boly žádané. Involuce $o, \overline{pq}$ jest elliptická, tedy X osa vedlejší; potence involuce $= - ov^2$, a hyperbola je rovnoosá, tedy bod v vrcholem jejím. Tím hyperbola jedna jest určena s dostatek; druhá sestrojí se obdobně z dotyčného bodu e na tečně T.

Aby tyto hyperboly byly reálny, musí býti tyto podmínky splněny: 1. Svírá-li tečna T s danou osou X úhel $\alpha < 45^0$, a je-li T_1 tečna souměrná k T podle X, musí bod a býti dán vnitř jednoho z *tupých* úhlů, jež přímky T, X spolu tvoří; osa X je *vedlejší* osou hyperboly; 2. je-li však úhel $\alpha > 45^0$, musí bod a ležeti vnitř jednoho z *ostrých* úhlů TX; X jest pak *hlavní* osou hyperboly. —

Dodatek: Všecky tyto úlohy lze řešiti způsobem obdobným, dán-li místo osy X jeden *průměr* R kuželosečky a směr Q průměru sdruženého; tím je stanovena *klinogonálná* symmetrie kuželosečky podle R. Samodružné body involuce na R nejsou ovšem vrcholy křivky, nýbrž toliko krajní body průměru R; tečny v těchto bodech jsou $\parallel Q$. Při hyperbole rovnoosé jsou tím dány i směry asymptot, ježto půlí odchylky směrů R, Q; a tím jsou stanoveny i směry obou os. (Dokončení.)

Řešení lineárních rovnic vektorových o jedné neznámé.

Napsal vl. rada **Ant. Libický**.

Rovnici nazýváme *vektorovou*, je-li v ní neznámou vektor*). Známé veličiny, které se v takové rovnici vyskytují, jsou buď vektory nebo skaláry.

Rovnice vektorová, jejíž každý člen chová jen jeden neznámý činitel, jest *lineární*.

Rozeznáváme *rovnice skalární* nebo *vektorové v užším smyslu* dle toho, jsou-li všechny členy její buď skaláry nebo vektory. Soustavy takových rovnic mohou býti též *smíšené*, jsou-li některé rovnice skalární, jiné vektorové.**)

---

*) Viz moji „*Vektorovou analysis*«, str. 2.; cituji-li tento spis v dalším, užívám proň zkratky *V. A.* Podotýkám, že označuji vektory, jejich součiny a j. týmž způsobem, jako v tomto spise.

**) Obmezuji se v tomto článku na rovnice, v nichž se vyskytují jen součiny skalární neb vektoriální.

I. Řešení rovnic skalárních.

1. Nejjednodušší tvar rovnice skalární jest

$$\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} = m; \tag{1}$$

v ní levá strana jest skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{a}$, jehož hodnota jest $xa \cos \widehat{\mathbf{xa}}$ čili $a\, pr_{\mathbf{a}}\, \mathbf{x}$. Ve výrazech těch značí a, x délky vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{a}$ (jejich skalární části), $\widehat{\mathbf{xa}}$ úhel, který uzavírají jejich směry, a $pr_{\mathbf{a}}\, \mathbf{x}$ průmět vektoru $\mathbf{x}$ na směr vektoru $\mathbf{a}$. Poněvadž vektor jest určen třemi skalárními veličinami, jest zřejmo, že rovnicí tou neznámý vektor $\mathbf{x}$ není jednoznačně určen.

Rovnicí (1) se žádá, aby průmět vektoru $\mathbf{x}$ na směr daného vektoru $\mathbf{a}$ byl stálý, totiž roven podílu $\frac{m}{a}$. Takových vektorů jest patrně nekonečně mnoho; vycházejí-li ze společného počátku O (obr. 1.), který jest též počátkem vektoru $\mathbf{a}$, leží koncové body jejich v rovině ξ, vedené kolmo k $\mathbf{a}$ ve vzdálenosti od O rovné $\frac{m}{a}$ jednotek délkových. Neboť z pravoúhlého trojúhelníka OX_0X plyne pro každý takový vektor

$$\overline{OX_0} = \overline{OX} \cos \widehat{\mathbf{xa}}.$$

Mezi všemi těmi vektory má jeden $\mathbf{x}_0$ směr $\mathbf{a}$, jest tudíž kolmý na rovině ξ; délka jeho jest $\frac{m}{a}$, tudíž

$$\mathbf{x}_0 = \frac{m}{a}\, \mathbf{a}_1,$$

značí-li $\mathbf{a}_1$ vektor mající směr vektoru $\mathbf{a}$, jehož délka se rovná jednotce délkové (jednotkový vektor).

Nazveme-li vektor $\frac{1}{a}\, \mathbf{a}_1$, jehož délka jest rovna převrácené hodnotě délky a vektoru $\mathbf{a}$ a jehož směr souhlasí se směrem tohoto vektoru, *zvratnou hodnotou vektoru* $\mathbf{a}$ (*V. A.*, str. 24), a označíme-li vektor ten $\frac{1}{\mathbf{a}}$, jest specielní kořen rovnice (1)

$$\mathbf{x}_0 = m \frac{1}{\mathbf{a}}. \tag{2}$$

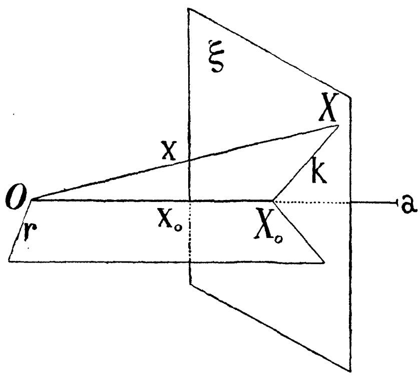
Budiž **k** libovolný vektor v rovině ξ, vedený bodem X_0; ježto dle obr. (1) platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{k},$$

bude obecný kořen rovnice (1) dán vzorcem

$$\mathbf{x} = m \frac{1}{\mathbf{a}} + \mathbf{k}. \qquad (3a)$$

Každým vektorem **k**, kolmým k **a**, ustanoven jest jeden kořen **x**.



Obr. 1.

Vhodněji nahradíme vektor **k** jiným vektorem **r**, vedeným zcela libovolně počátkem O. Utvořme totiž vektoriální součin $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$; součin ten jest, jak známo, určen vektorem kolmým k rovině **r** a **a** (v kladném směru), jehož délka má tolik jednotek délkových, kolik jednotek plošných má obsah rovnoběžníka sestrojeného z **r** a **a**. Poněvadž rovina, vedená vektory **r** a **a**, stojí kolmo na ξ, leží vektor $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ v této rovině; i můžeme jej pokládati za vektor **k** a psáti

$$\mathbf{x} = m \frac{1}{\mathbf{a}} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}\,^{*)}. \qquad (3b)$$

*) Stanovení **x** z rovnice $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$ (a z rovnice $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{m}$ níže v odst. 8.) souvisí patrně s výkonem dělení; **x** lze totiž míti za podíl skaláru m (neb vektoru **m**) a vektoru **a**. Viz *Jaumann*: „Die Grundlagen der Bewegungslehre", pag. 25.—28.

Z předešlého jest patrno, že $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$ jest rovnicí roviny ξ, určené směrem a délkou kolmice, vedené k ní z počátku O.

Kořen $\mathbf{x}$ rovnice (1) jest určen jednoznačně, je-li o něm dána podmínka, že má býti téhož směru, jako daný vektor $\mathbf{v}$. Pak jest úhel $\widehat{\mathbf{xa}} = \widehat{\mathbf{va}}$, tudíž

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = ax \cos \widehat{\mathbf{xa}} = ax \cos \widehat{\mathbf{va}} = \frac{x}{v} av \cos \widehat{\mathbf{va}},$$

z čehož jde

$$v\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = x\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}.$$

Poněvadž dle (1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$, nabudeme též

$$mv = x\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}.$$

Jsou-li vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{v}$ téhož směru, jsou také jednotkové vektory jejich $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{v}_1$ stejné, tudíž

$$mv\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\, x\mathbf{x}_1$$

čili

$$m\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{x},$$

ježto $\mathbf{v} = v\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{x} = x\mathbf{x}_1$.

Z této rovnice plyne

$$\mathbf{x} = m \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}, \tag{4a}$$

poněvadž součin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ jest skalár.

Vektor tvaru $\dfrac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}$ jest *Jaumannův vektor reciprokální* **k vektoru a** ve směru vektoru $\mathbf{v}$; zavedouce proň označení

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}},$$

nabudeme konečně

$$\mathbf{x} = m\mathbf{x}'. \tag{4b}$$

V rovnici $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$ může býti ve zvláštním případě $m = 1$; pak bude dle (2)

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\mathbf{a}} \quad \text{a dle (3b)} \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{a}} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}$$

neb dle (4b) $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Rovina ξ jest vzdálena od počátku $\dfrac{1}{a}$ jednotek délkových.

Je-li v rovnici (1) $m = 0$, tedy daná rovnice $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$, prochází rovina ξ počátkem a kořenem rovnice jest každý vektor kolmý k $\mathbf{a}$, což z definice skalárního součinu bezprostředně plyne.

Složitější rovnice

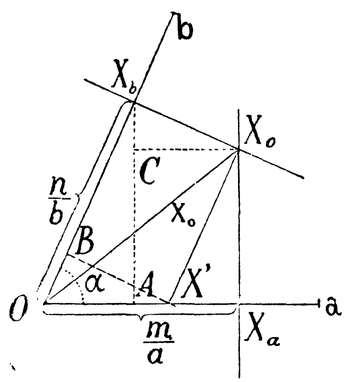
$$(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m$$

řeší se snadno, píšeme-li ji ve tvaru

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = m$$

čili

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = m - ab \cos \widehat{\mathbf{ab}} = n.$$



Obr. 2.

2. Jsou-li dány dvě rovnice

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = n, \tag{5}$$

příslušejí jim dvě roviny $\xi_a \perp \mathbf{a}$ a $\xi_b \perp \mathbf{b}$, které se protínají v přímce p kolmé k rovině vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Všechny vektory, vedené z počátku O k bodům této přímky, jsou kořeny rovnic (5). Specielní kořen $\mathbf{x}_0$ jest vektor kolmý k p, který tudíž leží v rovině vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (obr. 2.); abychom jej ustanovili, vyjádřeme jej jako součet (geometrický) dvou sčítanců, z nichž jeden má délku

$$\overline{OX'} = \frac{\overline{BX'}}{\sin \alpha},$$

značí-li α úhel $\widehat{\mathbf{ab}}$.

Ježto však

$$\overline{BX'} = \overline{X_b X_0} = \frac{\overline{CX_0}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AX_a}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{OX_a} - \overline{OA}}{\sin\alpha},$$

kde

$$\overline{OX_a} = \frac{m}{a}, \quad \overline{OA} = \frac{n}{b}\cos\alpha,$$

bude

$$\overline{OX'} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\cos\alpha\right).$$

Pro délku druhého sčítance nabudeme nejprve

$$\overline{X'X_0} = \overline{BX_b} = \overline{OX_b} - \overline{OB} = \frac{n}{b} - \overline{OX'}\cos\alpha,$$

pak, vložíme-li za $\overline{OX'}$ vyhledanou hodnotu,

$$\overline{X'X_0} = \frac{n}{b} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\cos\alpha\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{n}{b} - \frac{m}{a}\cos\alpha\right).$$

Jsou-li $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{b}_1$ jednotkové vektory pro $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, bude tudíž

$$\sin^2\alpha\ \mathbf{x}_0 = \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\cos\alpha\right)\mathbf{a}_1 + \left(\frac{n}{b} - \frac{m}{a}\cos x\right)\mathbf{b}_1, \tag{6}$$

a obecný kořen daných rovnic

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + r\,[\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \tag{7}$$

kde r značí jakýkoli skalár. Poněvadž totiž vektoriální součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest určen vektorem kolmým k jeho rovině, jest koncový bod vektoru $r\,[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ libovolným bodem přímky p.

Zároveň poznáváme, že $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{a} = m$, $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{b} = n$ jsou rovnice přímky p, kolmé k vektorům $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Uvážíme-li, že přímka ta má směr vektoru stanovícího součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a že týž směr má vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ je-li $\mathbf{x}$ vektor, vedený z počátku k libovolnému bodu přímky p jest

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \tag{8}$$

jelikož vektoriální součin dvou vektorů téhož směru se rovná nulle.

Kdyby bylo ve zvláštním případě $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tedy úhel $\alpha = 90^0$, bylo by

$$\mathbf{x}_0 = \frac{m}{a}\mathbf{a}_1 + \frac{n}{b}\mathbf{b}_1$$

a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + rab\mathbf{c}_1 = \frac{m}{a}\mathbf{a}_1 + \frac{n}{b}\mathbf{b}_1 + \frac{r}{c}\mathbf{c}_1,$$

značí-li $\mathbf{c}_1$ jednotkový vektor, kolmý k $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, a $c = \frac{1}{ab}$.

Zavedeme-li ve vzorci tom zvratné hodnoty vektorů, obdržíme

$$\mathbf{x} = m\frac{1}{\mathbf{a}_1} + n\frac{1}{\mathbf{b}_1} + r\frac{1}{\mathbf{c}_1},$$

v němž jest r jako výše libovolným skalárem. Jest pak $\mathbf{x}$ úhlopříčnou rovnoběžnostěnu, jehož dvě hrany mají délky $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{b}$ a třetí libovolnou délku $\frac{r}{c}$.

3. Tři skalární rovnice

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = n, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = p \tag{9}$$

určují jediný vektor, společný kořen těchto rovnic. Jest patrno, že koncový bod tohoto vektoru jest průsečíkem tří rovin ξ_a, ξ_b a ξ_c příslušných těmto rovnicím. Stanovíme jej, určíme-li průsečík přímky p, která přísluší na př. oběma prvním daným rovnicím, s rovinou třetí. Bylo by tedy třeba řešiti rovnice

(8) $$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

a třetí rovnici (9) $$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = p;$$

řešení této smíšené soustavy rovnic provedeno bude níže v odstavci 10.

Jinak lze řešiti rovnice (9), použijeme-li soustavy vektorů, zvané *reciprokální.**) (*V. A.* pag. 142). Předpokládajíce, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nejsou komplanární, t. j. nejsou rovnoběžny k jedné rovině, můžeme hledaný kořen rovnic (9) psáti ve tvaru

$$\mathbf{x} = a'\mathbf{a}' + b'\mathbf{b}' + c'\mathbf{c}', \tag{10}$$

kde $\mathbf{a}'$ jest vektor kolmý k $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}'$ vektor kolmý k $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}'$ vektor kolmý k $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Délky těchto vektorů zatím neurčíme.

Máme tudíž dvě soustavy vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ v určitém vzájemném vztahu. Přihlížíme-li k jejich jednotkovým vektorům, jsou koncové body jejich na povrchu koule, jejímž

*) *Gibbs-Wilson*: Vector analysis, pag. 89.

středem jest společný počátek všech těchto vektorů a jejíž poloměr rovná se jednotce délkové. Na této kouli tvoří konce vektorů **a**, **b** a **c** jeden sférický trojúhelník a konce vektorů $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{c}'$ druhý trojúhelník, který jest polární k prvnímu.

Násobme rovnici (10) skalárně vektoriálním součinem $\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'$; i obdržíme

$$\mathbf{x} \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] = a'\mathbf{a}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] + b'\mathbf{b}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] + c'\mathbf{c}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'].$$

Výrazy $\mathbf{a}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}']$, $\mathbf{b}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}']$ atd. v této rovnici jsou součiny tří vektorů, zvané skalárními (*V. A.* pag. 19), jež znamenáme kratčeji $(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')$, $(\mathbf{b}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')$ atd. Hodnota každého z nich jest skalární veličina, totiž číslo stanovící obsah rovnoběžnostěnu, jehož tři sousední hrany jsou činitelé součinu (s příslušným znaménkem). Z toho jde, že skalární součiny tří vektorů, jichž činitelé jsou komplanární neb jichž dva činitelé jsou stejny, mají hodnotu rovnou nulle.

Tudíž

$$\mathbf{b}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] = \mathbf{c}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] = 0$$

a poslední rovnice nabývá tvaru

$$\mathbf{x} \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] = a'(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'),$$

z čehož

$$a' = \mathbf{x} \, . \, \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')}.$$

Podobně obdržíme z rovnice (10), násobíce ji vektoriálním součinem $\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'$, že

$$b' = \mathbf{x} \, . \, \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')},$$

ježto

$$\mathbf{b}' \, . \, [\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'] = \mathbf{a}' \, . \, [\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'] = (\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')$$

(*V. A.*, pag. 19.); konečně bude

$$c' = \mathbf{x} \, . \, \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')}.$$

Vložením těchto hodnot pro a', b', c' do rovnice (10) nabudeme vzorce

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x} \, . \, \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')}\right) \mathbf{a}' + \left(\mathbf{x} \, . \, \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')}\right) \mathbf{b}' + \left(\mathbf{x} \, . \, \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')}\right) \mathbf{c}'.$$

Dle toho, co bylo pověděno o poloze vektorů $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, jest také vektor $\mathbf{a}$ kolmý k vektorům $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{c}'$, vektor $\mathbf{b}$ kolmý k $\mathbf{c}'$ a $\mathbf{a}'$ a vektor $\mathbf{c}$ kolmý k $\mathbf{a}'$ a $\mathbf{b}'$; i lze délky vektoru $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, dosud neurčené, voliti tak, aby

$$\frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')} = \mathbf{a}, \quad \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')} = \mathbf{b}, \quad \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{(\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}')} = \mathbf{c}. \tag{11a}$$

Pak bude

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{a})\, \mathbf{a}' + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{b})\, \mathbf{b}' + (\mathbf{x} \,.\, \mathbf{c})\, \mathbf{c}' \tag{12a}$$

anebo dle (9)

$$\mathbf{x} = m\mathbf{a}' + n\mathbf{b}' + p\mathbf{c}', \tag{12b}$$

což jest kořen dané soustavy rovnic.

Soustavy vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ jsou reciprokální; platí pak pro $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ vzorce obdobné k (11*a*), totiž

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{(\mathbf{abc})}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{(\mathbf{abc})}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{(\mathbf{abc})}. \tag{11b}$$

(Viz *V. A.*, vzorce 163*a* a 163*b* s tím rozdílem, že místo $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ užívá se v nich označení $\mathbf{a}^{-1}$, $\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{c}^{-1}$).

Shoda s reciprokálním vektorem $\dfrac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \,.\, \mathbf{a}}$ k vektoru $\mathbf{a}$ (dle rovnice 4*a*) jest patrna; třeba jen ve vzorci tom položiti za $\mathbf{v}$ vektoriální součin $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, abychom obdrželi první vzorec (11*b*).

O zvláštním případě, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ v rovnicích (9) jsou k sobě vzájemně kolmé, netřeba se dále šířiti.

Zbývá ještě vyšetřiti případ, kdy vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou komplanární. Pak příslušné roviny ξ_a, ξ_b, ξ_c musí procházeti jedinou přímkou, kolmou k rovině vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, čili přímky X_aX_0, X_bX_0, X_cX_0 musí se protínati v jednom bodě X_0 (obr. 3.).

Podmínečnou rovnici pro tuto zvláštní polohu nalezneme, píšeme-li

$$\mathbf{c} = c'\mathbf{a}_1 + c''\mathbf{b}_1 = \frac{c'}{a}\, \mathbf{a} + \frac{c''}{b}\, \mathbf{b},$$

kde c' jest dáno délkou $\overline{OC'}$ a c'' délkou $\overline{C'C}$.

Pak se změní třetí rovnice (9) v

$$\frac{c'}{a}\, \mathbf{x} \,.\, \mathbf{a} + \frac{c''}{b}\, \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} = p$$

čili

$$m\frac{c'}{a}+n\frac{c''}{b}=p.$$

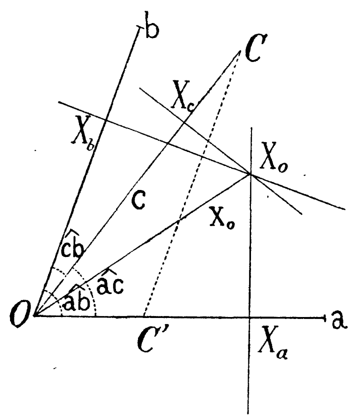
Avšak v $\triangle\ OCC'$ jest

$$\overline{OC'}:\overline{C'C}:\overline{OC}=\sin\widehat{\mathbf{cb}}:\sin\widehat{\mathbf{ac}}:\sin\widehat{\mathbf{ab}},$$

z čehož jde

$$c'=\frac{c\sin\widehat{\mathbf{cb}}}{\sin\widehat{\mathbf{ab}}}\quad\text{a}\quad c''=\frac{c\sin\widehat{\mathbf{ac}}}{\sin\widehat{\mathbf{ab}}},$$

kde c značí délku $\overline{OC}$.



Obr. 3.

Vložíce tyto hodnoty do poslední rovnice, obdržíme

$$\frac{m}{a}\frac{c\sin\widehat{\mathbf{cb}}}{\sin\widehat{\mathbf{ab}}}+\frac{n}{b}\frac{c\sin\widehat{\mathbf{ac}}}{\sin\widehat{\mathbf{ab}}}=p$$

čili

$$\frac{m}{a}\sin\widehat{\mathbf{cb}}+\frac{n}{b}\sin\widehat{\mathbf{ac}}=\frac{p}{c}\sin\widehat{\mathbf{ab}};$$

ježto $\sin\widehat{\mathbf{ab}}=-\sin\widehat{\mathbf{ba}}$, bude hledaná rovnice podmínečná

$$\frac{m}{a}\sin\widehat{\mathbf{cb}}+\frac{n}{b}\sin\widehat{\mathbf{ac}}+\frac{p}{c}\sin\widehat{\mathbf{ba}}=0.$$

Vyhoví-li se této podmínce, mají rovnice (9) nekonečné množství kořenů $\mathbf{x}$, které vycházejíce ze společného počátku O, končí v některém bodě přímky p, vztyčené v X_0 kolmo na rovině vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Specielní kořen $\mathbf{x}_0$ i obecný kořen $\mathbf{x}$ ustanovíme podobným způsobem jako u rovnic (5) v odstavci 2.

4. Jsou-li dány čtyři rovnice

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = n, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = p, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} = q,$$

nalezneme výsledek eliminace neznámé z těchto rovnic, jestliže z kterýchkoli tří rovnic ustanovíme $\mathbf{x}$ a hodnotu jeho vložíme do rovnice čtvrté.

Dle (12*b*) bude z prvních tří rovnic

$$\mathbf{x} = m\mathbf{a}' + n\mathbf{b}' + p\mathbf{c}';$$

vložíce tuto hodnotu do rovnice čtvrté, obdržíme

$$m\,\mathbf{a}' \cdot \mathbf{d} + n\,\mathbf{b}' \cdot \mathbf{d} + p\,\mathbf{c}' \cdot \mathbf{d} = q.$$

Nahradíme-li v této rovnici $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ hodnotami (11*b*), vychází

$$m\,\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{(\mathbf{abc})} \cdot \mathbf{d} + n\,\frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{(\mathbf{abc})} \cdot \mathbf{d} + p\,\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{(\mathbf{abc})} \cdot \mathbf{d} = q$$

čili

$$m(\mathbf{bcd}) + n(\mathbf{cad}) + p(\mathbf{abd}) = q(\mathbf{abc}), \tag{13}$$

jako hledaný výsledek eliminace (*V. A.* vzorec (19) na str. 22).

(Dokončení.)

Přibližný výraz pro $+\sqrt{1+x^2}$ v intervalu od 0 do 1.

Dr. **B. Kladivo** v Brně.

Odmocnina $+\sqrt{1+x^2}$ se nahrazuje v intervalu od 0 do 1 výrazem

(I) $[5\sqrt{2} - 4 - 3l(1+\sqrt{2})]\,x + [2 - 2\sqrt{2} + 2l(1+\sqrt{2})]$,

splňujícím požadavek*), aby byl minimální integrál

$$\int_0^1 (+\sqrt{1+x^2} - A_0 x - A_1)^2 dx.$$

---

*) *F. R. Helmert*: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate 2. Aufl. 1907 str. 379.