

Milan Berka

Устойчивые компромиссы в одной арбитражной игре

Kybernetika, Vol. 16 (1980), No. 6, (557)--568

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/125300>

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these

Terms of use.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://project.dml.cz>

Устойчивые компромиссы в одной арбитражной игре

Милан Берка

В настоящей статье рассмотрена одна игра с арбитром. Доказаны необходимые и достаточные условия существования ситуации равновесия для конкретного исхода игры. Показано также, что любой исход являющийся ситуацией равновесия оптимален по Парето. Доказано существование ситуации равновесия на достаточно широком классе множеств исходов.

К сожалению приходится констатировать, что принципы оптимальности по Парето и устойчивости решения в теории игр находятся в определенном противоречии. Примером тому может служить игра, известная под названием „дилемма заключенного“ [1]. Существуют в принципе два пути, как это противоречие устранить. Одним является введение в игру обмена информации [2], [3], другим путем является использование арбитра при выборе решения из переговорного множества [6].

В статье [4] была определена игра двух лиц с „подкупом“ арбитра, были доказаны необходимые и достаточные условия существования ситуации равновесия для конкретного исхода игры. Было доказано, что на множестве возможных ситуаций равновесия существует наилучшая, т. е. такая, которая дает наибольший выигрыш обоим игрокам.

В статье [5] было сделано обобщение на случай трех игроков. К сожалению оказалось, что эти замечательные свойства здесь уже не имеют места. Остался открытым и вопрос существования ситуации равновесия в произвольной игре.

Настоящая статья обобщает результаты [4] и [5] и приводит доказательство существования ситуации равновесия на достаточно широком классе множеств выборов.

Определим данную арбитражную игру:

Пусть задано компактное множество P в n -мерном пространстве с фиксированной системой координат. Каждый элемент $x \in P$ интерпретируется, как

допустимый вектор выигрыша. Игрок „ i “ при решении игры x получает x_i ; условных единиц.

До выбора решения выбирает каждый игрок некоторую функцию от собственного выигрыша $\varphi_i(x_i)$ и эту предлагает арбитру в качестве вознаграждения. Арбитр максимизирует свой выигрыш и выбирает

$$x \in \operatorname{Arg} \max_P \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\},$$

где $y \in \operatorname{Arg} \max_M F(x)$ тогда и только тогда, когда $F(y) = \max_M F(x)$.

1. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНКРЕТНОГО ИСХОДА ИГРЫ

Будем предполагать, что $\varphi_i(x_i)$ определена для любого $x \in P$ и пусть кроме этого:

1А) $x_i \geq \varphi_i(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i : x \in P$

2А) если $x_i \geq y_i$ то $\varphi_i(x_i) \geq \varphi_i(y_i)$ и $\varphi_i(x_i)$ — полунепрерывная сверху функция. (Для функции одной переменной это значит, что точкой разрыва может быть лишь такая точка из области определения в которой $\max \left\{ \lim_{x \rightarrow b+0} f(x), \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) \right\} = f(b)$.)

Заметим, что эти предположения вполне естественны.

Определение 1. Ситуацией равновесия будем называть набор $(\bar{x}, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$, для которого выполнено:

$$1) \quad \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) \geq \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(x), \quad \forall x \in P$$

$$2) \quad \forall \varphi_k, \quad \forall x \in \operatorname{Arg} \max_P \left\{ \varphi_k(x_k) + \sum_{i \neq k} \bar{\varphi}_i(x_i) \right\}$$

$$x_k - \varphi_k(x_k) \leq \bar{x}_k - \bar{\varphi}_k(\bar{x}_k), \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Определение 2. Точкой равновесия будем называть вектор $x \in P$, для которого найдется набор $(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, который является ситуацией равновесия по Определению 1.

Введем следующие обозначения:

$(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ — упорядоченная по возрастанию последовательность индексов;

$$f(\bar{x}_{i_1 i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-1} i_{n-1}}) = \max_{\substack{x_{i_m} \geq \bar{x}_{i_m i_m} \\ m=1, n-1}} x_i, \quad 0 < i_m \leq n, \quad 0 \leq l_m \leq n,$$

$$D = \sum_{i=1}^n x_i^*, \quad x_i^* = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i), \quad \bar{x}_{kk} = \bar{x}_k, \quad x_{i0}^* = \bar{x}_{i0} = 0;$$

$$A = \{(i_m, l_m), m = \overline{1, n-1}\},$$

каждый конкретный набор из A будем обозначать через λ_p . Положим $\max_{\theta} A = -\infty$, через P_k будем обозначать проекцию множества P на гиперплоскость $x_k = 0$.

Определим множество

$$\Theta = \{(\bar{x}_{i_1 k}, \dots, \bar{x}_{i_{n-1} k}) \in P_k, (x_{i_1 k}^*, \dots, x_{i_{n-1} k}^*) : k = \overline{1, n}; i_m \neq k\}$$

пусть для его элементов выполнены следующие условия

- 1) $\sum_{m=1}^{n-1} x_{i_m k}^* = D, \quad 0 \leq x_{i_m k}^* \leq \bar{x}_{i_m k};$
- 2) если $\bar{x}_{k i_m} \leq \bar{x}_{k i_n}$ то $x_{k i_m}^* \leq x_{k i_n}^*, \quad \forall k, i_m, i_n.$

Определение 3. Пусть набор $(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ является ситуацией равновесия и для Θ выполнены условия 1), 2) из Определения 2 и для $i_n, i_m = k$ и кроме этого

- 3) Если $f_i(\bar{x}_{i_1 i_1}, \dots, x_{i_{n-1} i_n}) \geq x_{i_n i_n}$ то $\sum_{p=1}^n x_{i_p i_p}^* \leq D;$
- 4) $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^* \geq \max_{\lambda_p \in A} \{f_i(\bar{x}_{i_1 i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-1} i_{n-1}}) + \sum_{\lambda_p} x_{i_m i_m}^*\} - \bar{x}_i;$

тогда элементы множества Θ будем называть наказанием и вектор $(x_{i_1 k}, \dots, x_{i_{n-1} k}, x_k) \in P$ точкой наказания.

Теорема 1.1. Пусть задан набор (\bar{x}, x^*) , такой, что $x \in P$ и для любого $i: 0 \leq x_i^* \leq \bar{x}_i$. Функции $\bar{\varphi}_i$, удовлетворяющие условиям 1А) 2А) и такие, что $x_i^* = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i)$ и набор $(\bar{x}, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$ является ситуацией равновесия по Определению 1, существуют тогда и только тогда, когда существует множество Θ , для которого выполнены условия 1) – 4) из Определения 3.

Доказательство. 1) Необходимость.

а) Пусть $\bar{\varphi}_i(x_i)$ искомые функции удовлетворяющие Определению 1. Обозначим $D^* = \max_P \{ \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(x_i) \}$. Если $D^* > D$, то $(\bar{x}, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$ не является ситуацией равновесия, ибо не выполнено условие 1) Определения 1. Если $D^* < D$ и $x_1^* > 0$, то можно ввести функцию

$$\tilde{\varphi}_1(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 < \bar{x}_1 \\ \bar{\varphi}_1(x_1) - \varepsilon, & x_1 \geq \bar{x}_1 \end{cases}, \quad \varepsilon < \min \{D - D^*, x_1^*\}, \quad \varepsilon > 0,$$

Здесь $x \in \operatorname{Argmax}_P \{ \bar{\varphi}_1(x_1) + \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(x_i) \}$ и $\bar{x}_1 - \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) > \bar{x}_1 - \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1)$ это противоречие с условием 2) Определения 1. В случае $D^* < D$ и $x_1^* = 0$, $D^* \geq \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) = D$ и не может быть $D^* < D$. Значит $D^* = D$.

б) Выберем $\bar{x} \in \operatorname{Argmax}_P \{ \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(x_i) \}$. Положим $\bar{x}_{i1} = \bar{x}_i$, $x_{i1}^* = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) \forall i = \overline{2, n}$ и аналогично можно поступать и в остальных случаях. Выполнение условий 1) – 2) Теоремы 1.1. Вытекает из построения системы Θ .

в) Пусть нарушается условие 4) Теоремы 1.1. и пусть набор $(l_1^0, \dots, l_{n-1}^0)$ такой, для которого максимальная правая часть неравенства 4). Без ограничения общности будем предполагать, что $i = 1$. Тогда

$$\sum_{i=2}^n x_i^* < f_1(\bar{x}_{2l_1^0}, \dots, \bar{x}_{nl_{n-1}^0}) + \sum_{i=2}^n x_{il_{i-1}^0}^* - \bar{x}_1$$

$$\bar{x}_1 - x_1^* < \max_{i=2}^n x_1 + \sum_{i=2}^n x_{il_{i-1}^0}^* - D$$

где \max берется для $x_{il_{i-1}^0}$ и $i = \overline{2, n}$.

Положим

$$\varepsilon = f_1(\bar{x}_{2l_1^0}, \dots, \bar{x}_{nl_{n-1}^0}) + \sum_{i=2}^n x_{il_{i-1}^0}^* - D - \bar{x}_1 + x_1^* > 0$$

пусть $\bar{x} \in \operatorname{Argmax}_P x_1$ для $x_i \geq \bar{x}_{il_{i-1}^0}$ и $i = \overline{2, n}$ и положим

$$\varphi_1(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 < \bar{x}_1 \\ D - \sum_{i=2}^n x_{il_{i-1}^0}^* + \varepsilon/2, & x_1 \geq \bar{x}_1 \end{cases}$$

в этом случае

$$\bar{x}_1 - \varphi_1(\bar{x}_1) > \bar{x}_1 - \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) \text{ и } \varphi_1(\bar{x}) + \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) = \max_P \{ \varphi_1(x_1) + \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(x_i) \}$$

и это противоречит условию 1) Определения 1.

г) Пусть нарушается условие 3) Теоремы 1.1. Неравенство $f_n(\bar{x}_{1l_1}, \dots, \bar{x}_{n-1, l_{n-1}}) \geq \bar{x}_{nl_n}$ обозначает, что существует такая точка $\bar{x} \in P$, для которой $\bar{x}_i \geq \bar{x}_{il_i}$ и $\sum_{i=1}^n x_{il_i}^* > D$, но тогда $\sum_{i=1}^n \varphi_i(\bar{x}_i) > D = \sum_{i=1}^n x_i^*$ и не выполняется условие 1) Определения 1.

2) *Достаточность.*

Предположим, что выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда можно построить стратегии игроков следующим образом:

$$\bar{\varphi}_i(x_i) = \max_{j: x_i \geq \bar{x}_{ij}} x_{ij}^*$$

Докажем, что набор $(\bar{x}, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$ является ситуацией равновесия.

а) Предположим, что существует точка $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ такая, что $\sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) > D$.

Пусть

$$0 \leq x_{i l_i} \leq \bar{x}_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad l_i \in \text{Argmax } j \text{ для } j: \bar{x}_{i j} \leq \bar{x}_i,$$

в этом случае $\bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) = x_{i l_i}^*$. По нашему предположению существует $\bar{x}: \bar{\varphi}_n(\bar{x}_n) > D - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i l_i}$, потому что φ_i – ступенчатые, полунепрерывные сверху функции, найдется номер $l_n: x_{n l_n}^* > D - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i l_i}^*$, но тогда не выполнено условие

3) Теоремы 1.1.

б) Предположим, что существует точка $\bar{x} \in P$ такая, что

$$\sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) + \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) \geq \max_P \left\{ \sum_{i=2}^n \bar{\varphi}_i(x_i) + \bar{\varphi}_1(x_1) \right\} \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 - \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) > \bar{x}_1 - x_1^*$$

В общем случае $0 \leq x_{i l_i} \leq \bar{x}_i$, если $l_i \in \text{Argmax } j$ то $\varphi_i(\bar{x}_i) = x_{i l_i}^*$,

По предположению если

$$\bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) + \sum_{i=2}^n x_{i l_i}^* \geq D \quad \text{то} \quad \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1) \geq D - \sum_{i=2}^n x_{i l_i}^* \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 \leq f_1(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

и отсюда (в силу условия 3) Теоремы 1.1) вытекает

$$\bar{x}_1 - D + \sum_{i=2}^n x_{i l_i}^* > \bar{x}_1 - x_1^* \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=2}^n x_i^* < \bar{x}_1 + \sum_{i=2}^n x_{i l_i}^* - \bar{x}_1 \leq \max_{\lambda_p \in A} \{f_1(\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-1}}) + \sum_{m=1}^{n-1} x_{m l_m}^*\} - \bar{x}_1$$

и это противоречие с условием 4) Теоремы 1.1. На этом доказательство теоремы завершено.

Замечание 1. Нетрудно сформулировать теоремы, содержащие отдельно необходимые и достаточные условия без помощи множества Θ . Такие теоремы попроще и лучше их можно использовать в тех случаях, когда ситуация явно равновесна или нет. Они формулируются аналогично замечанию 1 в [5].

Теорема 1.2. Точки равновесия (если существуют) всегда оптимальны по Парето.

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда существует $\bar{x}: \bar{x}_i \leq \bar{x}_i \wedge \exists j: \bar{x}_j < \bar{x}_j$. Положим $\varepsilon = \bar{x}_j - \bar{x}_j > 0$ и

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} \bar{\varphi}_j(x_j), & x_j < \bar{x}_j \\ \bar{\varphi}_j(x_j) + \varepsilon/2, & x_j \geq \bar{x}_j \end{cases}$$

562 Из монотонности функции $\bar{\varphi}_i$, следует, что

$$\sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) < \varphi_j(\bar{x}_j) + \sum_{i \neq j} \bar{\varphi}_i(\bar{x}_i) \quad \text{и} \quad \bar{x}_j - \varphi_j(\bar{x}_j) > \bar{x}_j - \bar{\varphi}_j(\bar{x}_j)$$

и это противоречит Определению 1. В данном случае не существует в точке \bar{x} никакая ситуация равновесия и это противоречит нашему предположению.

Теорема 1.3.

$$D \leq \min_{k=1, n} \max_{P} \left\{ \sum_{\substack{i \neq k \\ i=1}}^n x_{ij} \right\}$$

Доказательство. Если предположить обратное неравенство, то заведомо не существует такое множество θ , чтобы $\sum_{i=1, i \neq k}^n x_{ik}^* = D$ для любого k . Это противоречие и теорема доказана.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОМПАКТНЫМ МНОЖЕСТВОМ P

Доказательство можно провести в общем случае, но поскольку ограничена длина статьи и следует иметь в виду и наглядность изложения проведем доказательство при некоторых ограничениях.

1В) Пусть $n = 3$.

2В) Пусть $\text{Argmax}_P x_i = (0, x_i^m, 0)$.

3В) Пусть $\text{Argmax}_P \left\{ \sum_{i \neq k}^3 x_{ij} \right\} = \{x \in P : x_k = 0\} = A_k$.

Обозначим

$$\bar{x} \in \text{Argmax}_P \left\{ \sum_{i=1}^3 x_{ij} \right\}, \quad x^k = (x_{ik}, x_{jk}, 0) \in A_k,$$

$$m_k = x_{ik} + x_{jk}, \quad M = \max_P \left\{ \sum_{i=1}^3 x_{ij} \right\}.$$

Введем следующие системы неравенств.

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} \quad x_1^* + x_2^* \geq x_2^m - \bar{x}_3 & \text{d)} \quad x_1^* + x_2^* \geq x_{31} + x_{21}^* - \bar{x}_3 \\ \text{b)} \quad x_2^* + x_3^* \geq x_1^m - \bar{x}_1 & \text{e)} \quad x_2^* + x_3^* \geq x_{12} + x_{32}^* - \bar{x}_1 \\ \text{c)} \quad x_1^* + x_3^* \geq x_2^m - \bar{x}_2 & \text{f)} \quad x_1^* + x_3^* \geq x_{21} + x_{31}^* - \bar{x}_2 \\ \text{g)} \quad x_1^* + x_2^* \geq x_{32} + x_{12}^* - \bar{x}_3 \\ \text{h)} \quad x_2^* + x_3^* \geq x_{13} + x_{23}^* - \bar{x}_1 \\ \text{i)} \quad x_1^* + x_3^* \geq x_{23} + x_{13}^* - \bar{x}_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j) } x_i^* + x_j^* &\geq \max_{\substack{x_i \geq x_{im} \\ x_j \geq x_{jl}}} x_k + x_{im}^* + x_{jl}^* - \bar{x}_k, \quad m = k, j; \quad l = k, i. \\
 \text{a) } x_1^* &\geq x_{21} + x_{31} - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 = m_1 - M + \bar{x}_1 \geq 0 \\
 \text{b) } x_2^* &\geq x_{12} + x_{32} - \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = m_2 - M + \bar{x}_2 \geq 0 \\
 \text{c) } x_3^* &\geq x_{13} + x_{23} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = m_3 - M + \bar{x}_3 \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Лемма 2.1. Из системы (1d) – (1i) вытекает система неравенств (2).

Доказательство. Докажем это, например, для неравенства (2a), складывая (1d) и (1f) получаем

$$x_1^* + D \geq x_{31} + x_{21} + x_{31}^* + x_{21}^* - \bar{x}_3 - \bar{x}_2, \quad x_1^* \geq m_1 - M + \bar{x}_1.$$

Так, как \bar{x} , $(0, x_{21}, x_{31})$ точки оптимальные по Парето, то $x_{31} + x_{21} \geq \bar{x}_3 + \bar{x}_2$ и $m_1 - M + \bar{x}_1 \geq 0$ и это все, что нужно было доказать.

Лемма 2.2. Выполнение неравенств типа

$$\begin{aligned}
 \text{3) } x_i^* + x_j^* &\geq \max_{x_i \geq x_{im}} x_k + x_{im}^* - \bar{x}_k \text{ вытекает из системы неравенств (1d) – (1i)} \\
 \text{и (2).}
 \end{aligned}$$

Доказательство. Из

$$x_i^* + x_j^* \geq \max_{x_i \geq x_{im}} x_k + x_{im}^* - \bar{x}_k$$

и из (1d) – (1i) вытекает

$$\begin{aligned}
 x_j^* &\geq \max \{x_{ij} + x_{kj}, \max_{x_k \geq x_{kl}} x_i + x_{kl}, \max_{x_l \geq x_{lm}} x_k + x_{lm}\} - \bar{x}_i - \bar{x}_k = \\
 &= x_{ij} + x_{kj} - \bar{x}_i - \bar{x}_k = m_j - M + x_j
 \end{aligned}$$

кроме этого очевидно, что: „Если x_{im}^* удовлетворяет системе (1d) – (1i), то удовлетворяется и (3)“.

Если $m = i$, то $x_k^* \geq \max_{x_i \geq \bar{x}_i} x_j - \bar{x}_j$ и с помощью ЗВ:

$$\max_{x_i \geq \bar{x}_i} x_j \leq x_{ij} + x_{kj} - \bar{x}_i$$

и отсюда, используя Лемму 2.1. получаем требуемое.

Лемма 2.3. Если выполнено условие ЗВ, то неравенства

$$x_i^* + x_j^* \geq \max_{\substack{x_i \geq x_{ik} \\ x_j \geq x_{jk}}} x_k + x_{ik}^* + x_{jk}^* - \bar{x}_k$$

всегда выполняются.

564 Доказательство. $\bar{x}_k \geq x_k^*$, $D - x_k^* \geq D - \bar{x}_k$, $\max_{x_i \geq x_{ik}, x_j \geq x_{jk}} x_k = 0$ и $x_{ik}^* + x_{jk}^* = D$ и дальше все очевидно.

Лемма 2.4.

$$x_j^* \geq \max_{\substack{x_i \geq \bar{x}_i \\ x_j \geq x_{jk}}} x_k + x_{jk}^* - \bar{x}_k$$

Доказательство.

$$\max_{\substack{x_i \geq \bar{x}_i \\ x_j \geq x_{jk}}} x_k \leq \max_{x_j \geq x_{jk}} x_k$$

это очевидно и остальное доказывается аналогично Лемме 2.2.

Лемма 2.5. Из условия 2В вытекают неравенства (1а) – (1с).

Доказательство тривиально.

Теорема 2.6. Система неравенств (1а) – (1j) является при условиях 1В) – 3В) эквивалентна условию 4) Теоремы 1.1.

Доказательство. Доказательство того, что из 4) вытекает (1) очевидно и состоит в явном определении λ_p , при которых 4) переходит в (1). Мы эти выкладки для краткости приводить не будем.

Доказательство обратного утверждения, т. е. что из (1) вытекает выполнение всех неравенств 4) Теоремы 1.1 проводится с использованием Лемм 2.1 – 2.5, которые исчерпывают все варианты неравенства 4).

Теорема 2.7. Если

$$m_i + m_j - M \geq x_k^* \quad \forall i, j, k : i \neq j \neq k \neq i$$

то можно выбрать множество Θ и x_i^* следующим образом

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}, x_{ij}^* = m_i - M + x_{ij}, \quad \forall i, j.$$

В этом случае вектор \bar{x} является точкой равновесия по Определению 2.

Доказательство. Нетрудно проверить, что выполнены все условия Теоремы 2.6. Докажем, что выполняется условие 3) Теоремы 1.1.

$$D^* = x_{im}^* + x_{jl}^* + x_k^* = m_1 + m_2 + m_3 - 2M + x_{im} + x_{jl} - \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

$$D = m_1 + m_2 + m_3 - 2M.$$

Предположим: $f_k(x_{im}, x_{jl}) \geq \bar{x}_k$ если $x_{im} + x_{jl} \leq \bar{x}_i + \bar{x}_j$, тогда все в порядке потому, что $D^* \leq D$. Если $x_{im} + x_{jl} > \bar{x}_i + \bar{x}_j$ то M не максимум и это противоречие.

Выполняются и все неравенства $\bar{x}_{ij} \geq x_{ij}^* \geq 0$ и $\bar{x}_i \geq x_i^* \geq 0$. Несовсем очевидно лишь $x_{ij}^* \geq 0$, докажем это неравенство.

Из условия теоремы $m_i + m_j - M \geq x_k^m \geq x_{kj}$ отсюда $x_{ij} + m_i - M \geq 0$ и $x_{ij}^* = x_{ij} + m_i - M \geq 0$. Очевидно также, что

$$\sum_{i:i \neq j} x_{ij}^* = D = \sum_{i,j:i \neq j} x_{ij} - 2M$$

Докажем выполнение условия 2) Теоремы 1.1.

а) Если $x_{ij} \geq x_{ik}$, то $x_{ij}^* = x_{ij} + m_i - M \geq x_{ik} + m_i - M = x_{ik}^*$

б) Если $x_{ij} \geq \bar{x}_i$, то аналогично $x_{ij}^* \geq x_i^*$

Сейчас для завершения доказательства можно использовать Теорему 1.1, которая была доказана в § 1. Этим шагом мы завершили доказательство Теоремы 2.7.

Теорема 2.8. Если

$$m_i + m_j - M \leq x_k^m \quad \forall i, j, k : i \neq j \neq k \neq i$$

то можно построить множество Θ так, чтобы

$$\Theta = \{((x_1^m, 0), (x_2^m, 0), (x_3^m, 0); (x_i^m)^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 x_i^m - M)\}$$

и тогда в точке $\bar{x} \in P$ существует ситуация равновесия и

$$x_i^* = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^m - M \right) - (x_i^m - \bar{x}_i).$$

Доказательство. Аналогично как в случае доказательства Теоремы 2.7. можно проверить правильность условия Теоремы 2.6 и это значит, что в этом случае выполнено условие 4) Теоремы 1.1. Очевидно выполнено и условие 2). Неочевидны лишь неравенства

$$x_i^m \geq (x_i^m)^* \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_i \geq x_i^* \geq 0$$

Докажем их:

а) $\sum_{i=1}^3 x_i^m - M \leq x_1^m + m_2 + m_3 - M \leq 2x_1^m$ (это вытекает из предположения $m_2 + m_3 - M \leq x_1^m$) и следовательно $x_1^m \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^m - M \right)$.

б) Неравенство $(x_i^m)^* \geq 0$ вытекает из допущения о множестве P .

в) Если использовать результат пункта а), то

$$x_i^* = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^m - M \right) - x_i^m + \bar{x}_i \leq \bar{x}_i$$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^m - M \right) = D \geq x_j^* + x_k^* \geq x_i^m - \bar{x}_i$$

и отсюда $x_i^* \geq 0$ и это все, что было необходимо доказать.

В проверке условия 3) Теоремы 1.1 нет необходимости, так как его выполнение очевидно, также как и выполнение условия 2).

Сейчас можно использовать Теорему 1.1, которая доказывает наше утверждение.

Теорема 2.9. Если

$$m_i + m_j - M \leq x_k^m, \quad m_j + m_k - M \geq x_i^m, \quad m_i + m_k - M \geq x_j^m$$

то можно построить множество Θ так, что точками наказания являются точки

$$(x_k^m, 0), \quad (x_{ik}, x_{jk}), \quad (x_{ji}, x_{ki}) \quad \text{и} \quad x_{ik}^* = x_k^m - m_j + x_{ik},$$

$$x_{jk}^* = x_{jk} + m_j - M, \quad x_{ij}^* = x_k^m - x_{kj}, \quad x_{kj}^* = x_{kj} + m_k - M,$$

$$(x_k^m)^* = x_k^m + m_k - M$$

и в точке $\bar{x} \in P$ существует ситуация равновесия.

$$(x_i^* = x_k^m - m_j + \bar{x}_i, \quad x_j^* = m_j - \bar{x}_k - x_i, \quad x_k^* = m_k - \bar{x}_i - \bar{x}_j)$$

Доказательство. В этом случае необходимо отдельно рассмотреть неравенство (1j). Проведем этот шаг для $i = 1, k = 3, j = 2$. Рассмотрим неравенство:

$$x_1^* + x_2^* < \max_{\substack{x_1 \geq \bar{x}_{1m} \\ x_2 \geq \bar{x}_{2n}}} x_3 + x_{1m}^* + x_{2n}^* - \bar{x}_3$$

и отсюда

$$0 < \max_{\substack{x_1 \geq \bar{x}_{1m} \\ x_2 \geq \bar{x}_{2n}}} x_3 + \bar{x}_{1m} + \bar{x}_{2n} - M$$

и это противоречие с тем, что максимум суммы в точке \bar{x} . Аналогично поступаем и в случае остальных возможных индексов. Если $m_2 + m_1 - M \leq x_3^m$ то $x_3^m - \bar{x}_{21} - \bar{x}_{31} + \bar{x}_2 \geq m_2 - M + \bar{x}_2 \geq 0$ и очевидно, что $\bar{x}_i \geq x_i^* \geq 0$. Также, очевидно, справедливо и $x_k^m \geq (x_k^m)^* \geq 0$.

Условие 3) Теоремы 1.1 проверяется аналогично, как в случае Теоремы 2.7. Докажем условие 2) Теоремы 1.1.

$$x_{ik} \leq x_{ij} \Rightarrow x_{ik}^* = x_k^m - m_j + x_{ik} \leq x_k^m - m_j + x_{ij} = x_{ij}^*$$

$$\bar{x}_j \geq x_{jk} \Rightarrow x_j^* = m_j - M + \bar{x}_j \geq m_j - M + x_{jk} = x_{jk}^*$$

Условие 1) очевидно выполнено и доказательство справедливости условия 4) Теоремы 1.1 доказывается, как и в предыдущих случаях при помощи Теоремы 2.6.

Условие 3) проверяется аналогично, как в доказательстве Теоремы 2.8.

Таким образом все условия Теоремы 1.1 выполнены и применяя ее, мы доказываем наше утверждение.

Теорема 2.10. Если

$$m_i + m_j - M \leq x_k^m, \quad m_j + m_k - M \leq x_i^m, \quad m_i + m_k - M \leq x_j^m,$$

то можно построить множество Θ из точек $(x_k^m, 0)$, $(x_i^m, 0)$, (x_{ij}, x_{kj}) , $(x_k^m)^*$, $(x_i^m)^*$, (x_{ij}^*, x_{kj}^*) где:

$$x_{ij}^* = x_{ij} + x_k^m - m_j, \quad x_{kj}^* = x_{kj} + x_i^m - m_j, \quad (x_k^m)^* = (x_i^m)^* = x_i^m + x_k^m - m_j$$

такое, что в точке $\bar{x} \in P$ существует ситуация равновесия.

$$(x_i^* = x_k^m - m_j + \bar{x}_i, \quad x_j^* = x_{ij} + x_{kj} - \bar{x}_i - \bar{x}_j, \quad x_k^* = x_i^m - m_j + \bar{x}_k)$$

Доказательство. Проверка всех условий Теоремы 1.1 с помощью Теоремы 2.6 в этом случае тривиальна. Теорема 1.1, как и раньше доказывает непосредственно Теорему 2.10.

Сейчас мы можем сформулировать главную теорему данного параграфа.

Теорема 2.11. Пусть выполнены ограничения 1В) – 3В) на множество P , тогда в точке $\bar{x} \in \text{Argmax}_P \{x_1 + x_2 + x_3\}$ всегда существует ситуация равновесия.

Доказательство. Доказательство состоит в разбитии задачи на четыре случая по возможным соотношениям между m_i , M , x_i^m . В каждом конкретном случае можно применить одну из Теорем 2.7–2.10.

Замечание. Приведенное выше доказательство является доказательством конструктивным – дает одновременно руководство для построения стратегии, обеспечивающих устойчивость исхода. Необходимо также заметить, что \bar{x} наилучший в смысле минимума суммы $\bar{\varphi}(\bar{x}_i)$. В общем случае доказательства необходимо рассмотреть больше вариантов, но можно поступать по той же схеме.

3. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ НАШЕЙ ИГРЫ

Необходимо заметить, что наша игра является некоторой крайностью реально существующих ситуаций. Хорошо ее можно применить в условиях капиталистической экономики. Примером может служить распределение ресурсов капиталиста между мелких производителей.

В социалистической экономике можно привести пример распределения ресурсов между предприятием некоторым координирующим центром, который улучшает и усиливает свое руководящее положение по принципу максимальной прибыли и определенной взаимной выгоды для всех. Возможна также интерпретация в виде международного банка, который распределяет капитал между государствами при некоторых ограничениях на возможности этого распределения. Ограничением может быть существование договоров, которые не все распределения разрешают.

(Поступило в редакцию 28 декабря 1979.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю. Б. Гермейер: Введение в исследование операции. Изд. Наука, Москва 1974.
- [2] Howard N.: The Mathematics of Meta-Games. General Systems. Philadelphia, 1966.
- [3] А. А. Васин, В. А. Гурбич: Коалиционные ситуации равновесия в мета-играх. Вестник МГУ серия мат. кибернетика (в печати).
- [4] Н. С. Кукушкин: Устойчивые компромиссы при подкупе арбитра. В книге: Математические модели поведения. Меж. вуз. сборник исп. 4. Изд. Саратов. университета 1978.
- [5] М. Берка: Устойчивые компромиссы при подкупе арбитра в играх трех лиц. Меж. вуз. сборник Саратов. университета 1979.
- [6] Р. Д. Льюс, Г. Райфа: Игры и решения. Изд. Наука, Москва 1964, (перевод с Английского).

Милан Берка, аспирант факультета ВМиК, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 123514, г. Москва, Туристская ул., д. 18, кв. 178. СССР.