Milan Mikan

Polární vlastnosti systému kuželoseček určeného třemi body a tečnou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 3, 254--265

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124059

Polární vlastnosti systému kuželoseček určeného třemi body a tečnou.[1])

Napsal *Milan Mikan,* asistent české techniky.

1. K systému kuželoseček určenému třemi body a tečnou přicházíme při řešení úlohy: Sestrojiti kuželosečku pólovou, příslušnou k nějaké přímce vůči danému svazku kuželoseček.

Předpokládejme, že jsou dány dvě kuželosečky H_1, H_2 nějakého svazku $\Sigma \equiv (H_1, H_2)$, protínající se ve čtyřech bodech $m\,n\,p\,q$ jakožto základních bodech tohoto svazku. Geometrickým místem pólů harmonicky sdružených ke všem bodům obecně položené přímky P vůči kuželosečkám svazku Σ je kuželosečka L (Steinerova), která je zároveň geometrickým místem pólů přímky P vůči všem kuželosečkám svazku Σ, čili pólovou kuželosečkou přímky P.

Kuželosečka tato prochází těmito body (obr. 1.):

1. Vrcholy $x\,y\,z$ společného polárního trojúhelníka kuželoseček $H_1\,H_2$ (v obrazci 1. nenarýsovaných).

2. Samodružnými body ξ, η involuční řady $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\gamma_1\,\gamma_2$, vyťaté kuželosečkami svazku Σ na přímce P.

3. Body α, β, γ, α', β', γ', vyhovujícími podmínkám $(mp\alpha_1\alpha) = -1$, $(nq\alpha_2\alpha') = -1$ atd. jakožto sdruženými póly k bodům $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$; $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ na stranách úplného čtyrrohu $mnpq$.

Samodružné body ξ, η involuce na P jsou póly přímky P vůči oněm dvěma kuželosečkám svazku, které se v nich přímky P dotýkají.

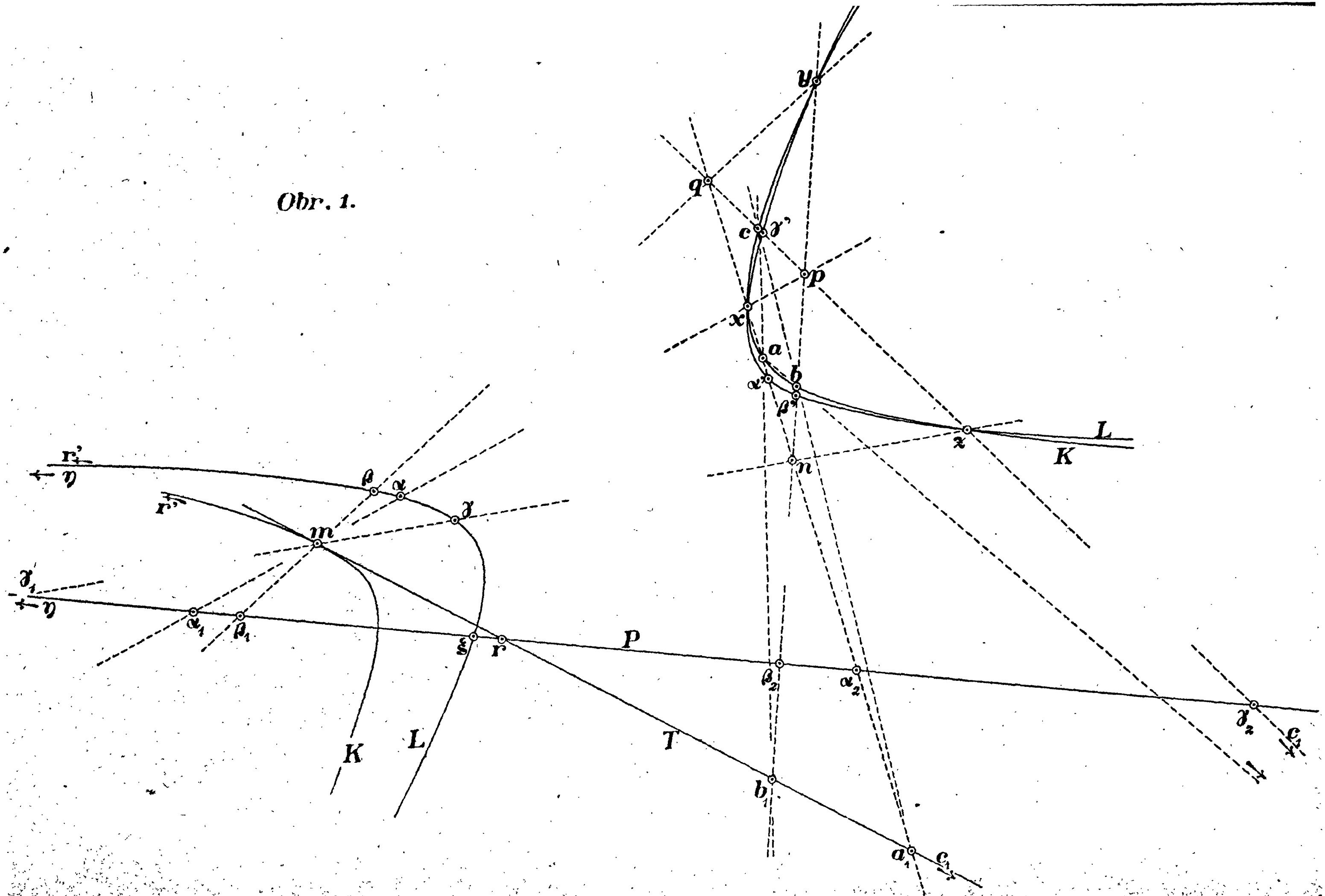
Předpokládejme, že se přímka P otáčí kolem svého bodu r.

Pak procházejí kuželosečky L příslušné jednotlivým jejím polohám stále body $x\,y\,z$, jakož i bodem r', který je sdruženým pólem k bodu r vůči svazku Σ; tvoří tudíž tyto pólové kuželosečky svazek o základních bodech $x\,y\,z\,r'$. Mění se ovšem body α, β, γ, α', β', γ', posouvajíce se po přímkách $m\,p, \ldots$ atd., jakož i body ξ, η. Přijde-li P do polohy $T \equiv rm$, procházejíc tak jedním ze základních bodů svazku Σ, nastane totožnost

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv \alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv \gamma_1 \equiv m \equiv \xi \equiv \eta,$$

pólová kuželosečka L přichází do polohy K, dotýkajíc se v bodě m

[1]) Některé speciální případy polárních a pólových útvarů pro tento systém a pro systém duální řeší prof. Josef Tesař ve článku: »Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschar S (3 l, 1 p) mit einem imaginären Tangentenpaar.« (Svazek LXXXIV. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. II. Abt. Juniheft 1881.)



Obr. 1.

přímky T. Z toho je tedy zřejmo, že pólová kuželosečka K přímky T, procházející jedním ze základních bodů m svazku Σ, dotýká se v tomto bodě přímky T.

Při tom body $\alpha' \beta' \gamma'$ přecházejí v body $a\, b\, c$ a označíme-li $(\overline{nq} . T) \equiv a_1$, $(\overline{np} . T) \equiv b_1$, $(\overline{pq} . T) \equiv c_1$, jsou body $a\, b\, c$ určeny podmínkami:

$$(n\, q\, a\, a_1) = -1, \quad (n\, p\, b\, b_1) = -1, \quad (p\, q\, c\, c_1) = -1.$$

Těmito body $a\, b\, c$ také prochází kuželosečka K.

2. Předpokládejme, že základní body $n\, p\, q$ jsou v poloze stálé, bod m však se posouvá po přímce T. Každé poloze ${}^1m$, ${}^2m$, ${}^3m$... bodu m přísluší jiný svazek ${}^1\Sigma$, ${}^2\Sigma$, ${}^3\Sigma$... o základních bodech ${}^1m\, n\, p\, q$, ${}^2m\, n\, p\, q$, ${}^3m\, n\, p\, q$,... a jiná pólová kuželosečka ${}^1K$, ${}^2K$, ${}^3K$,.., dotýkající se přímky T v bodech ${}^1m$, ${}^2m$, ${}^3m$... a procházející vždy týmiž body a, b, c, jelikož jsou to harmonické body vůči stálým bodům $n\, q\, a_1$, $n\, p\, b_1$, $p\, q\, c_1$. Z toho je zřejmo, že kuželosečky ${}^1K\, {}^2K\, {}^3K$... tvoří systém kuželoseček, procházejících třemi body $a\, b\, c$ a dotýkajících se přímky T, tudíž systém $S \mathbb{Z} (a\, b\, c\, T)$, s jehož polárními vlastnostmi se chceme zabývati.

Zároveň z obrazce 1. je zřejmo, že body $a\, b\, c$ a přímka T co do vzájemné polohy jsou úplně nezávislé a systém $S \mathbb{Z} (a\, b\, c\, T)$, k němuž jsme takto dospěli, úplně obecný, neboť možno naopak z těchto na sobě nezávislých prvků $a\, b\, c\, T$ sestrojiti příslušné body $n\, p\, q$, jak v obrazci 2. provedeme.

Označme průsečíky $(\overline{ab} . T) \equiv c_1$, $(\overline{bc} . T) \equiv a_1$, $(\overline{ac} . T) \equiv b_1$ a průsečíky $(\overline{bb_1} . \overline{cc_1}) \equiv p$, $(\overline{bb_1} . \overline{aa_1}) \equiv n$, $(\overline{aa_1} . \overline{cc_1}) \equiv q$.

Z úplného čtyřúhelníka $a\, c\, a_1\, c_1$ vyplývá, že dvojpoměr $(b\, b_1\, n\, p) = -1$ jakož i $(c\, c_1\, p\, q) = -1$, $(a\, a_1\, n\, q) = -1$. Jsou tudíž body $a_1\, b_1\, c_1\, n\, p\, q$ v obrazci 2. totožny s oněmi stejně označenými body v obrazci 1., od nichž jsme prve vyšli.

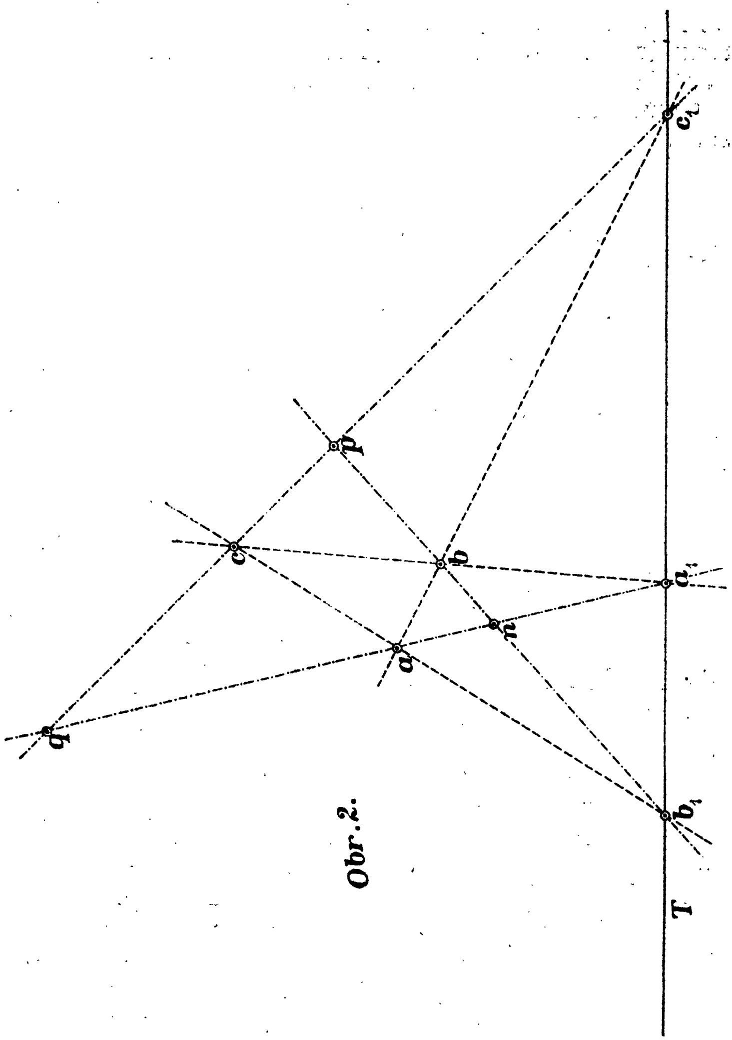
Procházejí tudíž v obrazci 1. spojnice:

$$\overline{a\,b},\ \overline{a\,c},\ \overline{b\,c} \text{ body } c_1 \text{ resp. } b_1,\ a_1.$$

Buďtež nyní dány body $a\, b\, c$ a tečna T ve zcela obecné poloze vzájemné, sestrojme příslušné body $n\, p\, q$ a zvolme na přímce T bod ${}^1m$ jakožto jednu polohu bodu m. Příslušná kuželosečka ${}^1K$, jakožto pólová kuželosečka přímky T vůči svazku ${}^1\Sigma \mathbb{Z} ({}^1m\, n\, p\, q)$ prochází vrcholy ${}^1x\, {}^1y\, {}^1z$ společného polárního trojúhelníka tohoto svazku, kteréž jsou, jak z obrazu 1. zřejmo, dalšími průsečíky kuželosečky ${}^1K$ se stranami trojúhelníka $n\, p\, q$. Pošinuje-li se bod m po přímce T z polohy ${}^1m$ do poloh ${}^2m$, ${}^3m$,... přechází $\Delta\, {}^1x\, {}^1y\, {}^1z$ do poloh $\Delta\, {}^2x\, {}^2y\, {}^2z$, $\Delta\, {}^3x\, {}^3y\, {}^3z$... vepsaných kuželosečkám ${}^2K$, ${}^3K$..., při čemž body ${}^2x$, ${}^3x$,... ${}^2y$, ${}^3y$,... ${}^2z$, ${}^3z$,... se pošinují po přímkách $\overline{n\,q}$, $\overline{n\,p}$, $\overline{p\,q}$ a spojnice $\overline{m\,z}$, $\overline{m\,y}$, $\overline{m\,z}$ se otáčejí kol bodů p, q, n.

Vzniknou tudíž podle středů p, q, n perspektivní řady:

$$({}^1m\,{}^2m\,{}^3m\ldots) \overset{(p)}{\overline{\wedge}} ({}^1x\,{}^2x\,{}^3x\ldots) \overline{\wedge} ({}^1y\,{}^2y\,{}^3y\ldots) \overline{\wedge} ({}^1z\,{}^2z\,{}^3z\ldots).$$

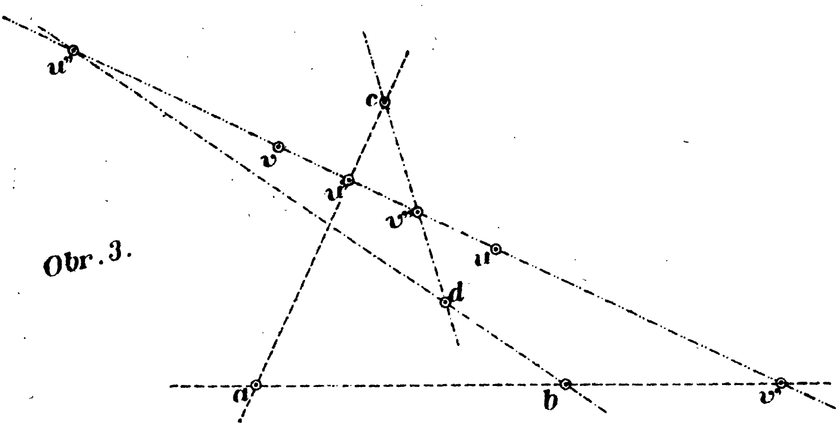


Obr. 2.

Kuželosečky ${}^1K, {}^2K, {}^3K\ldots$ systému $(a\,b\,c\,T)$ protínají spojnice každého ze tří základních bodů a, b, c systému s průsečíkem spojnice druhých dvou s tečnou základní T v řadách projektivních $({}^1x\,{}^2x\,{}^3x\ldots) \overline{\wedge} ({}^1y\,{}^2y\,{}^3y\ldots) \overline{\wedge} ({}^1z\,{}^2z\,{}^3z\ldots)$ s řadou bodů dotyčných $({}^1m\,{}^2m\,{}^3m\ldots)$ na tečně T, kteréhožto vztahu později bude použito.

Systém $(abcT)$ obsahuje tři kuželosečky degenerované. Jednou jest přímková družina $(\overline{ab.pq})$, obsahující body a, b, c a »dotýkající se« T ve svém dvojném bodě $c_1 \equiv (T.pq)$. Dalšími jsou družiny: $(\overline{bc.nq})$ a $(\overline{ac.np})$.[2])

3. Abychom mohli přistoupiti ke stanovení polárních vlastností systému $(abcT)$, přihlédněme ještě ke svazku kuželoseček, určenému základními body abc a dvěma body u, v, polárně sdruženými vůči tomuto svazku, a sestrojme čtvrtý základní bod d tohoto svazku (obr. 3.).



Obr. 3.

Ježto body uv jsou samodružnými body involuční řady vyťaté svazkem $(abcd)$ na přímce uv, sestrojíme ke zvrhlé kuželosečce

---

[2]) Projektivita řad $({}^1m\,{}^2m\,{}^3m\ldots) \bar{\wedge} ({}^1x\,{}^2x\,{}^3x\ldots) \wedge ({}^1y\,{}^2y\,{}^3y\ldots) \bar{\wedge}$ $\wedge ({}^1z\,{}^2z\,{}^3z\ldots)$ vyplývá i z této úvahy: Poláry kteréhokoliv z bodů $a_1 b_1 c_1$ vůči kuželosečkám ${}^1K, {}^2K, {}^3K\ldots$, procházející body a_2, b_2, c_2 danými relacemi $(bca_1a_2) = -1$, $(acb_1b_2) = -1$, $(abc_1c_2) = -1$ a procházejíce body ${}^1m\,{}^2m\,{}^3m\ldots$, tvoří svazky o středech $a_2b_2c_2$ perspektivní s řadou $m\,{}^2m\,{}^3m\ldots$ a protínají pq, nq, pn v řadách $\bar{\wedge}$ s řadou $({}^1m\,{}^2m\,{}^3m\ldots)$. I je zřejmo, že i řady průsečíků $({}^1x\,{}^2x\,{}^3x\ldots)$, $({}^1y\,{}^2y\,{}^3y\ldots)$, $({}^1z\,{}^2z\,{}^3z\ldots)$ jsou s řadou $({}^1m\,{}^2m\,{}^3m\ldots)$ projektivní. (V textu dokázána perspektivnost podle středů pqn). Jinak to vyplývá též z okolnosti, že příbuznost útvarů $xyzm$ a K je jedno-jednoznačná, vylučujeme-li pro okamžik degenerované kuželosečky (aa_1pq) atd. ze systému. Systém $(abcT)$ obsahuje dále dvě hyperboly rovnoosé jakožto ony dvě kuželosečky dotýkající se přímky T, jež náležejí svazku $abcd$, je-li tentokráte d průsečíkem výšek $\triangle abc$. Aby hyperboly tyto byly reálné v případě, že $\triangle abc$ je ostroúhlý, je nutno, aby jeden jeho vrchol byl tečnou T oddělen od dvou ostatních. Konečně obsahuje uvažovaný systém čtyři paraboly, jakožto kuželosečky, dané prvky $abcTU_\infty$, je-li U_∞ úběžná přímka roviny. Aby paraboly byly reálné, je třeba, aby body abc ležely při téže straně tečny T.

svazku, obsahující přímku $\overline{a\,c}$, příslušnou $\overline{b\,u''}$, protínající $\overline{u\,v}$ v bodě u'', který je harmonicky sdružen s bodem $u' \equiv (\overline{a\,c} \,.\, \overline{u\,v})$ vůči bodům u, v. $\overline{b\,u''}$ je druhou přímkou zvrhlé kuželosečky $(\overline{a\,c}, \overline{b\,u''})$. Podobně sestrojme k bodu $v' \equiv (\overline{a\,b} \,.\, \overline{u\,v})$ bod v tak, aby $(u\,v\,v'\,v'') = -1$, načež přímky $\overline{b\,u}$ a $\overline{c\,v''}$ se protnou v hledaném čtvrtém základním bodě d svazku $(a\,b\,c\,d)$.

V tomto svazku existují obecně dvě kuželosečky, dotýkající se tečny T, to jest, ve svazku $(a\,b\,c,\ v\,u)$ obsaženy jsou dvě a jen dvě kuželosečky ^1K, ^2K systému $S \mathbb{Z} (a\,b\,c\,T)$. Každá z těchto kuželoseček má, poněvadž u, v jsou její sdružené póly, tu vlastnost, že její polára ^1U resp. ^2U bodu u prochází bodem v. Vzhledem k tomu, že body $u\,v$ jsou obecně voleny, procházejí každým bodem v dvě (t. j. $^1U, {}^2U$) $z_\infty{}^1$ polár libovolného bodu u vůči soustavě $S \mathbb{Z} (a\,b\,c\,T)$, t. j.

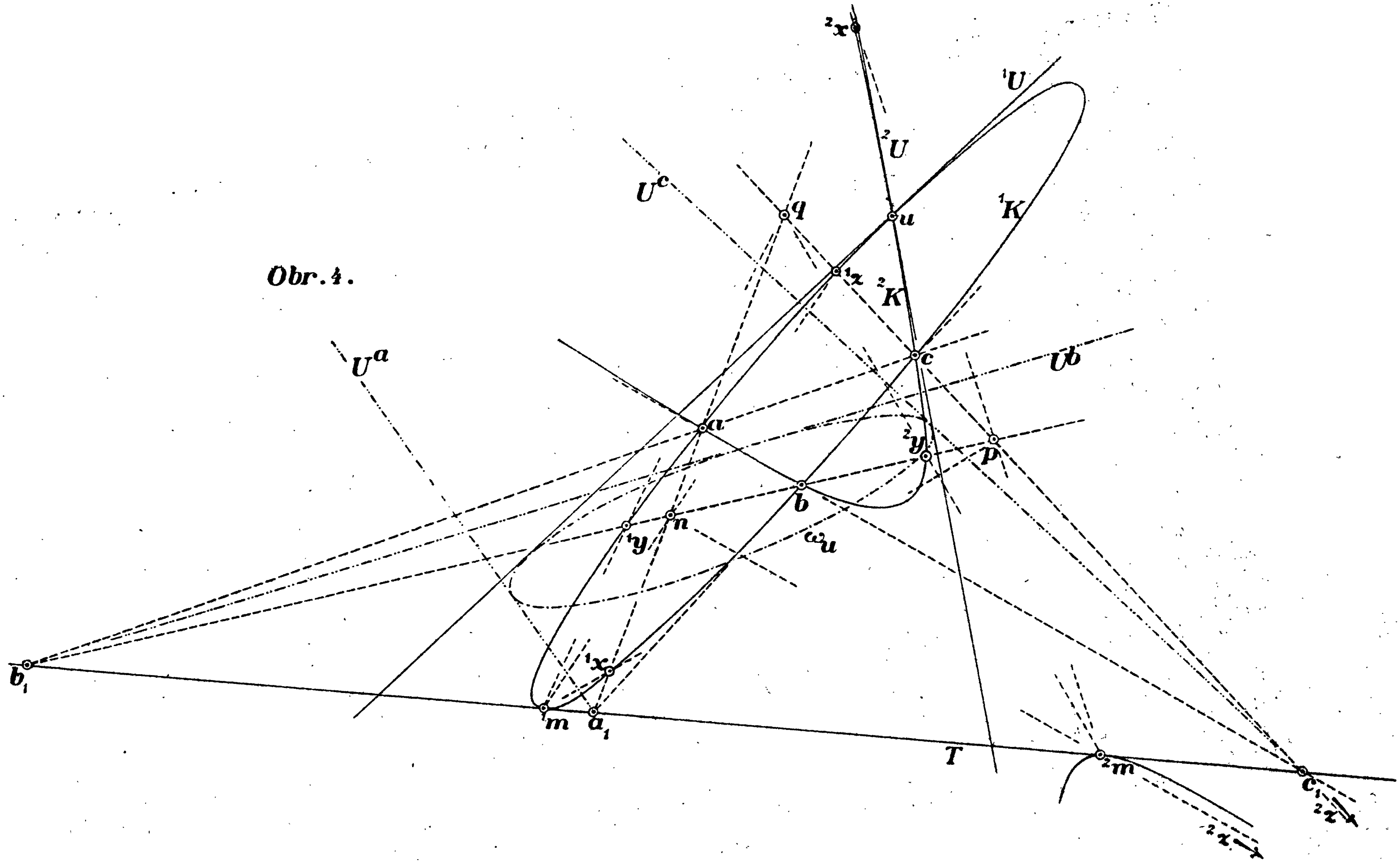
obalová křivka polár libovolného bodu u je obecně křivka druhé třídy, t. j. kuželosečka (polární) ω_u (obr. 4.)[3])

Každá tečna U polární kuželosečky ω_u bodu u jakožto polára bodu u určuje s prvky $a\,b\,c\,T$ jednu a jen jednu kuželosečku systému S. Leží-li však jeden z bodů u, v, na př. bod u, na některé ze stran trojúhelníka $a\,b\,c$, na př. $\overline{a\,c}$, tu $u \equiv u' \equiv u''$ (obr. 3.) a poněvadž bod a leží na spojnici $\overline{b\,u''} \equiv \overline{b\,u}$, je tentokráte u vrcholem společného Δ polárního svazku $a\,b\,c\,d$ a polára jeho V táž pro všecky kuželosečky tohoto svazku, procházejíc bodem v a bodem s na $\overline{a\,c}$ tak, že $(a\,c\,u\,s) = -1$ (a arciť také bodem s_1 na $\overline{b\,d}$, je-li $(b\,c\,d\,s_1) = -1$). Obě kuželosečky tohoto svazku $a\,b\,c\,d$, dotýkající se přímky T, mají tedy tutéž poláru U bodu u a bodem v prochází tentokráte jediná přímka V, což platí pro každý další bod v a jemu příslušnou dvojici kuželoseček systému S. Kuželosečka polární přechází tentokráte ve střed s svazku paprskového a každý paprsek U tohoto svazku přísluší tentokráte d v ě m a kuželosečkám jakožto polára bodu u. Body u, s jsou odděleny příslušnými dvěma body základními harmonicky.

Konstrukce polární kuželosečky ω_u o b e c n é h o bodu u:

Sestrojme poláry $U^a\,U^b\,U^c$ bodu u vůči třem degenerovaným kuželosečkám systému jakožto tečny polární kuželosečky na základě vztahů: $(\overline{bc}\;\overline{aa_1}\;\overline{ua_1}\;U^a) = -1$, $(\overline{ac}\;\overline{bb_1}\;\overline{ub_1}\;U^b) = -1$, $(\overline{ab}\;\overline{cc_1}$

[3]) To ostatně vyplývá z obecnější věty, že r-té poláry systému rovinných křivek n-tého stupně, indexu N, tvoří systém křivek $(n-r)$-tého stupně, téhož indexu (Dr. Gustav A. V. Peschka: Darstellende und projective Geometrie 2. díl, § 110., věta 111.), nebo přímo z věty, že přímé poláry bodu vzhledem k témuž základnímu systému obalují obecně křivku N-té třídy (tamtéž, věta 112.). Dosadíme-li $n = 2$, $r = 1$, $n - r = 1$, $N = 2$ shledáváme, že index systému polár bodu u je 2, tedy obálka jejich kuželosečkou



Obr. 4.

$u c_1 U^c) = -1$ a sestrojme dále poláry ${}^1U\,{}^2U$ vůči oněm dvěma kuželosečkám ${}^1K\,{}^2K$, které procházejí bodem u jakožto jejich tečny v bodě u. Kuželosečka ω_u je určena pěti tečnami: $U^a U^b U^c\,{}^1U\,{}^2U$.[4])

Leží-li bod u na základní tečně T, procházejí jeho poláry ${}^1U, {}^2U$ vůči křivkám ${}^1K, {}^2K$ jejich dotyčnými body ${}^1m, {}^2m$ s tečnou T a obalují kuželosečku ω_u, jejíž tečnou je také přímka T v bodě ${}^n m \equiv u$ jakožto polára vůči oné kuželosečce ${}^nK$, která prochází bodem u (obr. 5.).[5])

Leží-li bod u_i na některé ze spojnic $\overline{pq}, \overline{qn}, \overline{np}$, na př. bod u_2 na spojnici $\overline{np}$ a označíme-li průsečíky této spojnice s jeho polárami ${}^1U_2, {}^2U_2 \ldots$ vůči kuželosečkám ${}^1K\,{}^2K \ldots {}^1u'_2\,{}^2u'_2 \ldots$[6]) a jednotlivé polohy průsečíků spojnice $\overline{np}$ s kuželosečkami systému ${}^1y$, ${}^2y, \ldots$, kdežto bod b je jejich stálým společným průsečíkem, tu platí: $(b\,{}^1y\,u_2\,{}^1u'_2) = -1$, $(b\,{}^2y\,u_2\,{}^2u'_2) = -1 \ldots$, z čehož plyne: $({}^1u'_2\,{}^2u'_2 \ldots) \overline{\wedge} ({}^1y\,{}^2y \ldots) \overline{\wedge} ({}^1m\,{}^2m \ldots)$.

Poláry ${}^1U_2\,{}^2U_2$ obalují polární kuželosečku ω_{u_2} bodu u_2.

Degeneruje-li kuželosečka ${}^iK$ ve dvojici přímek $\overline{ac}, \overline{pbnb_1}$, prochází tato degenerovaná kuželosečka bodem u_2 a polára U_2 je v tomto případě $\equiv \overline{pn}$ a též tečnou ω_{u_2}.

Poněvadž dotyčný bod zvrhlé kuželosečky ${}^iK$ s tečnou T je nahražen jejím dvojným bodem b_1, jest ${}^iy \equiv b_1$ a příslušný bod u'_2 jakožto dotyčný bod přímky np s kuželosečkou ω_{u_2} je určen relací $(b\,b_1\,u_2\,u'_2) = -1$.

Na tečně $\left\{\begin{matrix} T \\ \hline np \end{matrix}\right\}$ kuželosečky $\left\{\begin{matrix} \omega_u \\ \hline \omega^u{}_2 \end{matrix}\right\}$ vytínají její tečny $\left\{\begin{matrix} {}^1V\;{}^2V \ldots \\ {}^1V_3\,{}^2V_2 \ldots \end{matrix}\right.$ řadu $\left\{\begin{matrix} {}^1m\;\;{}^2m\;\ldots \\ {}^1u'_2\,{}^2u'_2 \ldots \end{matrix}\right.$; $({}^1m\,{}^2m \ldots) \overline{\overline{\wedge}} ({}^1u_2'\,{}^2u_2' \ldots)$.

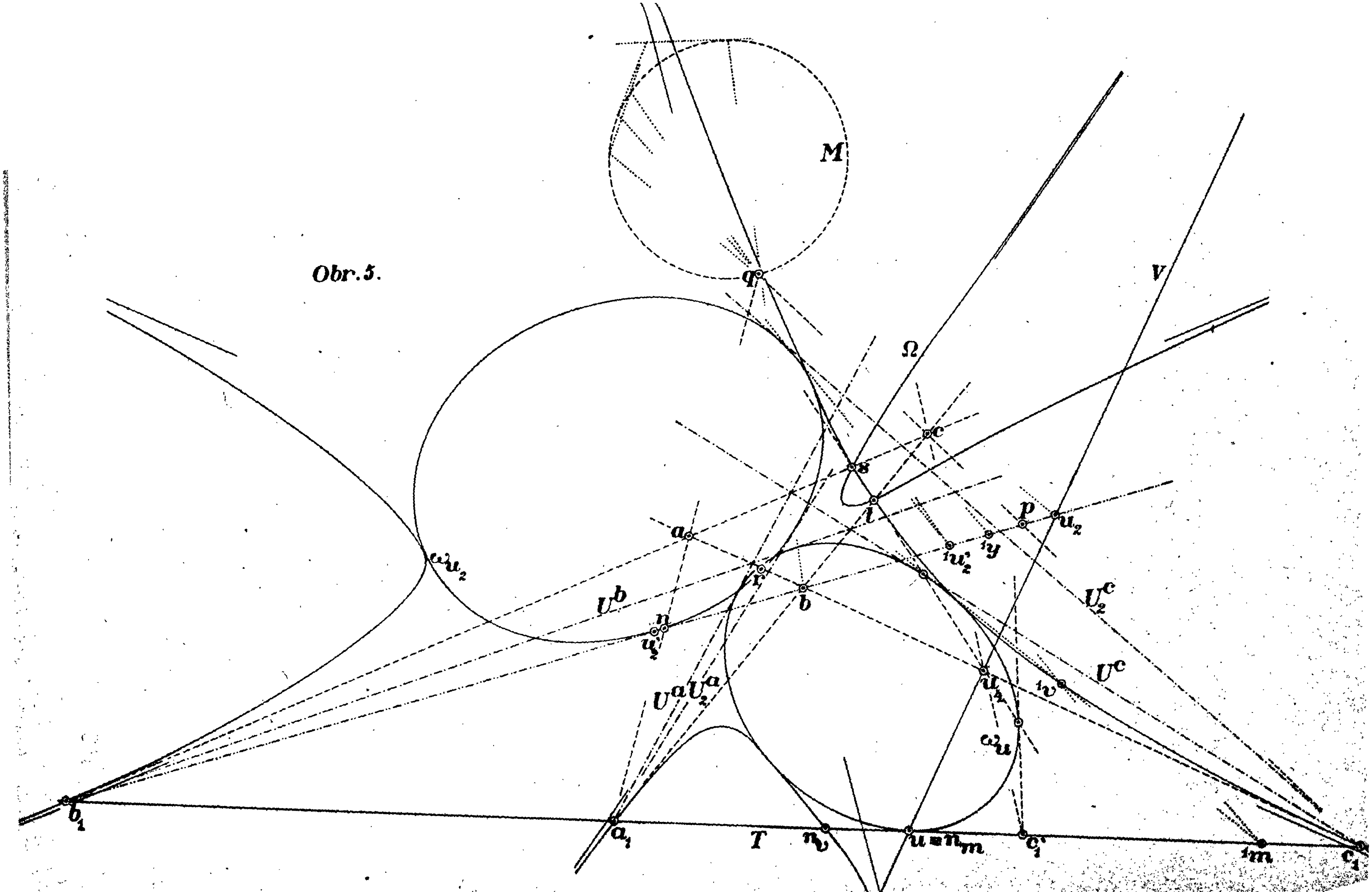
---

4) Je-li involuce bodová, vyťatá svazkem $a\,b\,c\,u$ na tečně T eliptická (což nastane tenkráte, je-li čtyřúhelník $a\,b\,c\,u$ konvexní a tečna T odděluje jeden z jeho vrcholů od ostatních, nebo je-li konkavní, ale vrcholy leží na př po téže straně tečny T, nebo dva po jedné a dva po druhé straně) a jsou-li tudíž obě kuželosečky systému S, procházející bodem u, imaginárnými třetího druhu (prof. V. Jarolímek: Základové geometrie polohy, III. svazek, str. 86, 87), připadne u do vnitř své kuželosečky polární.

5) Tečny $U^a\,U^b\,U^c$ kuželosečky ω_u jsou harmonickými k T vůči přímkovým družinám, tvořícím degenerované kuželosečky systému S. Polární kuželosečky všech bodů přímky T tvoří tudíž osnovu o základnách $U^a\,U^b\,U^c\,T$.

$$\left.\begin{matrix} U^a\;U^c \\ U^b\;U^c \\ U^a\;U^b \end{matrix}\right\} \text{ protnou se na } \left\{\begin{matrix} \overline{ac} \\ \overline{bc} \\ \overline{ab} \end{matrix}\right\} \text{ jak patrno z úplného čtyřrohu } \left\{\begin{matrix} abcq \\ abcP \\ abcn \end{matrix}\right.$$

6) Řady bodů y na pn a m na T jsou perspektivní podle středu q a dále platí $(b\,y\,u_2\,u'_2) = -1$, kdež b, u_2 jsou stálé, u'^2 a y pohyblivé. Promítněme tyto body z bodu q na kružnici $M(q)$ (obr. 5.), veďme v průsečících M s qb qy tečny, z nichž qb je stálá. Na ní vytíná pohyblivá tečna qy řadu bodů, jež spojujme se stálým průsečíkem M se spojnicí $q\,u_2$. Průsečíky M s tímto svazkem spojnic spojujme s q a dostáváme řadu bodů u'_2 na $n\,p$.


M
V
Ω
c
s
l
p
u_2
a
ωu_2
U^b
r
b
n
u_2'
U_2^c
U^c
u_1
U^a
U_2^a
ωu
b_1
a_1
T
n_v
$u \equiv n_m$
c_1'
c_1
q

Obr. 5.

Jsou tudíž tečnové svazky $^1U\,^2U\ldots$ a $^1U_2\,^2U_2\ldots$ projektivné.

4. Posléze zabývejme se sestrojením pólové křivky Ω nějaké obecně položené přímky V vůči kuželosečkám $^1K\,^2K\ldots$ systému $S \not\equiv (a\,b\,c\,T)$.

Označme průsečíky $(V.T) \equiv u$, $(V.np) \equiv u_2$ (obr. 5.). Póly přímky V vůči kuželosečkám $^1K, ^2K\ldots$ buďtež body $^1v, ^2v\ldots$ jakožto průsečíky polár ^1U, $^2U\ldots$ s polárami resp. $^1U_2$, $^2U_2\ldots$

Z projektivnosti tečnových svazků $(^1U, ^2U\ldots)$, $(^1U_2\,^2V_2\ldots)$ je zřejmo:

Geometrickým místem Ω pólů v obecné přímky V vůči kuželosečkám K systému (a b c T) je křivka čtvrtého stupně rodu nultého,[7] *dotýkající se čtyřikráte každé*[8] *polární kuželosečky ω_u všech bodů přímky V.*

Budiž $(V.ab) \equiv u_4$, $(a\,b\,u_4\,r) = -1$, ^iU_i polára jisté kuželosečky ^iK systému S (v obrazci 5. nerýsovaná) pro pól u_4, procházející bo-

---

[7]) O vytvoření křivky čtvrtého stupně dvěma projektivními svazky druhého stupně viz na př.: Rudolf Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. I. díl, str. 245, 246. Jinak vyplývá to z následující věty: Geometrické místo pólů, pro které je daná přímka poslední polárou, vůči systému nultého stupně indexu N je (obecně) křivka stupně (nanejvýše) $2N(n-1)$-tého. (Dr. Gustav A. V. Peschka: Darstellende und projekt. Geometrie, 2. díl, § 113, věta 116.) Dosadíme-li $n=2$, $N=2$, dostaneme $2N(n-1)=4$.

[8]) Že svazky tečen na polárních kuželosečkách všech bodů roviny jsou navzájem projektivní, vyplývá z toho, že vytkneme-li libovolné dva body v rovině, na př. $u_i\,u_j$, a sestrojíme jejich polárné kuželosečky $\omega_{u_i}\,\omega_{u_j}$ tu každá tečna V_i kuželosečky ω_{u_i} je polárou bodu u_i vůči určité jediné kuželosečce K systému S a vůči této přísluší bodu u_j jediná polára V_j jakožto tečna kuželosečky ω_{u_j} a naopak. Je tedy příbuznost tečen kterýchkoli dvou kuželoseček polárních jedno-jednoznačná. Výjimku činí polární kuželosečky degenerované (str. 6.).

Proto také polární kuželosečky všech bodů přímky V tvoří systém kuželoseček, čtyřikráte pólové křivky Ω se dotýkající. Mohly tudíž býti zvoleny pro konstrukci křivky Ω kterékoliv dva body přímky V a jejich příslušné polární kuželosečky. Další konstrukce a vlastnosti křivky čtvrtého stupně a systému kuželoseček čtyřikráte se biquadratiky dotýkajících (v našem případě polárních) jsou obsaženy na př. v pracích prof. Adolfa Amesedera, zejména v pojednání: »Ueber die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden.« Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissenschaften, II. Abt., Aprilheft, Jahrg. 1881. Svazek LXXXIII., oddíl III.

O sestrojení dotyčných bodů křivky čtvrtého stupně s kuželosečkami, obsahujícími tečnové svazky projektivní užitím rovinné korelace, viz R. Sturm: Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften, díl 2., str. 80. Tamtéž o sestrojení dvojných bodů na str. 47., k nimž však v našem případě přicházíme bezprostředně. Též: H. Schröter: »Erzeugnisse krummer projektivischen Gebilde«, Crelles Journal, svazek 54., str. 38. a 43.—47. V obrazci 5. je zřejmo, že dva ze čtyř dotyčných bodů kuželosečky ω_u (nebo ω_{v_2}) s křivkou Ω jsou imaginární (t. j. příslušná pólově korelační kuželosečka protínala by kuželosečku na př. ω_u jen ve dvou reálných bodech).

dem r, a označme (v obrazci nerýsovaný) průsečík $(\overline{u_4 c} . {}^iU_4) \equiv u$ a sestrojme bod e tak, aby $(u_4 u\ c e) = -1$. Oběma kuželosečkám $K\,{}^iK'$ jež procházejí body $a\,b\,c\,e$ a dotýkají se tečny T v bodech ${}^im\,{}^im'$, přísluší vůči bodu u_4 táž polára ${}^iU_4$ (viz obdobný případ na str. 6.). Je zřejmo, že ${}^im, {}^im'$ oddělují harmonicky bod c_1 a průsečík $c'_1 \equiv (T . \overline{c\,e\,u_4})$, poněvadž jsou to samodružné body involuce ${}^iJ$, vyťaté na T svazkem $a\,b\,c\,e$.

Otáčí-li se ${}^iU_4$ kol bodu r, přicházejíc do poloh ${}^iU_4, {}^jU_4$ přichází bod e do poloh $e, {}^je, \ldots$ a involuce ${}^iJ$ přechází v involuce ${}^iJ, {}^jJ \ldots$, družiny bodů samodružných do poloh ${}^im, {}^im'; {}^jm, {}^jm'$. Všechny involuce J na T mají společnou družinu c_1, c'_1, oddělující harmonicky všechny dvojice ${}^im, {}^im'; {}^jm, {}^jm'$. Tvoří proto tyto dvojice bodů dotyčných involuci a jsou projektivně přidruženy paprskům ${}^iU_4, {}^jU_4 \ldots$ svazku r.

Poláry ${}^iU, {}^iU'; {}^jU\,{}^jU'; \ldots$ bodu u vůči příslušným kuželosečkám ${}^iK, {}^iK'; {}^jK, {}^jK'; \ldots$ jakožto tečny kuželosečky ω_u tvoří tudíž involuci tečnovou, jejíž družiny jsou polárám ${}^iU_4, {}^jU_4 \ldots$, jakožto paprskům svazku o středu r projektivně přidruženy. Poněvadž póly ${}^iv, {}^iv'$ ${}^jv, {}^jv' \ldots$ přímky V *vůči kuželosečkám* ${}^iK, {}^iK', {}^jK, {}^jK' \ldots$ jsou průsečíky v této projektivitě navzájem přidružených polár, na př. ${}^iv \equiv ({}^iU, {}^iU_4)$, ${}^iv' \equiv ({}^iU'\ {}^iU_4)$, atd., je křivka Ω vytvořena též svazkem o středu r a projektivnou s ním involucí tečnovou.[9]) Bod r na spojnici $\overline{a\,b}$ a jemu obdobné body s, t na spojnicích $\overline{a\,c}$, $\overline{b\,c}$ jsou dvojnými body křivky Ω.[10])

Aby pól přímky V vůči některé kuželosečce K systému S připadl na $\begin{Bmatrix} \overline{ab} \\ \overline{ac} \\ \overline{bc} \end{Bmatrix}$, bylo by třeba, aby se ztotožnil s bodem $\begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix}$ nebo aby K degenerovala. Za jiných okolností nemůže pól přímky V připadnouti na některou ze spojnic základních bodů $a\,b\,c$, má tedy křivka Ω kromě dvojného bodu na př. r se spojnicí $\overline{a\,b}$ již jen jediný bod společný, t. j. bod c_1[11]) a poněvadž je Ω čtvrtého stupně, je nevyhnutelno, aby se v tomto bodě dotýkala spojnice $\overline{a\,b}$. V bodech a_1 resp. b_1, dotýká se Ω z téhož důvodu spojnic $\overline{b\,c}$ resp. $\overline{a\,c}$.

---

[9]) Prof. Adolf Ameseder v pojednání »Ueber Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten«. Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abt., Jännerheft 1879. Svazek LXXIX. a v dalších svých pracích zabývá se tímto vytvořením křivky (racionální) čtvrtého stupně (se třemi body dvojnými).

[10]) Poněvadž, jak z uvedeného pojednání zřejmo, osou tečnové involuce je spojnice obou dalších bodů dvojných křivky Ω a poněvadž c_1, c'_1 jsou samodružnými body involuce $({}^im, {}^im'; {}^jm, {}^jm';)$ a tudíž tečny jimi ke kuželosečce ω_i vedené samodružnými paprsky příslušné involuce tečnové, jest spojnice jejich bodů dotyčných na ω_u totožna se spojnicí $\overline{s\,t}$. Cyklickou záměnou dvojných bodů r, s, t plynou další dva analogické vztahy. Poněvadž v obr. 5. dvojný bod r připadl dovnitř kuželoseček ω_u, ω_{v_2}, jest bodem isolovaným.

[11]) Jakožto pól přímky V vůči degenerované kuželosečce $\overline{a\,b}\,c_1$, $\overline{q\,c}\,\overline{p\,c_1}$.

Body a_1, b_1, c_1 jsou tři průsečíky křivky Ω s tečnou základní T. Čtvrtý průsečík $^n v$ jest pólem přímky V vůči oné kuželosečce $^u K$ systému S, jež se dotýká přímky T v průsečíku $u \equiv {}^n m$ přímek V a T.[12])

5. K našemu systému je duální systém kuželoseček $S' \mathbin{\overline{\overline{\wedge}}} (ABCa)$ dotýkajících se daných tří tečen A, B, C a procházejících daným bodem a. Duálně k našemu případu platí věty:

1. Geometrickým místem pólů obecné přímky V vůči systému kuželoseček S' je jistá kuželosečka ω.

2. Obalovou křivkou polár bodu (obecného) p vůči systému S' je jistá křivka Ω' čtvrté třídy[13]) se třemi dvojnými tečnami atd.

*

Les propriétés polaires d'un système de coniques déterminées par trois points et une tangente.

(Extrait de l'article précédent.)

Les coniques du système coupent chaque droite, joignant un des trois points fixes a, b, c au point d'intersection de la tangente donnée T avec la droite joignant les deux autres points, en des ponctuelles homographiques à la ponctuelle des points de contact sur la tangente T. Un faisceau de coniques, déterminé par les trois points a, b, c et par un couple de pôles réciproques u, v; contient deux coniques touchant T; il en suit que l'enveloppe des polaires d'un point arbitraire u est, en général, une courbe de la deuxième classe, c'est à d., une conique (polaire) ω_u. Si l'on considère les coniques polaires relatives à deux points différents, leurs tangentes donnent deux systèmes de droites projectifs, de sorte que les points d'intersection des couples de tangentes correspondantes sont des pôles de la droite contenant les deux points donnés, par rapport aux coniques du système. Cela donne le résultat: Le lieu Ω des pôles d'une droite arbitraire V par rapport aux coniques du système $(abcT)$ est une quartique de genre zéro, touchant en quatre points toute conique polaire des points de la droite V.

On obtient des énoncés dualistiques pour un système déterminé par trois tangentes et un point.

---

[12]) Připadá-li pól $^n v$ přímky V na T, připadne pól $^n m$ (dotyčný bod) přímky T na V, t. j. do bodu $u \equiv {}^n m \equiv (T \, . \, V)$.

[13]) Křivka Ω v systému S je obecně šesté třídy; je tedy Ω' v systému S' obecně šestého stupně.