Antonín Sýkora

O geometrickém místě středů tětiv vedených daným bodem ke kuželosečce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 76--81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124073

O geometrickém místě středů tětiv vedených daným bodem ke kuželosečce.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

1. *Ellipsa*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

budiž protata přímkou

$$\text{(A)} \qquad y - n = M(x - m)$$

procházející bodem (m, n).

Střed její tětivy považujme za průsečík její s příslušným průměrem sdruženým

$$\text{(B)} \qquad a^2My + b^2x = 0.$$

Rovnice (A), (B) stanoví pospolu střed tětivy o směrnici M. Měníce tuto, nabýváme jiných a jiných bodů, a eliminujeme-li M, nabudeme vztahu, jímž souřadnice těchto bodů jsou vázány, t. j. rovnice jejich geometrického místa:

$$b^2x(x - m) + a^2y(y - n) = 0.$$

Rovnici této lze dáti podobu:

$$\text{(I)} \qquad b^2\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + a^2\left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{a^2n^2 + b^2m^2}{4},$$

z níž poznáváme, že značí ellipsu o poloosách

$$a_1 = \frac{1}{2b}\sqrt{a^2n^2 + b^2m^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2a}\sqrt{a^2n^2 + b^2m^2}$$

a středu $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Jelikož

$$a_1 : b_1 = a : b,$$

jest ellipsa tato podobna původní, a jak patrno, jest i v poloze podobné. — Mimo to prochází daným bodem (m, n) a středem oné křivky, jakož i body, v nichž se tečny bodem (m, n) vedené dané křivky dotýkají.

Za souřadnice vnějšího středu S podobnosti obou křivek nabudeme

$$x = \frac{abm}{2ab - \sqrt{a^2n^2 + b^2m^2}}$$

$$y = \frac{abn}{2ab - \sqrt{a^2n^2 + b^2m^2}}.$$

Je-li $a^2n^2 + b^2m^2 = 4a^2b^2$, t. j. bod (m, n) na ellipse

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = 4a^2b^2$$

čili

$$\frac{\xi^2}{(2a)^2} + \frac{\eta^2}{(2b)^2} = 1,$$

t. j. na ellipse o dvojnásobných rozměrech, jest střed podobnosti nekonečně vzdálený bod přímky $y = \frac{n}{m}x$, a křivky jsou shodny.

Vnitřní bod podobnosti s má souřadnice

$$x = \frac{abm}{2ab + \sqrt{a^2n^2 + b^2m^2}}$$

$$y = \frac{abn}{2ab + \sqrt{a^2n^2 + b^2m^2}}.$$

2. Zaměníme-li b^2 za $-b^2$ v rovnici (I), nabudeme pro *hyperbolu*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

rovnice

$$\text{(II)} \qquad b^2\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - a^2\left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{b^2m^2 - a^2n^2}{4}.$$

Pro body v úhlu asymptot, v němž jest hyperbola, jest

$$-\frac{b}{a}m < n < \frac{b}{a}m$$

čili

$$n^2 < \frac{b^2}{a^2} m^2, \; a^2n^2 < b^2m^2$$

a o nich platí rovnice (II) přímo; poloosy této křivky jsou

$$a_1 = \frac{1}{2b}\sqrt{b^2m^2 - a^2n^2},$$

$$b_1 = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2m^2 - a^2n^2}$$

a její střed $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Hyperbola tato jest zase dané hyperbole podobna i v poloze podobné; vnější střed podobnosti S má souřadnice

$$x = \frac{abm}{2ab - \sqrt{b^2m^2 - a^2n^2}}$$

$$y = \frac{abn}{2ab - \sqrt{b^2m^2 - a^2n^2}}$$

a vnitřní střed podobnosti s,

$$x = \frac{abm}{2ab + \sqrt{b^2m^2 - a^2n^2}}$$

$$y = \frac{abn}{2ab + \sqrt{b^2m^2 - a^2n^2}}.$$

Pro body (m, n) v úhlu asymptot, v němž hyperbola *není*, jest buď

$$-\frac{b}{a} m > n, \quad \text{nebo} \quad \frac{b}{a} m < n$$

čili

$$n^2 > \frac{b^2}{a^2} m^2, \quad a^2n^2 > b^2m^2,$$

pročež píšeme rovnici (II) v podobě

$$\text{(IIa)} \qquad a^2\left(y-\frac{n}{2}\right)^2-b^2\left(x-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{a^2n^2-b^2m^2}{4},$$

jež značí hyperbolu v poloze sdružené (příčné), jejíž hlavní poloosa

$$a_1=\frac{1}{2a}\sqrt{a^2n^2-b^2m^2}$$

a jest rovnoběžná s osou Y a vedlejší poloosa

$$b_1=\frac{1}{2b}\sqrt{a^2n^2-b^2m^2}$$

a jest rovnoběžná s osou X.

Souřadnice vnějšího středu podobnosti S mají zde imaginarné hodnoty

$$x=\frac{iabm}{2abi-\sqrt{a^2n^2-b^2m^2}}$$

$$y=\frac{iabn}{2abi-\sqrt{a^2n^2-b^2m^2}}$$

a podobně i souřadnice vnitřního středu podobnosti.

3. Je-li kuželosečkou *parabola*

$$y^2=2px,$$

budiž zase

$$\text{(A)} \qquad y-n=M(x-m)$$

rovnice tětivy jdoucí bodem (m, n); pak jest rovnice průměru, který ji půlí

$$\text{(B)} \qquad y=\frac{p}{M}.$$

Znásobíce rovnice (A), (B), nabudeme vztahu mezi souřadnicemi středů tětiv vedených bodem (m, n)

$$(y-n)\,y=p\,(x-m)$$

čili

$$\text{(III)} \qquad \left(y-\frac{n}{2}\right)^2=p\left(x-m+\frac{n^2}{4p}\right).$$

Geom. místo středů tětiv vedených bodem (m, n) jest tedy parabola o polovičním parametru a o vrcholi

$$\left(m - \frac{n^2}{4p}, \frac{n}{2}\right).$$

Osa její jest rovnoběžna s osou dané paraboly; křivka pak prochází bodem (m, n).

Vnější střed podobnosti S obou parabol jest

$$x = 2m - \frac{n^2}{2p}$$
$$y = n.$$

Geometrické místo středů tětiv procházejících daným bodem ke kuželosečce jest tedy zase kuželosečka, (až na výjimku v 2. vytčenou) dané podobná a v poloze stejné.

4. Křivka v poloze obecné

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$$

a přímka

$$y - n = M(x - m)$$

čili

$$y = Mx + N, \text{ kdež } N = n - Mm,$$

podávají pro souřadnice průsečíků rovnici

$$x^2(A + 2\,BM + CM^2) + 2x(BN + CMN + D + EM) + CN^2 + 2EN + F = 0$$

a pro střed příslušné tětivy

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{(B + CM)\,N + D + EM}{A + 2\,BM + CM^2}$$

$$\eta = M\xi + N.$$

Eliminujeme-li z těchto rovnic N, nabudeme

$$(A + BM)\,\xi + (B + CM)\,\eta + (D + EM) = 0,$$

rovnice průměru sdruženého směru M (t. j. průměru půlícího tětivy o směrnici M).

Eliminujeme-li nyní z rovnice této čili

$$(A\xi + B\eta + D) + M(B\xi + C\eta + E) = 0$$

a z rovnice

$$\eta - n = M(\xi - m)$$

směrnici M, nabudeme rovnice geometrického místa středů tětiv procházejících bodem (m, n)

$$(A\xi + B\eta + D)(\xi - m) + (B\xi + C\eta + E)(\eta - n) = 0$$

čili

$$\text{(IV)} \quad A\left(\xi - \frac{m}{2}\right)^2 + 2B\left(\xi - \frac{m}{2}\right)\left(\eta - \frac{n}{2}\right) + C\left(\eta - \frac{n}{2}\right)^2$$

$$+ D\left(\xi - \frac{m}{2}\right) + E\left(\eta - \frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2Dm + 2En\right]$$

anebo, vezmeme-li $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ za počátek souřadnic, kladouce

$$\xi = \frac{m}{2} + x, \ \eta = \frac{n}{2} + y,$$

nabudeme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey$$

$$= \frac{1}{4}(Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2Dm + 2En).$$

Jelikož součinitelé A, B, C kvadratických členů x^2, xy, y^2 jsou zde titíž, jako v dané rovnici, náležejí obě křivky vždy témuž druhu, jakož z rozboru křivky druhého stupně známo.

Jak vyjádříme obsah čtyrstěnu délkami hran.

Napsal

Antonín Sýkora,

professor v Rakovníku.

Znamenejme podstavné hrany čtyrstěnu písmeny a, b, c; protilehlé jim pobočné hrany po řadě α, β, γ, a úhly v troj-