsou $p = 2n \cos^2\alpha$, $p' = 2n' \cos^2\alpha$, značí-li n, n' úsečky $\overline{v_2 a_2}$, $\overline{v_2 a'_2}$. (Obr. 3.).

Jsou-li U_1, S_1 plochy úsečí kruhových, k nimž přísluší středové úhly β, β' a U'_1, S'_1 plochy úsečí parabolických (příslušné úseče vznikají stopami P^ϱ, P^σ na základně Z), jest plášť obsažený mezi rovinami ϱ, σ dán rovnicí

$$Z - (U_1 + U'_1) - [Z - (S_1 + S'_1)] = p \cos\alpha,$$

tudíž

$$p = \frac{S_1 + S'_1 - (U_1 + U'_1)}{\cos\alpha}.$$

Vyjádříme-li příslušné úseče, obdržíme

$$(5) \quad p = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{\pi r^2}{360}(\beta' - \beta) + \frac{1}{3}\left\{\overline{b_1 u}\,(3\,\overline{u v_1} - 4\,\overline{a_1 u})\right.\right.$$

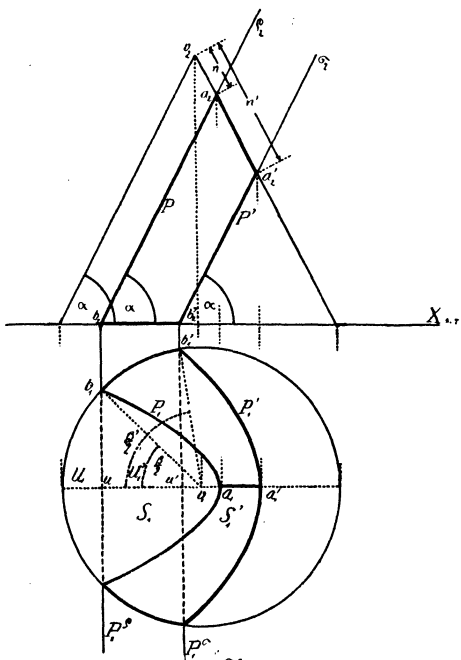
$$\left.\left. - \overline{b'_1 u'}\,(3\,\overline{u' v_1} - 4\,\overline{a'_1 u'})\right\}\right].$$

Úsečky $\overline{b_1 u}$, $\overline{u v_1}$, $\overline{a_1 u}$ určeny v odst. II.; obdobně stanoví se úsečky $\overline{b'_1 u'}$, $\overline{u' v_1}$, $\overline{a'_1 u'}$, dosadíme-li jen $\left|\begin{matrix}\beta' \\ n'\end{matrix}\right|$ místo $\left|\begin{matrix}\beta \\ n\end{matrix}\right|$. Středové úhly β, β' dány jsou rovnicemi

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{r - 2n\cos\alpha}{r}, \qquad \cos\frac{\beta'}{2} = \frac{r - 2n'\cos\alpha}{r}.$$

Je-li $n = 0$, $n' = s$, jest $\beta = 0$, $\beta' = 360^0$, $\left\{\frac{\overline{b_1 u}}{\overline{b'_1 u'}}\right\} = 0$, $\left\{\frac{\overline{uv_1}}{\overline{u'v_1}}\right\} = \frac{r}{-r}$, $\left\{\frac{\overline{a_1 u}}{\overline{a'_1 u'}}\right\} = \frac{r}{0}$ a rovnice (5) přejde v známý tvar

$$p = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha} = \pi r s.$$



Obr, 3.

Úlohy.

1. Je dána rovina ϱ, která seče kruhový kužel kolmý v ellipse; kde vésti rovinu $\sigma \parallel \varrho$, aby plášť kužele obsažený mezi oběma rovinami, byl polovinou pláště celého kužele?

Řešení. Značí-li m, n nejdelší a nejkratší úseky odříznuté danou rovinou ϱ na straně s kužele, x, y pak úseky odříznuté rovinou σ, tu jest dle dané podmínky

$$\pm\frac{\pi\cos\alpha}{2}\left[(m+n)\sqrt{mn}-(x+y)\sqrt{xy}\right]=\frac{1}{2}\pi s^2\cos\alpha,$$

ježto rovina σ může býti vedena buď nad nebo pod rovinou ϱ.

Z podmínky, že $\sigma \parallel \varrho$, plyne

$$m:n=x:y,\quad \text{pročež } y=\frac{nx}{m}$$

a tedy

$$\pm\left[(m+n)\sqrt{mn}-x^2\frac{m+n}{m}\sqrt{\frac{n}{m}}\right]=s^2$$

čili

$$\pm(m+n)(m^2-x^2)\sqrt{mn}=m^2s^2,$$

tudíž

$$\pm(m^2-x^2)=\frac{ms^2\sqrt{mn}}{n(m+n)},$$

z čehož

$$x=\sqrt{\frac{m\left[mn(m+n)\mp s^2\sqrt{mn}\right]}{n(m+n)}}.$$

Poloosy ellipsy a', b', ve které protíná rovina $\sigma \parallel \varrho$ plochu kuželovou, dány jsou rovnicemi v odst. I.

a) Je-li $m=n$, tudíž i $x=y$, pak jest $\varrho \parallel \sigma \parallel Z$, pročež

$$x=\sqrt{\frac{2m^2-s^2}{2}}$$

anebo

$$x=\sqrt{\frac{2m^2+s^2}{2}}.$$

K rovnicím těmto dospěli bychom též užitím vzorce (3) v odst. I. Jest totiž

$$\pm\frac{\pi}{a\cos\alpha}(ab-a'b')\sqrt{a^2-e^2\sin^2\alpha}=\frac{\pi r^2}{2\cos\alpha}.$$

Pro $a = b$, $a' = b'$, jest

$$a^2 - a'^2 = \frac{r^2}{2};$$

poněvadž $a^2 = m^2 \cos^2\alpha$, $a'^2 = x^2 \cos\alpha$, $r^2 = s^2 \cos^2\alpha$, jest tudíž

$$\pm (m^2 - x^2) = \frac{s^2}{2}$$

a

$$x = \sqrt{\frac{2m^2 - s^2}{2}}$$

anebo

$$x = \sqrt{\frac{2m^2 + s^2}{2}}.$$

b) Pro kužel rovnostranný ($\alpha = 60^0$), je-li $\sigma \parallel \varrho$,

$$\sphericalangle \omega = \sphericalangle \omega' = 30^0$$

a m úsek roviny ϱ na straně kužele, platí

$$\pm \frac{1}{a} (ab - a'b') \sqrt{a^2 + 3b^2} = r^2.$$

Dle dané podmínky jest

$$a = \frac{m}{2}\sqrt{3}, \qquad a' = \frac{x}{2}\sqrt{3},$$

$$b = \frac{m}{2}\sqrt{2}, \qquad b' = \frac{x}{2}\sqrt{2},$$

tudíž

$$\pm \frac{2}{m\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} (m^2 - x^2) \frac{3m}{2} = r^2$$

čili

$$\pm 3\sqrt{2}\, (m^2 - x^2) = 4r^2$$

a

$$x = \sqrt{\frac{3m^2 - 2r^2\sqrt{2}}{3}}$$

anebo

$$x = \sqrt{\frac{3m^2 + 2r^2\sqrt{2}}{3}};$$

ježto v tomto případě jest $r = \frac{s}{2}$, obdržíme též

$$x = \sqrt{\frac{6m^2 \mp s^2\sqrt{2}}{6}}.$$

2. Dána jest rovina σ, která prochází středem základny kužele rotačního a protíná jej v parabole; kde vésti rovinu $\varrho \parallel Z$, aby (jako v předešlé úloze) plášť obsažený mezi oběma rovinami, byl polovinou pláště celého kužele?

K řešení upotřebíme vzorce (4) v odst. II. Tu jest

$$n = \frac{s}{2},\ \beta = 180^0,\ \overline{b_1u} = r,\ \overline{a_1u} = \frac{r}{2},\ \overline{uv_1} = 0,\ a = b,$$

tudíž

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{\pi r^2}{2} + \frac{2}{3}r^2 - \pi a^2\right] = \frac{1}{2}\frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$$

čili

$$2r^2 = 3\pi a^2.$$

Poněvadž

$$a = x\cos\alpha,\quad \cos\alpha = \frac{r}{s},\ \text{jest}\ a = \frac{rx}{s}$$

a tudíž

$$x = s\sqrt{\frac{2}{3\pi}},$$

přihlížíme-li jen k jednomu řešení.

3. Roviny $\varrho \parallel \sigma$ protínají kužel v parabolách; úsek

$$n = \frac{s(2-\sqrt{2})}{4},\quad n' = \frac{s}{2}.$$

V jakém poměru jest plášť kužele obsažený mezi rovinami ϱ a σ, k celému plášti kužele?

Řešení této úlohy spadá do odst. III. rov. (5). Při daných podmínkách jest $\beta = 90^0$, $\beta' = 180^0$,

$$\overline{b_1u} = \overline{uv_1} = \frac{s\cos\alpha\sqrt{2}}{2},\quad \overline{a_1u} = s\cos\alpha\frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

$$\overline{b'_1u'} = s\cos\alpha,\quad u'v_1 = 0,\quad \overline{a'_1u'} = \frac{s\cos\alpha}{2},$$

tudíž

$$p = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{\pi s^2\cos^2\alpha}{4} + \frac{1}{3}\left\{\frac{s\cos\alpha}{2}\sqrt{2}\left(\frac{3s\cos\alpha\sqrt{2}}{2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - s\cos\alpha\,(2+\sqrt{2})\right) + 2s^2\cos\alpha^2\right\}\right].$$

Provedeme-li naznačené výkony, obdržíme

$$p = \frac{s^2\cos\alpha}{12}\,(3\pi + 10 - 4\sqrt{2});$$

hledaný poměr jest tedy

$$p : \Pi = \frac{s^2\cos\alpha}{12}\,(3\pi + 10 - 4\sqrt{2}) : \pi s^2\cos\alpha$$

(Π značí plášť celého kužele), nebo

$$p : \Pi = (3\pi + 10 - 3\sqrt{2}) : 12\pi.$$

Béřeme-li přibližně

$$\pi = \frac{22}{7},\quad \sqrt{2} = 1{\cdot}414,$$

jest

$$p : \Pi = 4 : 11.$$

Poznámka ku sestrojení stop roviny určené odchylkami α, β od průměten.

Podává

Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

V Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XX., byla úloha ta řešena obecně, jsou-li dány odchylky α, β od průměten π, ν.