Jan Schuster

O skupině bodů soukružných na hyperbole

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 3, R67--R71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124110

Splyne tedy s paprsekm $x_2 = tx_3$ při jeho průchodu druhým průsečíkem obou kuželoseček. Tento ostatně anuluje rovnici (β) identicky, jak ukázalo horní odštěpení faktoru $p - qt^3$.

To znamená, že můžeme k průsekům tečen základních kuželoseček v bodech paprsku $x_2 = tx_3$ sestrojit hned tečnu jimi vyplněné čáry jako spojnici onoho průseku s průsekem paprsku s tečnou $x_1 = 0$ a tím dovoluje křivku vepsat do tečnového polygonu.

Jsou-li základní křivky paraboly, jsou tečny rovnoběžné s odpovídajícím paprskem $y = tx$.

Z úplné souměrnosti vztahů obou kuželoseček ke druhému průsečíku a druhé společné vnější tečně plyne, že ke dvěma kuželosečkám patří dvojí kubické křivky s dvojným bodem a dvě bikvadratiky, opsané průsekem sdružených tečen, jejichž tečny se s přidruženým paprskem protnou na společné vnější tečně.

O skupině bodů soukružných na hyperbole.

Dr. *Jan Schuster.*

V ročníku X. str. 129 a násl. jsem udal vztah dotykového bodu a dalšího průseku kruhu s elipsou a hyperbolou. Obecněji ta vlastnost byla vyšetřena ve výroční zprávě Masarykovy čsl. reálky v Praze II na r. 1931.

Zde se chci zabývati touto vlastností obecněji pro hyperbolu:

$$x = a \sec \varphi, \ y = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Uvažujeme-li 4 body, které patří úhlům α, β, γ, φ a leží na kružnici, splní se determinant

$$| a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \sec^2 \varphi, \ a \operatorname{tg} \varphi, \ b \sin \varphi, \ 1 | = 0,$$

kde se utvoří ostatní řádky pro argumenty α, β, γ stejně. Když píšeme $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = a^2 \sec^2 \varphi - a^2$, a přičteme-li čtvrtý sloupec číslem a^2 násobený k prvnímu, možná vytknout v něm $a^2 + b^2$; pak lze sloupce zkrátiti postupně čísly $a^2 + b^2$, a, b. To ukazuje, že vlastnost tato nezávisí na hodnotě poměru a/b, tedy jsou úhly stejné pro všecky afinní hyperboly.

Když znásobíme řádky resp. čísly $\cos^2 \varphi$, $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$, $\cos^2 \gamma$, vznikne determinant o prvcích

$$| 1, \ \sin \varphi \cos \varphi, \ \cos \varphi, \ \cos 2\varphi | = 0$$

a když druhý znásobíme číslem 2, obdržíme po přeřadění sloupců determinant

$$\begin{vmatrix} \sin 2\varphi, & \cos 2\varphi, & \cos\varphi, & 1 \\ \sin 2\alpha, & \cos 2\alpha, & \cos\alpha, & 1 \\ \sin 2\beta, & \cos 2\beta, & \cos\beta, & 1 \\ \sin 2\gamma, & \cos 2\gamma, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Když odečteme poslední řádek od všech předchozích, sníží se stupeň determinantu o 1, a vzniknou řádky tvaru:

$$|\sin 2\varphi - \sin 2\gamma, \cos 2\varphi - \cos 2\gamma, \cos\varphi - \cos\gamma| = 0$$

nebo po vyloučení faktoru $2^5 \sin\frac{\varphi-\gamma}{2}$

$$\left|\cos\frac{\varphi-\gamma}{2}\cos(\varphi+\gamma), \cos\frac{\varphi-\gamma}{2}\sin(\varphi+\gamma), \sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\right| = 0.$$

V tomto determinantu vylučme první a druhý člen třetího sloupce, utvoříce nejmenší společné násobky. Tím vzniknou dva členy prvního řádku I a II:

$$\mathrm{I} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2}\cos(\varphi+\gamma) - \sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos(\beta+\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\beta+\varphi}{2} + \sin\frac{\beta+2\gamma-\varphi}{2}\right]\cos(\varphi+\gamma) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\varphi+\beta}{2} + \sin\frac{\varphi+2\gamma-\beta}{2}\right]\cos(\beta+\gamma).$$

Spojení prvních členů vpravo dá:

$$\sin\frac{\varphi+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\varphi}{2}\sin\frac{\varphi+\beta+2\gamma}{2}.$$

Druhé členy přetvoříme napřed v součty:

$$\frac{1}{4}\left[\sin\frac{\beta+\varphi+4\gamma}{2} + \sin\frac{\beta-3\varphi}{2} - \sin\frac{\beta+\varphi+4\gamma}{2} - \sin\frac{\varphi-3\beta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\beta-\varphi)\cos\frac{\beta+\varphi}{2} = \sin\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta+\varphi}{2}.$$

Je tedy

$$\mathrm{I} = \sin\frac{\beta-\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi+\beta}{2}\sin\frac{\varphi+\beta+2\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta+\varphi}{2}\right].$$

$$\mathrm{II} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2}\sin(\varphi+\gamma) - \sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin(\beta+\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\beta+\varphi}{2} + \sin\frac{\beta+2\gamma-\varphi}{2}\right]\sin(\varphi+\gamma) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\varphi+\beta}{2} + \sin\frac{\varphi+2\gamma-\beta}{2}\right]\sin(\beta+\gamma)$$

$$= \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \,.\, \sin\frac{\varphi-\beta}{2}\cos\frac{\varphi+\beta+2\gamma}{2} +$$

$$+\frac{1}{4}\left[\cos\frac{\beta-3\varphi}{2} - \cos\frac{\beta+4\gamma+\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi-3\beta}{2} + \cos\frac{\varphi+\beta+4\gamma}{2}\right].$$

Druhá závorka se zjednoduší na

$$\frac{1}{2}\sin(\varphi-\beta)\sin\frac{-\beta-\varphi}{2} = \sin\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta-\varphi}{2}\sin\frac{\beta+\varphi}{2}.$$

Je tedy

$$\mathrm{II} = \sin\frac{\varphi-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\varphi}{2}\left[\cos\frac{\beta+\varphi+2\gamma}{2} - \cos\frac{\beta-\varphi}{2}\right] =$$

$$= -2\sin\frac{\varphi-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Druhý řádek se utvoří výměnou prvku α a φ, vytkneme společný činitel $+ 2\sin\frac{\varphi-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$, a zbude

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\varphi+\beta}{2}\sin\frac{\varphi+\beta+2\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\varphi}{2}\cos\frac{\beta+\varphi}{2}, & \sin\frac{\beta+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi+\gamma}{2} \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}, & \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Odečtěme druhý řádek od prvního, v němž obdržíme členy III a IV:

$$\mathrm{III} = \tfrac{1}{2}\{\cos\gamma - \cos(\varphi+\beta+\gamma) + \cos\beta + \cos\varphi\} -$$
$$\tfrac{1}{2}\{\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos\beta + \cos\alpha\}$$

$$= \sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\sin\frac{\varphi+\alpha+2\beta+2\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha-\varphi}{2}\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}$$

$$= \sin\frac{\varphi-\alpha}{2} \,.\, 2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma+2\varphi}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2} + \cos\frac{\beta+\gamma+2\alpha}{2}\right\}$$

$$= \sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma+\varphi+\alpha}{2},$$

Když tedy znovu vyloučíme činitel $2\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}$, bude zbylá rovnice:

$$\begin{vmatrix} 2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}, & \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2} \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}, & \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \end{vmatrix}=0$$

Odtud

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

neb $\operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta+\gamma+\varphi}{2}=$

$$=\frac{1}{4}\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

nebo $\sin(\sigma-\alpha)+\sin(\sigma-\beta)+\sin(\sigma-\gamma)+\sin(\sigma-\varphi)=0$, je-li $2\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\varphi$.

Odtud pak

$$\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)+\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\gamma)=0$$

nebo ve tvaru úměry

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)}=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

Přepišme ji na

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\varphi)}{\sin\left(90^0+\frac{\gamma-\varphi}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}-90^0\right)},$$

z čehož

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-45^0\right)}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-45^0\right)}{\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

a souměrně

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = 1.$$

Tím získán výsledek, který odpovídá formuli ze článku na začátku citovaného totiž

$$\operatorname{cotg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\alpha}{2} + 45^0\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Kdybychom v každém ze soukružných bodů sestrojili kružnici křivosti, budou zbylé průsečíky kružnice křivosti s danou hyperbolou zase soukružné. Neboť, kdyby k bodům o parametrech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ patřily parametry průsečné $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, dal by součin rovnic tvaru $\operatorname{tg}^3\left(\frac{\alpha}{2} + 45\right) . \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2} + 45\right) = 1$

$$\text{zase } \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2} + 45\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_1}{2} + 45\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_1}{2} + 45\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_1}{2} + 45\right) = 1.$$

Úvahy o soukružných bodech na elipse provedl už Steiner; tuto poslední větu, Steinerem vyslovenou, dokázal Joachimsthal v Crellově Journalu sv. 36. a M. Lerch v Č. pro Math. a fys. sv. 45. pro elipsu ve tvaru $\alpha + \beta + \gamma + \delta = k \,.\, 360$.

Lerch při tom užil parametrického vyjádření $\operatorname{tg} \alpha/2 = t$ s indexy 1, 2, 3, 4 při t pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Pro hyperbolu by vznikla Lerchova identita, kdybychom psali $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = it$, takže hořejší identita bude dána rovnicí

$$\frac{1 + i t_1}{1 - it_1} \cdot \frac{1 + it_2}{1 - it_2} \cdot \frac{1 + it_3}{1 - it_3} \cdot \frac{1 + it_4}{1 - it_4} = 1,$$

která přejde v

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_1 t_2 t_3 t_4 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4}\right).$$

Vidíme hned, že cestou přes parametr t nelze očekávati odvození součinu tangent. Ostatně lze součin tangent nahradit také součinem

$$\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \cdot \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \cdot \frac{1 + \sin \gamma}{1 - \sin \gamma} \cdot \frac{1 + \sin \delta}{1 - \sin \delta} = 1,$$

z čehož pak plyne

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta +$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta}\right) = 0.$$
