Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vojtěch Jarník

Mengerova teorie dimensí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 367--374

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124019

Mengerova teorie dimensí.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

(Referát přednesený na schůzi JČMF dne 28. února 1929.)

I. Představa rozměru čili dimense náleží k základním představám, které spojujeme s prostorovými útvary. Každý je hotov říci, že bod je nuldimensionální, přímka, úsečka, kružnice jednodimensionální, čtverec (obvod i vnitřek) dvojdimensionální, krychle trojdimensionální. Existují ovšem množství bodová, u kterých tato naivní představa selhává: uvažujme na př. na ose číselné množství všech racionálních čísel, t. j. množství všech bodů s racionální souřadnicí; naše naivní představa nám nedává žádné odpovědi na otázku, jakou dimensi máme tomuto množství přiřknouti.

Cílem teorie dimensí pak jest nahraditi představu dimense pojmem, t. j. definovati dimensi. Tato definice má pak splňovati tyto podmínky:

1. Každému množství bodovému[1]) jest přiřazeno touto definicí určité celé číslo jakožto dimense tohoto množství.

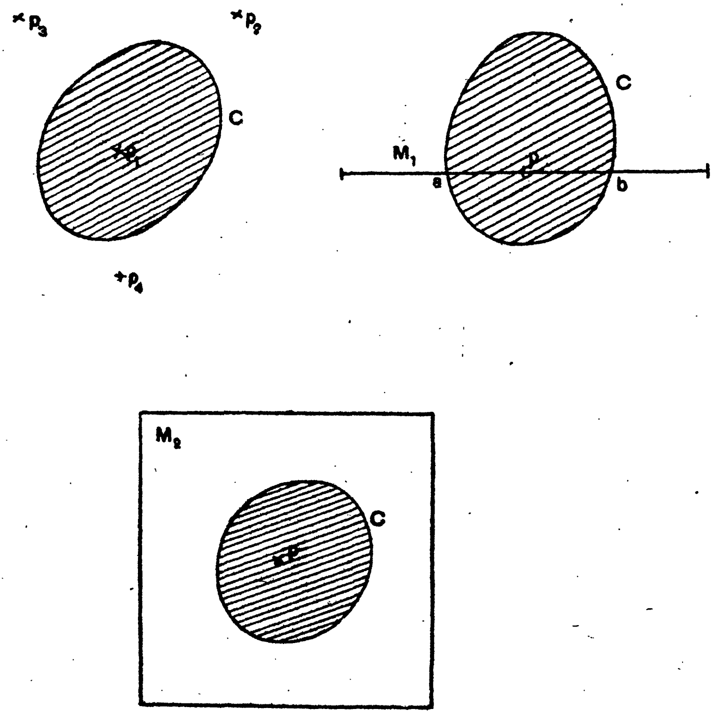
2. Jest možno vybudovati na tomto pojmu jednotnou a obsažnou teorii.

---

[1]) Pro další poznamenávám: Vyjma v § XII rozumím pod množstvím bodovým vždy nějaké množství bodů z t. zv. „m-rozměrného cartézského prostoru“ R_m. Při tom R_m ($m \geqq 1$) jest množství všech systémů $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ probíhají nezávisle na sobě všechna reálná (konečná) čísla. Limita posloupnosti bodové a vzdálenost dvou bodů definují se obvyklým způsobem. Množství bodové nazývám uzavřeným, obsahuje-li všechny své body zhuštění; množství bodové M, jehož komplementární množství (t. j. množství všech bodů z R_m, jež nepatří k M) je uzavřené, nazývám otevřeným. Otevřené množství M lze charakterisovati také touto vlastností: leží-li bod p v množství M, existuje kladné číslo ε (závislé na p) takové, že všechny body z R_m, jež jsou od p vzdáleny o méně než ε, leží v M. Hranicí otevřeného množství M nazývám množství všech bodů zhuštění množství M, jež neleží v M. Okolím bodu p nazýváme libovolné otevřené množství, jež obsahuje bod p. Součtem množství $M_1, M_2, \ldots$ (v konečném nebo nekonečném počtu) nazývám množství všech bodů, jež leží aspoň v jednom z množství $M_1, M_2, \ldots$ (značka $M_1 + M_2 + \ldots$); průřezem množství $M_1, M_2, \ldots$ nazývám množství všech bodů, které jsou společné všem množstvím $M_1, M_2, \ldots$ (značka $M_1 M_2 \ldots$).

3. V jednoduchých případech jest tato definice ve shodě s naší naivní představou (nepřáli bychom si na př. definice, podle které by přímka byla dvojdimensionální).

Teorie dimensí v tomto smyslu jest dílem několika posledních let; vybudovali ji současně a nezávisle na sobě K. Menger a Urysohn; první jejich pojednání v tomto směru pocházejí z r. 1922. Mezi jejich předchůdci jest jmenovati zvláště Brouwera. V tomto článku přidržím se teorie Mengerovy, hlavně jeho knihy Dimensionstheorie (B. G. Teubner, 1928).[2]) Ostatně definice Urysohnova je s definicí Mengerovou ekvivalentní.



Obr. 1.—3.

II. Jak tedy definovati dimensi? K tomu cíli proveďme následující názornou, ovšem nepřesnou úvahu, jež nám ukazuje, jakým asi způsobem můžeme při definici dimense postupovati.

[2]) Četba této Mengerovy knihy nevyžaduje specielních znalostí; postupuje se v ní velmi přehledně a obšírně. Autor uvádí čtenáře také velmi jasně do myšlenkových pochodů, jež k teorii dimensí a k jejím jednotlivým částem vedly. Také literární a historické údaje jsou velmi podrobné a velmi vhodně vkloubeny do celkové koncepce knihy. Vadí pouze několik nedopatření (některá bohužel i na místech dosti obtížných), jež zbytečně stěžují četbu.

Uvažujme v rovině jednak množství M_0 (obr. 1), složené z konečného počtu (na obrazci ze čtyř) bodů p_1, p_2, p_3, p_4; jednak množství M_1 (obr. 2), složené ze všech vnitřních bodů nějaké úsečky; jednak množství M_2 (obr. 3), složené ze všech bodů uvnitř čtverce. Každý je hotov říci, že množství M_0 je nuldimensionální, M_1 jednodimensionální, M_2 dvojdimensionální.

Všimněme si jedné vlastnosti těch tří množství M_0, M_1, M_2. Zvolme libovolný bod z M_0, třeba p_1, a sestrojme dosti malé okolí toho bodu (na obr. 1 je to šrafovaný vnitřek křivky C). Je vidět, že hranice C tohoto okolí nemá společných bodů s množstvím M_0, t. j. průřez M_0C je t. zv. množství prázdné. Množství prázdné budeme ex definitione nazývati (— 1)-dimensionálním.

Zvolme za druhé libovolný bod p z množství M_1 a sestrojme dosti malé okolí tohoto bodu (na obr. 2 je to šrafovaný vnitřek křivky C). Průřez hranice C tohoto okolí s množstvím M_1 není množství prázdné, je to však (v našem jednoduchém případě) množství, složené právě ze dvou bodů a, b, tedy množství, jež bychom byli ochotni prohlásiti za nuldimensionální.

Zvolme konečně za třetí libovolný bod p z M_2 a sestrojme dosti malé okolí tohoto bodu (na obr. 3 je to šrafovaný vnitřek křivky C); hranice C tohoto okolí leží celá v M_2; průřez M_2C je tedy v tomto jednoduchém případě křivka C, t. j. množství, jež jsme hotovi prohlásiti za jednodimensionální.

Máme zde tedy tyto vztahy:

M_0 je 0-dimensionální, M_0C je (— 1)-dimensionální.
M_1 je 1-dimensionální, M_1C je 0-dimensionální.
M_2 j 2-dimensionální, M_2C je 1-dimensionální.

Tato úvaha je ovšem zcela nepřesná — už z toho důvodu, že se v ní mluví o dimensi dříve, než jsme ji definovali — ukazuje nám však cestu, jak je možno dimensi definovati.

Dříve, než k této definici přistoupíme, všimněme si ještě následujícího: Představme si třeba dřevěnou kouli K; k této kouli budiž podél nějaké křivky připojena plechová deska D a v nějakém bodě budiž k té kouli připevněn ještě drát S. Množství, složené ze všech bodů množství K, D a S (tedy množství $K + D + S$), bychom rozhodně prohlásili za 3-dimensionální; ale všimli bychom si zajisté, že se toto množství nechová všude stejně: pouze v bodech koule K se chová jako 3-dimensionální, v bodech desky D jako 2-dimensionální, v bodech drátu S jako 1-dimensionální. Bude tedy asi vhodno, vedle definice pro „dimensi množství M“ zavésti ještě definici pro „dimensi množství M v bodě p“. Až budeme míti definovánu dimensi množství M v bodě p, zavedeme si dimensi množství M touto definicí:

A. *Množství M nazveme n-dimensionálním, jestliže množství M je v každém svém bodě nejvýše n-dimensionální a aspoň v jednom svém bodě právě n-dimensionální.*

III. Přistupme nyní k definici „dimense množství M v bodě p". Budiž R_m t. zv. „m-rozměrný cartézský prostor" (viz poznámku [1]) pod čarou; že je tento prostor skutečně m-dimensionální ve smyslu následující definice, uvidíme v § X); budiž M množství bodové, složené z bodů prostoru R_m; budiž p libovolný bod z množství M. Definujeme (v souhlase s úvahou v § II):

B. *Množství M jest v bodě p* nejvýše n-dimensionální (*n celé, $n \geq 0$*), *jestliže existují libovolně malá okolí bodu p, jejichž hranice mají s množstvím M průřez nejvýše* (n — 1)-*dimensionální.*[3])

C. *Jestliže jest M v bodě p nejvýše n-dimensionální, ale nikoliv nejvýše* (n — 1)-*dimensionální* (t. j. jestliže n jest nejmenší číslo, odpovídající definici (B)), *říkáme, že množství M je* n-dimensionální *v bodě p.*

K tomu ještě dodatek:

D. *Množství prázdné a jen toto množství nazývám* (—1)-*dimensionálním.*

Pomocí (D) jest tedy definováno množství (— 1)-dimensionální; pomocí (B) a (C) jest pak definováno, co znamená „množství 0-dimensionální v bodě p"; pomocí (A) je pak definován pojem „množství 0-dimensionální"; pomocí (B) a (C) je pak definován pojem „množství 1-dimensionální v bodě p", pomocí (A) pak pojem „množství 1-dimensionální" atd. Ježto, jak snadno se dokáže, je každé množství bodové v R_m nejvýše m-dimensionální, jest definicemi (A), (B), (C), (D) každému množství v R_m přiřazeno určité celé číslo (nejméně — 1, nejvýše m) jakožto jeho dimense. Rovněž snadno se dokáže, že dimense části není větší než dimense celku.

IV. Diskutujme jako příklad prostor R_1, t. j. množství všech bodů na ose reálných čísel. Uvažujme nějaké množství M, složené z bodů prostoru R_1 (M nechť není množství prázdné). Jsou pak možny dva případy:

1. *Množství M neobsahuje žádného intervalu na ose číselné.* Potom, je-li p libovolný bod z M, existují v libovolné blízkosti bodu p dva body r, s, z nichž žádný nepatří k množství M a pro které platí $r < p < s$. Otevřený interval (r, s), libovolně malý, jest okolím bodu p; jeho hranice tvoří právě body r, s; tedy jest průřez této hranice s množstvím M prázdný čili (— 1)-dimensionální; tedy podle (B) a (C) je množství M v bodě p nuldimensionální. Podle (A) *jest tedy množství M nuldimensionální.*[4])

2. *Množství M obsahuje všechny body nějakého uzavřeného intervalu* $< a, b >$.

[3]) T. j. jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézti okolí bodu p, jehož všechny body jsou od p vzdáleny o méně než ε a jehož hranice má s množstvím M průřez nejvýše (n — 1) - dimensionální.

[4]) Specielně je tedy každé bodové množství na R_1, složené z konečného počtu bodů, 0 - dimensionální.

Především jest M nejvýše 1-dimensionální: neboť ke každému bodu p množství M existují libovolně malé otevřené intervaly (c, d), kde $c < p < d$; hranice intervalu (c, d) je právě dvojice bodů c, d; její průřez s množstvím M skládá se tedy nejvýše ze dvou bodů a je tedy (podle poznámky [4]) pod čarou) nejvýše 0-dimensionální.

Za druhé budiž p nějaký vnitřní bod intervalu $< a, b >$; každé okolí P tohoto bodu, jež leží celé v otevřeném intervalu (a, b) (t. j. každé „dosti malé" okolí bodu p), má všechny body své hranice v uzavřeném intervalu $< a, b >$. Mimo to obsahuje hranice C množství P aspoň jeden bod; na př. t. zv. dolní hranice množství P patří k C. Průřez CM není tedy prázdný: neexistují tedy libovolně malá okolí bodu p, jejichž hranice by měla s množstvím M průřez prázdný čili (— 1)-dimensionální; t. j. množství M jest v bodě p nejméně 1-dimensionální.

Tedy jest v případě 2. množství M jednodimensionální.

Dimense množství bodových na R_1 tedy úplně ovládáme. Vlastní (a to velmi značné a podstatné) obtíže teorie dimensí v prostorech R_m vystupují teprve pro $m \geqq 2$.

V. Na definici dimense jest možno vybudovati rozsáhlou teorii; naznačím aspoň stručně (leckde jen na speciálních případech) hlavní směry této teorie a její výsledky. Především nás naše původní naivní představa vede přirozeně k otázce: jest součet konečného počtu n-dimensionálních množství opět n-dimensionální? Odpověď podává tato věta:

Jestliže $M_1, M_2, \ldots$ jest konečné nebo spočetné množství bodových množství prostoru R_m a jestliže všechna množství $M_1, M_2, \ldots$ jsou uzavřená a nejvýše n-dimensionální, potom i součet $M_1 + M_2 + \ldots$ jest nejvýše n-dimensionální.

Otázka je tedy zodpověděna kladně, pokud jde o množství uzavřená. Věta platí ostatně též tehdy, jsou-li některá (nebo všechna) z množství $M_1, M_2, \ldots$ otevřená a ostatní uzavřená. Pro zcela libovolná množství $M_1, M_2, \ldots$ však tato věta neplatí, jak je patrno z tohoto příkladu: množství všech racionálních čísel i množství všech iracionálních čísel jsou podle § IV, 1. dvě množství nuldimensionální, jejich součet jest však R_1, t. j. (podle § IV, 2.) množství jednodimensionální. Tento příklad jest speciálním případem následující věty:

Každé n-dimensionální množství lze vyjádřiti jako součet množství nuldimensionálních v počtu $n + 1$.

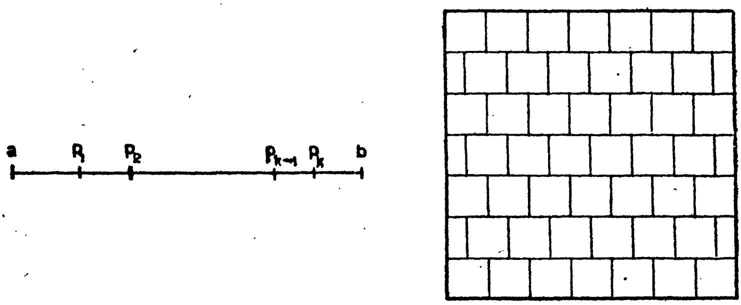
A též naopak platí:

Součet $(n + 1)$ množství 0-dimensionálních je nejvýše n-dimensionální.

VI. K další otázce vede nás množství, uvažované na konci § II: množství, složené z bodů koule K, desky D a drátu S. Co se stane, když vynechám ty body, jež jaksi porušují trojdimensiálnost toho množství („trojdimensionálnost" pouze ve smyslu naší naivní představy; že je množství $K + D + S$ 3-dimensionální ve smyslu naší definice, poznáme v § X), t. j. když odstraním desku D a drát S? Obecně formulováno: Budiž M množství n-dimensionální; M^n budiž množství oněch bodů z M, v nichž je M právě n-dimensionální (M^n vznikne tedy z M odstraněním oněch bodů, v nichž má M nižší dimensi než n). Jak vypadá M^n? Platí věta:

Je-li M množství n-dimensionální a uzavřené nebo otevřené, jest množství M^n také n-dimensionální a to v každém *svém bodě právě n-dimensionální.*

Tato věta odpovídá plně tomu, co z názoru očekáváme. Pro docela obecná množství však neplatí: existují na př. 1-dimensionální množství M, pro která množství M^1 je nuldimensionální.



Obr. 4. a 5.

Obecně platí: *Je-li M množství n-dimensionální, je M^n buď n-dimensionální nebo $(n-1)$-dimensionální.*

VII. Libovolnou úsečku $\overline{ab}$ (koncové body v to počítaje) lze rozděliti na konečný počet libovolně malých úseček $\overline{ap_1}$, $\overline{p_1p_2}$, ..., $\overline{p_{k-1}p_k}$, $\overline{p_kb}$ (obr. 4) tak, že dvě sousední úsečky mají právě jeden koncový bod společný; kterékoliv tři z těchto úseček mají průřez prázdný. Obdobně je možno (obr. 5) rozděliti čtverec na konečný počet libovolně malých obdélníků tak, že průřez libovolných čtyř z těchto obdélníků je množství prázdné. Tato jednoduchá fakta jsou opět zvláštním případem obecné věty:

Každé uzavřené ohraničené n-dimensionální množství M lze vyjádřiti jako součet konečného počtu libovolně malých uzavřených množství $M_1, M_2, \ldots, M_k$ tak, že libovolná $n + 2$ z těchto množství mají průřez prázdný.

Platí též naopak:

Lze-li uzavřené ohraničené množství M vyjádřiti jako součet konečného počtu libovolně malých uzavřených množství tak, že libo-

volná $n+2$ z nich mají prázdný průřez, je M nejvýše n-dimensionální.

Obě tyto věty platí nejen pro uzavřená ohraničená množství M, nýbrž pro zcela libovolná n-dimensionální množství; pouze je třeba vhodně pozměniti smysl slov „libovolně malá uzavřená množství“.

VIII. Pojem dimense má vztah ještě k jinému pojmu, úzce souvisejícímu s názorem, k pojmu *souvislosti* (Zusammenhang). Říkáme, že úsečka je souvislá, čtverec je souvislý, mezikruží je souvislé, krychle je souvislá; naopak množství, složené ze dvou úseček, jež nemají společných (ani koncových) bodů, není souvislé; množství, složené ze všech bodů čtverce a z jednoho bodu vně toho čtverce, není také souvislé. Vidíme však, že tyto „souvislosti“ jsou různého druhu: úsečku mohu učiniti nesouvislou tím, že ji přeštípnu v jediném bodě; chci-li čtverec učiniti nesouvislým, musím jej (zhruba řečeno) rozstřihnouti podle nějaké křivky; krychli musím rozseknouti podle nějaké plochy atd. Říkáme proto, že úsečka je souvislá v 1. stupni, čtverec v 2. stupni, krychle v 3. stupni atd. Přesné definice tohoto pojmu zde nepodávám. A tato „souvislost“ je pro uzavřená a otevřená množství (ne však pro libovolná množství) v úzkém vztahu k dimensi; platí totiž:

Každé n-dimensionální uzavřené nebo otevřené množství obsahuje částečné množství uzavřené a ohraničené, souvislé v n-tém stupni; neobsahuje však částečného množství, souvislého v $(n+1)$-vém stupni.

IX. Jak se chová dimense vůči spojitým zobrazením? Zde platí, zcela ve shodě s názorem, věta:

Zobrazím-li množství M vzájemně jednoznačně a vzájemně spojitě na jiné množství M', je dimense množství M' rovna dimensi množství M.

Pro zobrazení, jež jsou jednoznačná a spojitá, nikoliv však *vzájemně* jednoznačná a spojitá, podobná věta neplatí; příklady: 1-dimensionální úsečku lze zobraziti jednoznačně a spojitě na nuldimensionální bod; 1-dimensionální úsečku lze zobraziti (pomocí t. zv. Peanovy křivky) jednoznačně a spojitě na čtverec, jenž podle § X je dvojdimensionální.

X. Otázka, zda pro jednoduché případy je naše definice ve shodě s názorem, zvláště zda prostor R_m je skutečně m-dimensionální, je zodpověděna kladně těmito větami:

Prostor R_m je m-dimensionální.

Každé množství bodové v prostoru R_m, jež obsahuje sebemenší kouli,[5]) *je m-dimensionální, ostatní množství v R_m jsou nejvýše $(m-1)$-dimensionální.*

Ve spojení s § V a § IX zajišťují tyto věty, že v jednoduchých případech (úsečka, čtverec, krychle, jejich vzájemně jednoznačné

[5]) Pod koulí v R_m o poloměru r rozumím množství všech bodů v R_m, jež mají od pevného bodu vzdálenost $\leq r$.

a vzájemně spojité obrazy, součty konečného počtu takových množství a pod.) je naše definice ve shodě s názorem.

XI. Mějme nyní na př. 2-dimensionální množství M v prostoru R_7. Vzniká otázka, není-li možno zobraziti M vzájemně jednoznačně a vzájemně spojitě na množství nějakého prostoru R_m, kde $m < 7$; to je skutečně možno pro $m = 5$. Obecně:

Každé n-dimensionální množství M lze vzájemně jednoznačně a vzájemně spojitě zobraziti na nějaké množství M', ležící v prostoru R_{2n+1}.

XII. Dosud jsme se zabývali teorií dimensí pouze pro množství, ležící v prostoru R_m. Teorii dimensí lze však založiti obecněji. Máme-li množství nějakých prvků R, v němž je jistým vhodným způsobem definován pojem limity, je možno v takovém „prostoru" R definovati — podobně jako v poznámce [1]) pod čarou — množství uzavřená, otevřená, hranice množství otevřených, okolí a aplikovati potom beze změny definici dimense (A), (B), (C), (D).

Celá tato zobecněná teorie dimensí probíhá obdobně jako teorie dimensí v R_m, vyložená v §§ V—IX. Mohou ovšem nyní existovati množství, kterým není definicí přiřazeno žádné celé číslo jakožto jejich dimense; o takových množstvích říkáme, že mají dimensi rovnou nekonečnu. Zdánlivě je tato teorie podstatně obecnější, než teorie dimensí v R_m. Ve skutečnosti tomu však tak není, aspoň pro množství, jež mají konečnou dimensi. Platí totiž:

Každé n-dimensionální množství M (n konečné) *dá se vzájemně jednoznačně a vzájemně spojitě zobraziti na množství M' nějakého prostoru R_m* (ježto podle § IX je také M' n-dimensionální, lze podle § XI voliti dokonce $m = 2n + 1$).