Václav Polák

O jisté transformaci jednoduchých rovinných mnohoúhelníků

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 10 (1960), No. 2, 81--98

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126357`

O JISTÉ TRANSFORMACI JEDNODUCHÝCH ROVINNÝCH MNOHOÚHELNÍKŮ

VÁCLAV POLÁK, Brno

Prof. K. Koutský položil otázku, dají-li se každé dva rovinné jednoduché isogonální mnohoúhelníky převést na sebe (až na shodnost) konečným počtem paralelních posunutí stran tak, že během těchto transformací je zachována jednoduchost a isogonalita. Práce odpovídá kladně na tuto otázku.

Jednoduchý rovinný mnohoúhelník[1]) $\mathsf{P} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ dělí rovinu na dvě oblasti — ohraničenou a neohraničenou. Prvou nazýváme vnitřkem mnohoúhelníka P a značíme P°. V celé práci uvažujeme pouze o mnohoúhelnících s vlastními vrcholy (dvě sousední strany leží v různých přímkách). Přímky, určené body A_i, A_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$, přičemž klademe $A_{n+1} = A_1$) značme p_i, uzavřené úsečky $\overline{A_iA_{i+1}}$ pak a_i. Vnitřní úhel (měříme jej vždy v kladných hodnotách) mnohoúhelníka P při vrcholu A_i značme α_i. Říkáme, že dva jednoduché n-úhelníky P, P', jsou *isogonální*, jestliže pro jejich vnitřní úhly vesměs platí $\alpha_i = \alpha_i'$.

Definice 1. Zvolme si libovolnou stranu mnohoúhelníka P (nechť je to strana a_i). Proveďme paralelní posunutí přímky p_i ve směru na ni kolmém o délku $d > 0$. Výchozí polohu přímky značme $p_i^{(0)}$, výslednou její polohu $p_i^{(d)}$ a každé poloze přímky během posunování přiřaďme číslo, značící velikost posunutí. Toto posunutí volme tak malé, aby pro každé $t \in [0, d]$ byl určen jednoduchý mnohoúhelník $(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, p_{i-1} \cap p_i^{(t)}, p_i^{(t)} \cap p_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n)$. Přechod od mnohoúhelníka P k mnohoúhelníku právě konstruovanému nazveme *elementární transformací* mnohoúhelníka P a značíme ji $\tau^{(i)}$. Označení toto znamená též množinu všech mnohoúhelníků, jež jsou přiřazena jednotlivým číslům intervalu $[0, d]$. Výsledný mnohoúhelník (je přiřazen číslu $t = d$) značme pak $\tau^{(i)}(\mathsf{P})$. Stejným způsobem značíme všechny složky mnohoúhelníka $\tau^{(i)}(\mathsf{P})$: Jeho vrcholy jsou $\tau^{(i)}(A_1)$, $\tau^{(i)}(A_2), \ldots$, $\tau^{(i)}(A_n)$, jeho strany jsou $\tau^{(i)}(a_1)$, $\tau^{(i)}(a_2), \ldots, \tau^{(i)}(a_n)$.

Transformace, která nepohybuje žádnou stranou, se nazývá identická. Považujeme ji též za elementární transformaci. Elementární transformaci, jež není identická, považujeme za netriviální.

[1]) Definici viz K. Čulík, O existenci rovinných mnohoúhelníků s předepsanými úhly, Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 415—426.

Definice 2. Nechť $t \in [0, d)$ je libovolné číslo. Pak je určena jednoznačně jistá elementární transformace $\pi^{(i)}$ mnohoúhelníka P: Je representována množinou všech mnohoúhelníků transformace $\tau^{(i)}$, jimž jsou přiřazena čísla z intervalu $[0, t]$. Tedy platí $\pi^{(i)} \subset \tau^{(i)}$. Transformaci $\pi^{(i)}$ nazýváme *dílčí transformací elementární transformace* $\tau^{(i)}$ a píšeme $\pi^{(i)} < \tau^{(i)}$.

Zřejmě pro množinu $\tau^{(i)}$ platí $\tau^{(i)} = \{\pi^{(i)}(\mathsf{P}): \pi^{(i)} \leqq \tau^{(i)}\}$.

Definice 3. Nechť $\tau^{(i)}$ je elementární transformace mnohoúhelníka P, $\tau^{(j)}$ elementární transformace mnohoúhelníka $\tau^{(i)}(\mathsf{P})$. Pak *součin* τ těchto elementárních transformací značíme $\tau^{(i)} . \tau^{(j)}$. Platí $\tau(\mathsf{P}) = (\tau^{(i)} . \tau^{(j)})(\mathsf{P}) = \tau^{(j)}(\tau^{(i)}(\mathsf{P}))$. Indukcí lze definovat součin konečného počtu elementárních transformací.

Definice 4. Součin konečně mnoha elementárních transformací nazývá se *dovolená transformace* mnohoúhelníka P.

Elementární transformace je dovolená transformace. Podobným způsobem jako součin konečně mnoha elementárních transformací lze definovat součin konečně mnoha dovolených transformací. Tento součin je dovolená transformace.

Nechť P, Q jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky a nechť dovolenou transformací lze převést P v Q. Pak lze též dovolenou transformací převést mnohoúhelník Q v P.

Nechť τ je dovolená transformace mnohoúhelníka P. Pak P, $\tau(\mathsf{P})$ jsou isogonální a odpovídající strany jsou rovnoběžné.

Nechť τ je libovolná dovolená transformace mnohoúhelníka P. Pak existuje konečná posloupnost dovolených transformací $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ tak, že:

(i) $\tau = \tau_1 . \tau_2 . \ldots . \tau_k$.

(ii) Pro každé $j \in (1, 2, \ldots, k)$ je τ_j netriviální elementární transformace i_j-té strany mnohoúhelníka $(\tau_1 \ldots \tau_{j-1})(\mathsf{P})$.

Uvedená posloupnost elementárních transformací je určena jednoznačně.

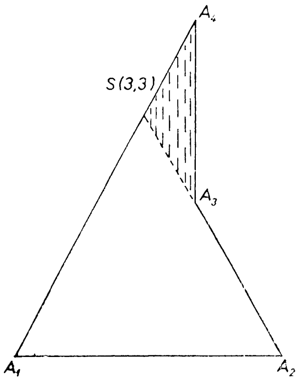
Definice 5. Nechť je dána dovolená transformace τ. Potom rozklad (i) s vlastností (ii) se nazývá *rozklad* dovolené transformace τ na své *dílčí elementární transformace*.

Nechť P, Q jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky a τ, π dvě dovolené transformace mnohoúhelníka P takové, že $\tau(\mathsf{P}) = \mathsf{Q} = \pi(\mathsf{P})$. Zřejmě nemusí být $\tau = \pi$, neboť k mnohoúhelníku Q lze dospět z mnohoúhelníka P mnoha různými způsoby.

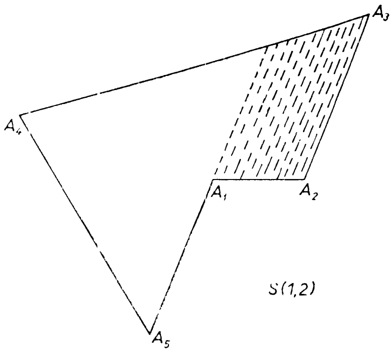
Definice 6. Nechť (i) je rozklad dovolené transformace na své dílčí elementární transformace, $1 \leqq l \leqq k$ libovolné přirozené číslo a π_l libovolná elementární transformace, jež je dílčí transformací τ_l nebo je s ní totožná ($\pi_l = \tau_l$). Pak dovolená transformace $\pi = \tau_1 . \ldots . \tau_{l-1} . \pi_l$ se nazývá *dílčí transformací dovolené transformace* τ a píšeme $\pi \leqq \tau$.

Jestliže τ je dovolená transformace mnohoúhelníka P, pak $\tau = \{\pi(\mathsf{P}) : : \pi \leqq \tau\}$.

Definice 7. Nechť $\Pi^{(i)}$ je transformace mnohoúhelníka P, která vznikne paralelním posunutím jeho i-té strany tak, že každé dílčí posunutí je elementární transformací, kdežto $\Pi^{(i)}$ již elementární transformací není. Tuto transformaci nazýváme *mezní transformací* i-té strany mnohoúhelníka P, přičemž uvedeme, je-li posunutí provedeno dovnitř či vně mnohoúhelníka P.



Obr. 1.



Obr. 2.

Ke každé straně mnohoúhelníka P existuje právě jediná mezní transformace dovnitř.

Celá práce obsahuje důkaz následujícího tvrzení:

Věta. *Nechť* P, Q *jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky. Pak existuje dovolená transformace* τ *mnohoúhelníka* P *tak, že* τ(P) *je shodný s* Q.

Důkaz této věty provedeme na základě několika lemmat. Zaveďme nejdříve jeden speciální pojem.

Definice 8. Řekneme, že jednoduchý n-úhelník P je *typu* $S(i, j)$, jestliže existuje mezní transformace $\Pi^{(j)}$ mnohoúhelníka P tak, že i-tá strana vymizí a $\Pi^{(j)}$(P) je jednoduchý $n - 2$-, resp. $n - 1$-úhelník podle toho, zda $p_{i-1} \nparallel p_{i+1}$ nebo $p_{i-1} \parallel p_{i+1}$ (obr. 1, 2).

Jestliže P je typu $S(i, j)$, pak nastane jeden z následujících tří případů: $j = i - 1$, $j = i$, $j = i + 1$.

Lemma 1. *Nechť* $n \geq 5$ *je přirozené číslo a* P $= (A_1, \ldots, A_n)$ *jednoduchý* n*-úhelník u něhož* $\alpha_1 < 180°$. *Pak existuje dovolená transformace* τ *a čísla* $i, j \in (2, 3, \ldots, n - 1)$ *tak, že*

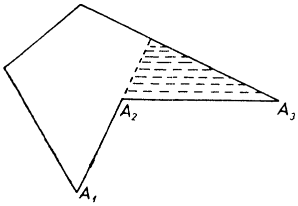
(1) *mnohoúhelník* τ(P) *je typu* $S(i, j)$ *(jeho mezní transformaci, jež anuluje* i *tou stranu, označme* $\Pi^{(j)}$*),*

(2) *pro každou dovolenou transformaci* π *mnohoúhelníka* P, $\pi < \tau \,.\, \Pi^{(j)}$, *je* $\pi(\mathsf{P})^\circ \subset \mathsf{P}^\circ$ *a* $\pi(A_1) = A_1$.

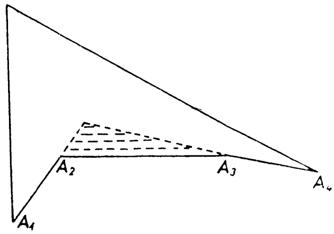
Z podmínky $\pi(A_1) = A_1$ plyne, že během transformace τ neposunujeme ani první ani poslední stranou.

Důkaz lemmatu provedeme úplnou indukcí podle n. Nechť $n = 5$, $\alpha_2 > 180°$ a $\Pi^{(2)}$ mezní transformace dovnitř mnohoúhelníka P.

Nechť druhá strana vymizí. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ je jednoduchý čtyřúhelník (obr. 3,4), jsme hotovi (τ je transformace identická, $i = j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ není jednoduchý čtyřúhelník, bude zřejmě $\alpha_3 < 180°$ a čára $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$

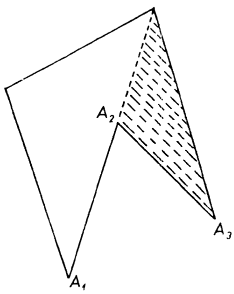


Obr. 3.

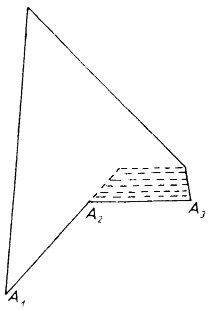


Obr. 4.

bude trojúhelníkem, tj. vymizí též třetí strana (obr. 5). Pak existuje zřejmě malá elementární transformace $\tau^{(3)}$ dovnitř mnohoúhelníka P tak, že po provedení mezní transformace dovnitř druhé strany mnohoúhelníka $\tau^{(3)}(\mathsf{P})$ nastane případ vyznačený na obraze 3, který již je řešen.



Obr. 5.



Obr. 6.

Nechť druhá strana nevymizí.

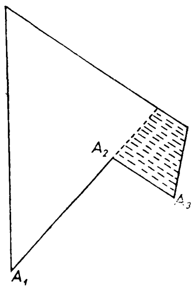
Nechť vymizí třetí strana. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ je jednoduchý čtyřúhelník, jsme hotovi (obr. 6). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P})$ není jednoduchý čtyřúhelník, nastane zřejmě případ vyznačený na obr. 7. Pak zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ tak, že mnohoúhelník $\tau^{(2)}(\mathsf{P})$ je typu $S(2, 3)$ s vlastnostmi uvedenými v lemmatu.

Nechť třetí strana nevymizí. Pak nastane případ vyznačený na obr. 8, který opět snadno rozřešíme.

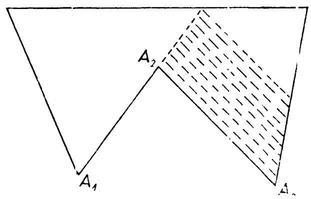
Vyšetřujme nyní případ $\alpha_2 < 180°$. Bez újmy obecnosti lze předpokládat též $\alpha_5 < 180°$. Mohou nastat pouze případy vyznačené na obrazech 9, 10, 11, které snadno rozřešíme. Platí tedy naše lemma pro $n = 5$.

Nechť $n > 5$ je libovolné přirozené číslo a nechť lemma platí pro všechna přirozená k, $5 \leqq k < n$.

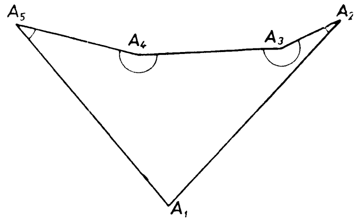
Sestrojme nejdříve dovolenou transformaci $\tau_1 = \tau^{(2)} . \tau^{(3)} . \dots . \tau^{(n-1)}$ složenou z netriviálních elementárních transformací dovnitř druhé, třetí, ... a $n-1$-té strany. Mnohoúhelník $\tau_1(\mathsf{P})$ označme P'. Zřejmě $A'_3, A'_4, \dots,$



Obr. 7.



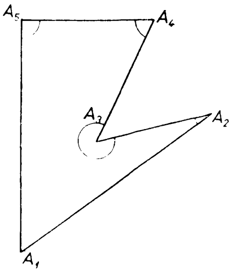
Obr. 8.



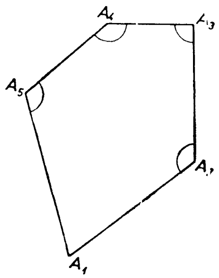
Obr. 9.

$A'_{n-1} \in \mathsf{P}^\circ$ a rovněž tak vnitřky úseček $a'_2, a'_3, \dots, a'_{n-1}$ leží uvnitř mnohoúhelníka P.

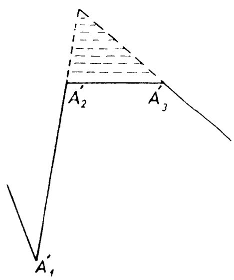
Studujme nyní mnohoúhelník P'. Rozlišme dva případy: $\alpha_2 > 180°$, $\alpha_2 < 180°$ (zřejmě vesměs $\alpha'_i = \alpha_i$).



Obr. 10.



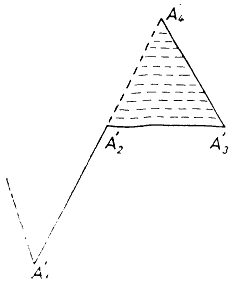
Obr. 11.



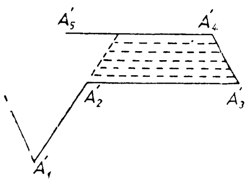
Obr. 12.

I. Nechť $\alpha_2 > 180°$. Proveďme s mnohoúhelníkem P' mezní transformaci $\Pi^{(2)}$ dovnitř.

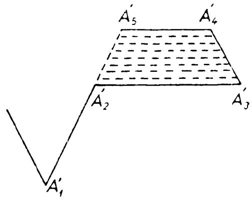
II. Nechť vymizí druhá strana. Studujme případ $\alpha_3 > 180°$ (obr. 12). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ je jednoduchý $n-1$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý mnohoúhelník, leží bod $\Pi^{(2)}(A'_2) = \Pi^{(2)}(A'_3)$ na některé z úseček $A'_5A'_6$, $A'_6A'_7$, ..., $A'_{n-1}A'_n$. Zřejmě existuje malá elementární transformace $\tau^{(3)}$ ven mnohoúhelníka P' tak, aby pro všechna $\pi \leqq \tau^{(3)}$ bylo $\pi(a'_3) \subset \mathsf{P}^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(3)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, anuluje se tato a obdržíme jednoduchý $n-1$-úhelník. Máme předcházející případ a jsme hotovi ($\tau = \tau_1 . \tau^{(3)}$, $i = j = 2$). Zbývá studovat případ $\alpha_3 < 180°$. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ je jednoduchý $n-1$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý $n-1$-úhelník, anuluje se zřejmě třetí strana, tj. platí $\Pi^{(2)}(A'_2) = \Pi^{(2)}(A'_3) = \Pi^{(2)}(A'_4)$ (obr. 13). Pak zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' tak, aby pro všechna $\pi^{(4)} \leqq \tau^{(4)}$ bylo $\pi(a'_4) \subset \mathrm{P}^0$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(4)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, anuluje se tato a obdržíme



Obr. 13.



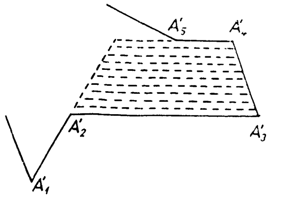
Obr. 14.



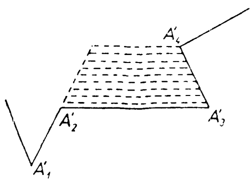
Obr. 15.

jednoduchý $n - 1$-úhelník. Máme předcházející případ a jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \, . \, \tau^{(4)}$, $i = j = 2$).

12. Nechť druhá strana nevymizí. Předpokládejme, že vymizí třetí strana. Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ je jednoduchý $n - 1$-úhelník resp. $n - 2$-úhelník (v případě



Obr. 16.

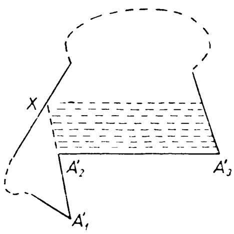


Obr. 17.

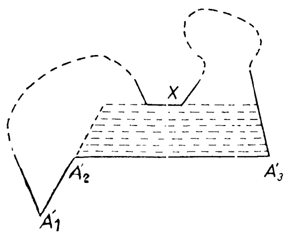
$a'_2 \parallel a'_4$), jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = 3$, $j = 2$). Jestliže $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý mnohoúhelník, může nastat několik případů: α) $\Pi^{(2)}(a'_2) \cap \Pi^{(2)}(a'_4) = \Pi^{(2)}(a'_2) \neq \Pi^{(2)}(a'_4)$ (obr. 14). Pak zřejmě existuje transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ mnohoúhelníka P' tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$ anuluje se strana druhá a obdržíme jednoduchý $n - 1$-úhelník (v případě $a_1 \nparallel a_3$), resp. jednoduchý $n - 2$-úhelník (v případě $a_1 \parallel a_3$). Jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \, . \, \tau^{(2)}$, $i = 2$, $j = 3$). β) $\Pi^{(2)}(a'_2) \cap \Pi^{(2)}(a'_4) = \Pi^{(2)}(a'_2) = \Pi^{(2)}(a'_4)$ (obr. 15). Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(5)}$ mnohoúhelníka P' tak, že pro každé $\pi \leqq \tau^{(5)}$ je $\pi(a'_5) \subset \mathrm{P}^0$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(5)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, nastane případ α. γ) $\Pi^{(2)}(a'_2) \cap \Pi^{(2)}(a'_4) = \Pi^{(2)}(a'_4) \neq \Pi^{(2)}(a'_2)$ (obr. 16). Pak existuje elementární transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ mnohoúhelníka P' tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$ anuluje se strana čtvrtá a obdržíme jednoduchý $n - 1$-úhelník (v případě $a_3 \nparallel a_5$), resp. jednoduchý

$n - 2$-úhelník (v případě $a_3 \parallel a_5$). Položíme $\tau = \tau_1 \,.\, \tau^{(2)}$, $i = 4$, $j = 3$ a jsme hotovi. δ) $\Pi^{(2)}(a_2') \cap \Pi^{(2)}(a_4') = \{\Pi^{(2)}(A_3')\} = \{\Pi^{(2)}(A_4')\}$, (obr. 17). Poněvadž $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý mnohoúhelník, existuje zřejmě na úsečce $\Pi^{(2)}(a_2')$ alespoň jeden bod, jenž patří do některé z úseček $\Pi^{(2)}(a_5')$, $\Pi^{(2)}(a_6')$, ..., $\Pi^{(2)}(a_{n-1}')$. Pak existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' tak, že pro všechna $\pi^{(4)} \leqq \tau^{(4)}$ je $\pi^{(4)}(a_4') \subset \mathsf{P}^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(4)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, obdržíme jednoduchý mnohoúhelník — jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \,.\, \tau^{(4)}$, $i = 3$, $j = 2$).

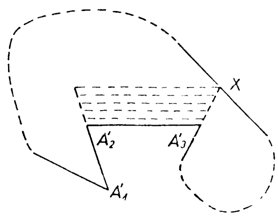
Zbývá vyšetřit případ, kdy třetí strana nevymizí. Poněvadž při transformaci $\Pi^{(2)}$ nevymizí v tomto případě ani druhá a ani první strana, není mnohoúhelník $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$ jednoduchý. Na úsečce $\Pi^{(2)}(a_2')$ existuje tedy aspoň jeden bod, jenž leží na některé z úseček $\Pi^{(2)}(a_5')$, ..., $\Pi^{(2)}(a_{n-1}')$. Nechť X je ten z těchto bodů, jenž je bodu $\Pi^{(2)}(A_3')$ nejblíže. Zřejmě bod X nemůže ležet současně uvnitř dvou různých stran mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$. Bude tedy bod X buď a) současně vrcholem a vnitřním bodem právě jedné strany mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$, nebo b) bude současně totožný právě se dvěma různě označenými vrcholy mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$, avšak nebude vnitřním bodem žádné z jeho stran.



Obr. 18.



Obr. 19.



Obr. 20.

a) Studujme nejdříve případ první. Všechny možnosti jsou vyznačeny na obrazech 18 až 20.

Nechť $X = \Pi^{(2)}(A_2')$ a současně X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(2)}(a_t')$. Zřejmě $4 < t \leqq n - 1$ (obr. 18) a čára $(X, \Pi^{(2)}(A_3'), \Pi^{(2)}(A_4'), \ldots, \Pi^{(2)}(A_t'))$ je jednoduchý mnohoúhelník. Označme jej $\mathsf{R} = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$, kde $B_1 = X$, $B_2 = \Pi^{(2)}(A_3')$.

Nechť $X = \Pi^{(2)}(A_t')$, X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(2)}(a_2')$ (obr. 19). Zřejmě $5 < t \leqq n - 1$ a čára $(X, \Pi^{(2)}(A_3'), \Pi^{(2)}(A_4'), \ldots, \Pi^{(2)}(A_{t-1}'))$ je jednoduchý mnohoúhelník. Označme jej $\mathsf{R} = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$, kde $B_1 = X$, $B_2 = \Pi^{(2)}(A_3')$.

Nechť $X = \Pi^{(2)}(A_3')$, X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(2)}(a_t')$ (obr. 20). Zřejmě $5 < t \leqq n - 1$ a čára $(X, \Pi^{(2)}(A_4'), \Pi^{(2)}(A_5'), \ldots, \Pi^{(2)}(A_{t-1}'))$ je jednoduchým mnohoúhelníkem. Označme jej $\mathsf{R} = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$, kde $B_1 = X$, $B_2 = \Pi^{(2)}(A_4')$.

Ve všech třech případech je $3 \leqq m < n$ a vnitřní úhel mnohoúhelníka R při vrcholu B_1 je $< 180°$.

Jestliže je $m \geqq 5$, jsou pro mnohoúhelník R splněny indukční předpoklady. Existuje tedy dovolená transformace ρ mnohoúhelníka R a čísla $p, q \in \in (2, \dots, m - 1)$ tak, že:

($\bar{1}$) mnohoúhelník $\rho(\mathsf{R})$ je typu $S(p, q)$ (jeho mezní transformaci, jež anuluje p-tou stranu, označme $\Gamma^{(q)}$),

($\bar{2}$) pro každou dovolenou transformaci π mnohoúhelníka R, $\pi < \rho \,.\, \Gamma^{(q)}$, je $\pi(\mathsf{R})^\circ \subset \mathsf{R}^\circ$ a $\pi(B_1) \equiv B_1$.

Nechť nastane případ vyznačený na obraze 18. Nechť $\rho = \rho^{(i_1)} \,.\, \rho^{(i_2)} \,.\, \dots \,.\, \rho^{(i_k)}$ je rozklad dovolené transformace ρ na své dílčí elementární transformace. Označme d_j velikost posunutí i_j-té strany v elementární transformaci $\rho^{(i_j)}$ (velikost posunutí měříme ve směru kolmém na posunutí v hodnotách kladných). Podle předpokladu je $i_j \neq 1, m$ pro každé j. Existuje tedy netriviální elementární transformace $\lambda^{(1)}$ ven mnohoúhelníka R tak, že existuje dovolená transformace $\bar{\rho} = \bar{\rho}^{(i_1)} \,.\, \bar{\rho}^{(i_2)} \dots \bar{\rho}^{(i_k)}$ mnohoúhelníka $\lambda^{(1)}(\mathsf{R})$ tak, že pro každé j posunuje elementární transformace $\bar{\rho}^{(i_j)}$ i_j-tou stranu o délku d_j v témž směru, jak to činí transformace $\rho^{(i_j)}$. (Stačí zvolit transformaci $\lambda^{(1)}$ vhodně malou.) Z ($\bar{2}$) plyne, že pro každé π, $\pi \leqq \bar{\rho}$, je $(\lambda^{(1)} \,.\, \pi)(\mathsf{R})^\circ \subset \lambda^{(1)}(\mathsf{R})^\circ$. Zřejmě transformaci $\lambda^{(1)}$ lze zvolit tak malou, aby:

($\bar{\bar{1}}$) mnohoúhelník $(\lambda^{(1)} \,.\, \bar{\rho})$ (R) byl typu $S(p, q)$ (mezní transformaci, jež anuluje jeho p-tou stranu, označme $\bar{\Gamma}^{(q)}$), a

($\bar{\bar{2}}$) pro každé π, $\pi < \bar{\rho} \,.\, \bar{\Gamma}^{(q)}$, je $(\lambda^{(1)} \,.\, \pi)(\mathsf{R})^\circ \subset \lambda^{(1)}(\mathsf{R})^\circ$.

Vraťme se nyní k obrazu 18. Jestliže $\lambda^{(1)}$ representuje dostatečně malé posunutí, existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(2)}$, $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$, mnohoúhelníka P′ tak, že $\tau^{(2)}(a_2') \subset \lambda^{(1)}(\overline{B_1B_2})$. Odtud je :

(3) $\tau^{(2)}(A_3') \equiv \lambda^{(1)}(B_2)$, $\tau^{(2)}(A_4') \equiv \lambda^{(1)}(B_3)$, $\dots$, $\tau^{(2)}(A_l') \equiv \lambda^{(1)}(B_{l-1})$.

Posunutí $\lambda^{(1)}$ lze volit tak malé, že bod $\lambda^{(1)}(B_1)$ leží uvnitř úsečky $\tau^{(2)}(a_l')$ a vnitřek úsečky $\overline{\lambda^{(1)}(B_1)\ \tau^{(2)}(A_2')}$ leží uvnitř mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$.

Odtud platí

(4)
$$\lambda^{(1)}(\mathsf{R})^\circ \subset \tau^{(2)}(\mathsf{P}')^\circ.$$

Položme nyní $i = p + 1$, $j = q + 1$. Z vlastností ($\bar{\bar{1}}$), ($\bar{\bar{2}}$), (3) a (4) plyne existence dovolené transformace ρ_1 mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$ tak, že mnohoúhelník $(\tau^{(2)} \,.\, \rho_1)$ (P′) je typu $S(i, j)$ (i, j jsou čísla stanovená nahoře; mezní transformaci tohoto mnohoúhelníka, která anuluje jeho i-tou stranu, označme $\Pi^{(j)}$), a pro každou dovolenou transformaci π mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$, $\pi < \rho_1 \,.\, \Pi^{(j)}$, je $(\pi \,.\, \tau^{(2)})$ $(\mathsf{P}')^\circ \subset \tau^{(2)}(\mathsf{P}')^\circ$. (Transformace $\bar{\rho}$ a $\bar{\Gamma}^{(q)}$, popsané v mnohoúhelníku $\lambda^{(1)}(\mathsf{R})$, lze provést též v mnohoúhelníku $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$. Tyto transformace jsme označili ρ_1, $\Pi^{(j)}$.)

Položíme-li nyní $\tau = \tau_1 \,.\, \tau^{(2)} \,.\, \rho_1$, obdržíme hledaný výsledek.

Analogickým postupem lze dospět k výsledku v případech vyznačených na obrazech 19 a 20.

Tím jsme úplně vyřešili případy, kdy $m \geqq 5$. Jestliže $m = 3$ nebo 4, snadno opět dospějeme k žádanému výsledku.

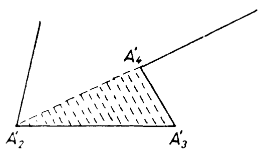
b) Zbývá vyřešit případ, kdy bod X je totožný se dvěma různě označenými vrcholy mnohoúhelníka $\Pi^{(2)}(\mathsf{P}')$. Nechť $X = \Pi^{(2)}(A_2') = \Pi^{(2)}(A_t')$, $t \neq 2$. Pak $5 \leq t \leqq n - 1$.

Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(k)}$ mnohoúhelníka P' tak, že $k \in \{t - 1, t\}$, pro všechna $\pi^{(k)} \leqq \tau^{(k)}$ je $\pi^{(k)}(a_k') \subset \mathsf{P}^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(k)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, obdržíme mnohoúhelník, jenž není jednoduchý a nastane případ a), který již je řešen.

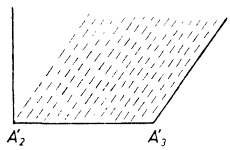
Nechť tedy $X = \Pi^{(2)}(A_3') = \Pi^{(2)}(A_t')$, $t \neq 3$. Pak $6 \leqq t \leqq n - 1$. Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(k)}$ mnohoúhelníka P' tak, že $k \in \{t - 1, t\}$, pro všechna $\pi^{(k)} \leqq \tau^{(k)}$ je $\pi^{(k)}(a_k') \subset \mathsf{P}^\circ$ a provedeme-li s mnohoúhelníkem $\tau^{(k)}(\mathsf{P}')$ mezní transformaci dovnitř druhé strany, nastane případ a), který již je řešen.

Tím jsme prostudovali všechny případy, kdy $\alpha_2 > 180°$.

2. Nechť $\alpha_2 < 180°$. Jestliže $\alpha_3 > 180°$, postupujeme podobně jako v případě 1. (Sestrojíme mezní transformaci $\Pi^{(3)}$ dovnitř mnohoúhelníka P' atd.) Nechť tedy $\alpha_3 < 180°$. Proveďme mezní transformaci $\Pi^{(3)}$ dovnitř mnohoúhelníka P'. Jestliže třetí strana vymizí a obdržíme jednoduchý $n - 1$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = j = 3$). Jestliže vymizí třetí strana a předchozí případ nenastane, zřejmě je $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$ jednoduchý $n - 2$-úhelník (obr. 21), tj. $\Pi^{(3)}(A_4') = \Pi^{(3)}(A_3') = \Pi^{(3)}(A_2')$. Zřejmě existuje elementární transformace $\tau^{(2)}$ (vhodně malá) dovnitř mnohoúhelníka P' tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$ vymizí třetí strana a obdržíme jednoduchý $n - 1$-úhelník. Jsme hotovi ($\tau = \tau_1 \cdot \tau^{(2)}$, $i = j = 3$). Nechť tedy třetí strana nevymizí.



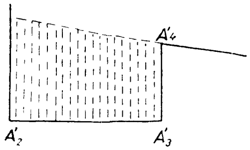
Obr. 21.



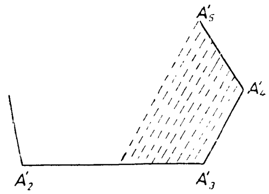
Obr. 22.

21. Nechť vymizí druhá strana. Studujme nejdříve případ $a_1' \nparallel a_3'$ (obr. 22). Jestliže obdržíme jednoduchý $n - 1$-úhelník, jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = 2$, $j = 3$). Jestliže $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý $n - 1$-úhelník (např. vymizí ještě čtvrtá strana, či je porušena jednoduchost), existuje zřejmě (vhodně malá) elementární transformace $\tau^{(2)}$ ven mnohoúhelníka P' tak, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(2)}(\mathsf{P}')$ dostaneme předchozí případ ($\tau = \tau_1 \cdot \tau^{(2)}$, $i = 2$, $j = 3$). Předpokládejme nyní, že $a_1' \parallel a_3'$. Poněvadž vymizí druhá strana a α_1, α_2, $\alpha_3 < 180°$, je $\alpha_4 > 180°$ a $\Pi^{(3)}(a_3') \subset \Pi^{(3)}(a_1')$.

Jestliže $\Pi^{(3)}(A_4') \neq \Pi^{(3)}(A_1')$ (obr. 23), dospějeme snadno k cíli (pomocí vhodné elementární transformace $\pi^{(3)} < \Pi^{(3)}$ dospějeme k mnohoúhelníku, jenž má požadované vlastnosti pro $i = 3$, $j = 2$). Jestliže $\Pi^{(3)}(A_4') = \Pi^{(3)}(A_1')$, lze



Obr. 23.

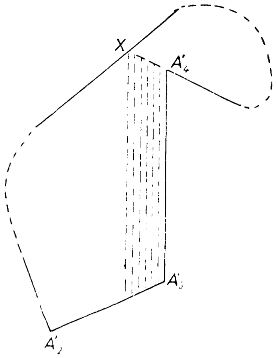


Obr. 24.

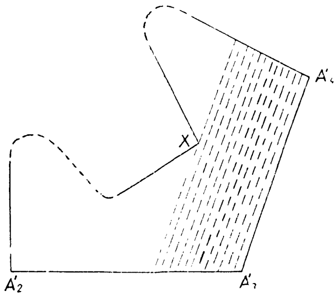
vhodně malou elementární transformací $\tau^{(4)}$ ven mnohoúhelníka P' docílit, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(4)}(\mathsf{P}')$ dostaneme předchozí případ.

22. Nechť též druhá strana nevymizí. Uvažujme nejdříve o případu, kdy vymizí čtvrtá strana (obr. 24). Jestliže obdržíme jednoduchý $n - 1$-úhelník (v případě $a_3' \nparallel a_5'$), resp. jednoduchý $n - 2$-úhelník (v případě $a_3' \parallel a_5'$), jsme hotovi ($\tau = \tau_1$, $i = 4$, $j = 3$). Jestliže vymizí čtvrtá strana a přesto nenastanou uvedené dva případy, postupujeme takto: Jestliže $\Pi^{(3)}(A_6')$ není vnitřním bodem úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$, lze vhodně malou elementární transformací $\tau^{(5)}$ mnohoúhelníka P' docílit toho, že mezní transformací dovnitř třetí strany mnohoúhelníka $\tau^{(5)}(\mathsf{P}')$ vymizí čtvrtá strana a nastane předchozí případ. Jestliže $\Pi^{(3)}(A_6')$ leží uvnitř úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$ tj. $a_3' \parallel a_5'$, $\alpha_5 < 180°$, máme podobnou situaci jako na obraze 16, která se snadno řeší. Tím je případ, kdy vymizí čtvrtá strana, plně řešen. Nechť tedy ani čtvrtá strana nevymizí. Pak $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$ není jednoduchý a na úsečce $\Pi^{(3)}(a_3')$ existují body, jež patří do jedné z úseček $\Pi^{(3)}(a_5'), \ldots, \Pi^{(3)}(a_n'), \Pi^{(3)}(a_1')$. Nechť X je ten z uvedených bodů, jenž je bodu $\Pi^{(3)}(A_4')$ nejblíže.

Rozlišme dva případy podle toho, zda a) bod $X = \Pi^{(3)}(A_4')$ nebo b) X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(3)}(a_3')$ ($X = \Pi^{(3)}(A_3')$ nemůže nastat, neboť $\alpha_3 < 180°$). Studujme nejdříve případ a. Zřejmě bude $\alpha_4 > 180°$. Jestliže X leží uvnitř některé ze stran mnohoúhelníka $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$, např. uvnitř $\Pi^{(3)}(a_t')$ (obr. 25), pak zřejmě $t \in (6, 7, \ldots, n, 1)$. Pro $t = 1$ snadno dospějeme elementární transformací $\tau^{(3)} < \Pi^{(3)}$ k mnohoúhelníku se žádanými vlastnostmi pro $i = 3$, $j = 2$. Pro $t \neq 1$ je zřejmě čára $(X = \Pi^{(3)}(A_4'), \Pi^{(3)}(A_5'), \ldots, \Pi^{(3)}(A_t'))$ jednoduchým mnohoúhelníkem. Označme jej R. Podobnými úvahami, které jsme prováděli s mnohoúhelníkem R v případě 12, dospějeme též v našem případě k výsledku. Tím máme vyřešenu situaci, kdy bod X leží uvnitř některé ze stran mnohoúhelníka $\Pi^{(3)}(\mathsf{P}')$. Nechť tento případ nenastane. Pak $X = \Pi^{(3)}(A_t')$, $t \in (7, 8, \ldots, n, 1)$. Jestliže $t = 1$, pak vhodně malou předchozí elementární transformací $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' lze docílit toho, že po provedení mezní transformace dovnitř třetí strany bod X leží uvnitř první strany. Tento případ máme již rozřešen. Jestliže $t = n$, lze bez újmy obecnosti předpokládat $\alpha_n < 180°$. (Jestliže $\alpha_n > 180°$, přečíslujeme v opačné orientaci strany. Obdržíme tak případ 1, který již je řešen.) Pak ale zřejmě (jako v případě $t = 1$) předchozí vhodně malou elementární transformací $\tau^{(4)}$ mnohoúhelníka P' lze



Obr. 25.



Obr. 26.

docílit toho, že po provedení mezní transformace dovnitř třetí strany bod X leží uvnitř $n - 1$-té strany, což bylo již řešeno. Jestliže $1 \neq t \neq n$, lze vhodnou předchozí elementární transformací některé ze stran a'_t, a'_{t-1} docílit toho, že po provedení mezní transformace bude bod X ležet uvnitř některé z obou stran — tento případ byl již řešen. Prostudujme nyní případ b. Nechť X leží uvnitř úsečky $\Pi^{(3)}(a'_3)$ (obr. 26). Pak zřejmě existuje $t \in (6, 7, \ldots, n - 1)$ tak, že $X \in \Pi^{(3)}(A'_t)$. (Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $\alpha_n < 180°$. Poněvadž $\alpha_t > 180°$, je $t \neq n$.) Zřejmě čára $(X, \Pi^{(3)}(A'_4), \Pi^{(3)}(A'_5), \ldots, \Pi^{(3)}(A'_{t-1}))$ je jednoduchý mnohoúhelník. Označme jej R. Podobnými úvahami, které jsme prováděli s mnohoúhelníkem R v případě 12, dospějeme k žádanému výsledku.

Důkaz lemmatu je ukončen.

Lemma 2. *Nechť $\mathsf{P} = (A_1, \ldots, A_n)$ je jednoduchý n-úhelník a τ libovolná jeho dovolená transformace. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\pi \leq \tau$ neleží v uzavřeném kruhovém ε-okolí bodu $\pi(A_1)$, kromě částí vnitřků úseček $\pi(A_1A_n)$, $\pi(A_1A_2)$ a kromě bodu $\pi(A_1)$, žádný další bod mnohoúhelníka $\pi(\mathsf{P})$.*

Lemma uvádíme bez důkazu, neboť je zřejmé.

Poznámka. Podobné lemma platí, vezmeme-li místo vrcholu mnohoúhelníka P půlící bod libovolné jeho strany.

Lemma 3. *Nechť P, Q jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky typu $S(i, j)$. Nechť anulováním jejich i-tých stran obdržíme mnohoúhelníky, které lze na sebe převést dovolenou transformací. Potom též P a Q lze na sebe převést dovolenou transformací.*

Důkaz. Nechť $\overline{\mathsf{P}}, \overline{\mathsf{Q}}$ jsou jednoduché mnohoúhelníky, jež vzniknou z P, Q

anulováním jejich i-tých stran, a nechť $\overline{\tau}$ je dovolená transformace převádějící $\overline{\mathsf{P}}$ v $\overline{\mathsf{Q}}$. Strany mnohoúhelníka P značme $a_1, a_2, \ldots$, vrcholy pak $A_1, A_2, \ldots$.

1. Studujme nejdříve případ $i = j$. Potom strany a_{i-1}, a_{i+1} nejsou rovnoběžné. Očíslování stran v $\overline{\mathsf{P}}$ ponechme jako v P. Nemá tedy $\overline{\mathsf{P}}$ i-tou stranu. Dva splývající vrcholy v $\overline{\mathsf{P}}$, i-tý a $i+1$-tý, označme X. Zřejmě bod X je průsečík přímek proložených úsečkami a_{i-1}, a_{i+1}. Nechť $\overline{\tau} = \overline{\tau}_1 . \overline{\tau}_2 \ldots \overline{\tau}_k$ je rozklad (i) transformace $\overline{\tau}$ na své dílčí elementární transformace (transformace $\overline{\tau}_t$ posunuje i_t-tou stranu). Poněvadž $\overline{\mathsf{P}}$ nemá i-tou stranu, bude vesměs $i_t \neq i$.

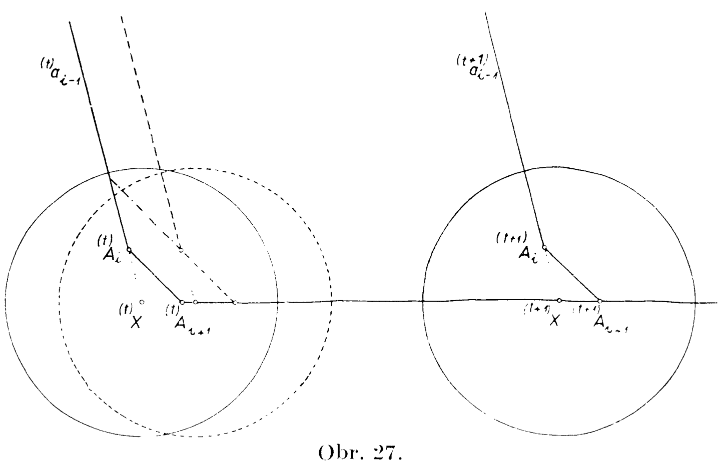
Podle předchozího lemmatu existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\overline{\pi} \leqq \overline{\tau}$ neleží v kruhovém ε-okolí bodu $\overline{\pi}(X)$, kromě částí sousedních stran, žádný bod mnohoúhelníka $\overline{\pi}(\overline{\mathsf{P}})$.

Vraťme se k mnohoúhelníku P. Poněvadž je typu $S(i, i)$, existuje elementární transformace $\lambda^{(i)}$ mnohoúhelníka P tak, že úsečka $\lambda^{(i)}(a_i)$ leží celá uvnitř kruhového ε-okolí bodu $\lambda^{(i)}(X)$. Mnohoúhelník $\lambda^{(i)}(\mathsf{P})$ značme ${}^{(0)}\mathsf{P}$.

Pro každé $t \in (1, 2, \ldots, k)$ nechť ${}^{(t)}\mathsf{P}$ značí jednoduchý mnohoúhelník, jenž je isogonální s P, je typu $S(i, i)$, anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_t)(\overline{\mathsf{P}})$, i-tá strana mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ leží celá uvnitř kruhového ε-okolí bodu ${}^{(t)}X$ (průsečík přímek proložených $i-1$-tou a $i+1$-tou stranou) a je stejně dlouhá jako úsečka $\lambda^{(i)}(a_i)$. (Z vlastností čísla ε plyne okamžitě existence všech mnohoúhelníků ${}^{(t)}\mathsf{P}$.)

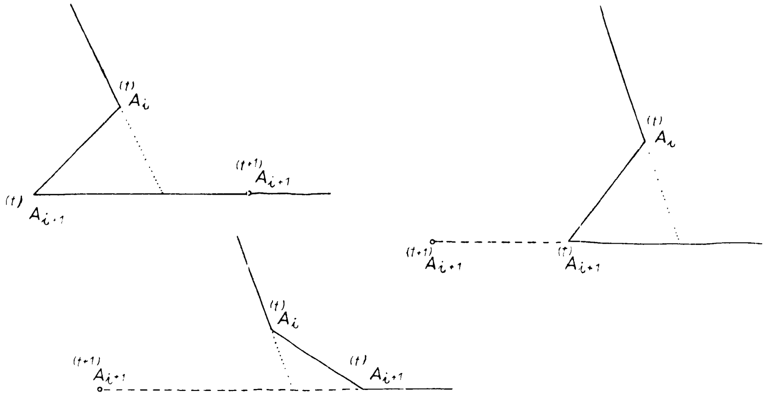
Poněvadž ${}^{(k)}\mathsf{P}$ je typu $S(i, i)$ a anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $\overline{\tau}(\overline{\mathsf{P}}) = \overline{\mathsf{Q}}$, existuje elementární transformace $\mu^{(i)}$ mnohoúhelníka ${}^{(k)}\mathsf{P}$ tak, že $\mu^{(i)}({}^{(k)}\mathsf{P}) = \mathsf{Q}$.

Nechť $t \in (0, 1, 2, \ldots, k-1)$ a uvažujme o dvojici mnohoúhelníků ${}^{(t)}\mathsf{P}$, ${}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Jsou oba typu $S(i, i)$ a anulováním jejich i-tých stran obdržíme mnohoúhelníky $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_t)(\overline{\mathsf{P}})$, $(\overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_{t+1})(\overline{\mathsf{P}})$. (Pro $t = 0$ jde o dvojici $\overline{\mathsf{P}}, \overline{\tau}_1(\overline{\mathsf{P}})$.)



Obr. 27.

Jestliže platí $i - 1 \neq i_{t+1} \neq i + 1$, existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(i_{t+1})}$ mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ tak, že $\tau^{(i_{t+1})}({}^{(t)}\mathsf{P}) = {}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Transformaci $\tau^{(i_{t+1})}$ značme τ_{t+1}. Jestliže $i_{t+1} = i - 1$ nebo $i_{t+1} = i + 1$, dokážeme, že existuje dovolená transformace τ_{t+1} mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ tak, že $\tau_{t+1}({}^{(t)}\mathsf{P}) = {}^{(t+1)}\mathsf{P}$: Nechť např. $i_{t+1} = i - 1$ a nastane situace uvedená na obr. 27.



Obr. 28.

Zřejmě existuje elementární transformace $\nu^{(i)}$ mnohoúhelníka ${}^{(t)}\mathsf{P}$ tak, že $\nu^{(i)}({}^{(t)}A_{i+1})$ leží mezi ${}^{(t)}A_{i+1}$, ${}^{(t+1)}A_{i+1}$ a úsečka $\nu^{(i)}({}^{(t)}a_i)$ celá leží uvnitř kruhového ε-okolí bodu ${}^{(t)}X = \nu^{(i)}({}^{(t)}X)$. Dále zřejmě existuje elementární transformace $\nu^{(i-1)}$ mnohoúhelníka $\nu^{(i)}({}^{(t)}\mathsf{P})$ tak, že úsečka $(\nu^{(i)}\nu^{(i-1)})({}^{(t)}a_i)$ je stejně dlouhá jako ${}^{(t)}a_i$ a leží tedy celá uvnitř kruhového ε-okolí bodu $(\nu^{(i)} . \nu^{(i-1)})$ $({}^{(t)}X)$. Zřejmě po konečném počtu takových kroků dospějeme k mnohoúhelníku ${}^{(t+1)}\mathsf{P}$. Podobně se dokáže existence transformace τ_{t+1} i v ostatních případech (obr. 28). Zřejmě transformace $\tau = \lambda^{(i)} . \tau_1 . \tau_2 \dots \tau_k . \mu^{(i)}$ je hledaná dovolená transformace převádějící mnohoúhelník P v Q. Tím je případ 1 řešen.

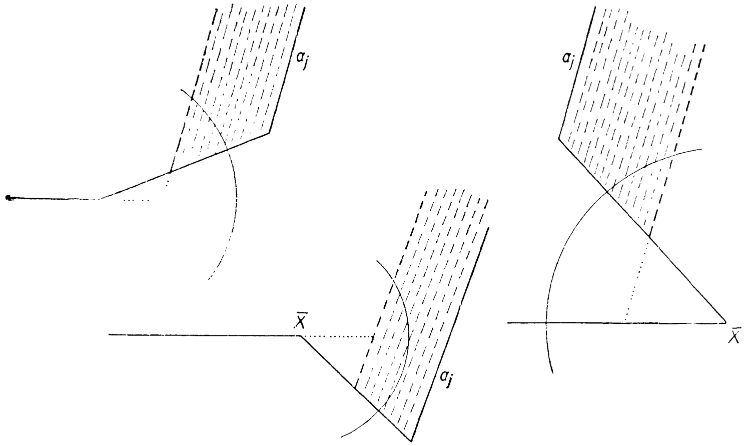
2. Nechť $i \neq j$.

21. Strany a_{i-1}, a_{i+1} nejsou rovnoběžné. Označme $\Pi^{(j)}$ resp. $\Gamma^{(j)}$ mezní transformaci mnohoúhelníka P, resp. Q, jež anuluje i-tou stranu. Tedy $\overline{\mathsf{P}} = \Pi^{(j)}(\mathsf{P})$, $\overline{\mathsf{Q}} = \Gamma^{(j)}(\mathsf{Q})$. Očíslování stran v $\overline{\mathsf{P}}$ a $\overline{\mathsf{Q}}$ opět ponechme jako v P, Q. Nemají tedy $\overline{\mathsf{P}}$, $\overline{\mathsf{Q}}$ i-tou stranu. Nechť X značí průsečík přímek proložených úsečkami a_{i-1}, a_{i+1}. Zřejmě bod $\Pi^{(j)}(X)$ je vlastním vrcholem mnohoúhelníka $\Pi^{(j)}(\mathsf{P})$ a platí $\Pi^{(j)}(X) = \Pi^{(j)}(A_i) = \Pi^{(j)}(A_{i+1})$. Tento bod označme $\overline{X}$.

Poněvadž mnohoúhelník $\overline{\mathsf{P}}$ je jednoduchý, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

- v kruhovém ε-okolí bodu $\overline{X}$ neleží, kromě částí stran $\overline{a}_{i-1}$, $\overline{a}_{i+1}$, žádný další bod mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$,
- každé paralelní posunutí některé ze stran $\overline{a}_{i-1}$, $\overline{a}_{i+1}$ o délku ε je elementární transformací mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$.

Existuje zřejmě elementární transformace $\pi^{(j)} < \Pi^{(j)}$ mnohoúhelníka P tak, že všechny tři body $\pi^{(j)}(A_i)$, $\pi^{(j)}(A_{i+1})$, $\pi^{(j)}(X)$ leží uvnitř kruhového ε-okolí bodu $\overline{X}$ (obr. 29). Odtud plyne, že mnohoúhelník $\pi^{(j)}(\mathsf{P})$ je typu $S(i, i)$. Označme $\overline{\overline{\mathsf{P}}}$ mnohoúhelník, jenž vznikne z $\pi^{(j)}(\mathsf{P})$ anulováním jeho i-té strany. Z vlastností čísla ε je patrno, že $\overline{\mathsf{P}}$ lze elementární transformací j-té strany



Obr. 29.

převést v $\overline{\overline{\mathsf{P}}}$. Podobně dokážeme existenci takové elementární transformace $\gamma^{(j)} < \Gamma^{(j)}$ mnohoúhelníka Q, že mnohoúhelník $\gamma^{(j)}(\mathsf{Q})$ je typu $S(i, i)$ a anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník Q', který vznikne z Q elementární transformací j-té strany. Obdrželi jsme případ 1, který již je řešen.

22. Strany a_{i-1}, a_{i+1} jsou rovnoběžné. Bez újmy obecnosti lze předpokládat $j = i + 1$. (Jestliže $j = i - 1$, provedeme přečíslování stran mnohoúhelníka P v opačném smyslu.) Jestliže $\Pi^{(j)}$ representuje mezní transformaci anulující i-tou stranu, je $\Pi^{(j)}(A_i) = \Pi^{(j)}(A_{i+1})$ vnitřním bodem strany $\Pi^{(j)}(A_{i-1})\,\Pi^{(j)}(A_{i+2})$ mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$. Tuto stranu označme $\overline{a}_{i-1}$. Ostatní jeho strany $\Pi^{(j)}(a_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, i-2, i+2, \ldots)$ označme $\overline{a}_t$. (Není tedy v $\overline{\mathsf{P}}$ i-tá ani $i+1$-tá strana.) Nechť $\overline{X}$ značí půlící bod $i-1$-té strany mnohoúhelníka $\overline{\mathsf{P}}$ (obr. 30).

Nechť $\overline{\tau} = \overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_k$ je rozklad (i) dovolené transformace $\overline{\tau}$ na své dílčí elementární transformace ($\overline{\tau}_t$ je posunutí i_t-té strany).

Podle poznámky uvedené za lemmatem 2 existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\overline{\pi} \leqq \overline{\tau}$ neleží v kruhovém ε-okolí bodu $\overline{\pi}(\overline{X})$ (= půlící bod úsečky $\overline{\pi}(\overline{a}_{i-1})$), kromě části vnitřku strany $\overline{\pi}(\overline{a}_{i-1})$, žádný další bod mnohoúhelníka $\overline{\pi}(\mathsf{P})$.

Pro každé $t \in (0, 1, 2, \ldots, k)$ nechť ${}^{(t)}\mathsf{P}$ značí jednoduchý mnohoúhelník, jenž má následující vlastnosti:

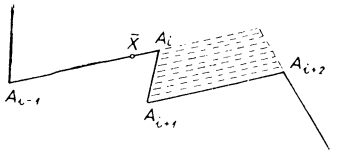
— je isogonální s P,
— je typu $S(i, i + 1)$,
— anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník

$(\bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_t)(\bar{\mathsf{P}})$ (pro $t = 0$ obdržíme mnohoúhelník $\bar{\mathsf{P}}$),

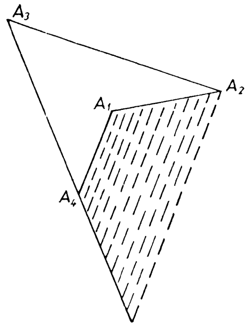
— ${}^{(t)}A_i = (\bar{\tau}_t\bar{\tau}_1) \ldots (\bar{X})$ (tj. půlící bod úsečky $(\bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_t)(\bar{a}_{i-1})$),

— úsečka ${}^{(t)}a_i$ má délku rovnou $\frac{\varepsilon}{2}$.

Číslo ε lze zřejmě volit tak malé, že všechny uvedené mnohoúhelníky ${}^{(t)}\mathsf{P}$ existují.



Obr. 30.



Obr. 31.

Úvahami zcela podobnými jako v části 1 našeho důkazu nalezneme dovolené transformace $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \tau_{k+1}$, jež přivádějí mnohoúhelníky P, ${}^{(0)}\mathsf{P}$, ${}^{(1)}\mathsf{P}, \ldots, {}^{(k)}\mathsf{P}$, Q jeden v druhý (v tomto pořádku). Transformace $\tau = \tau_0 . \tau_1 \ldots$ $\ldots \tau_{k+1}$ je hledaná transformace. Důkaz lemmatu je ukončen.

Lemma 4. *Nechť* P *je jednoduchý n-úhelník s vlastností*

(z) $\alpha_2 < 180° < \alpha_1$.

Pak buď P *je typu* $S(1, n)$ *nebo existuje dovolená transformace* τ *mnohoúhelníka* P *tak, že* $\tau(\mathsf{P})$ *již je tohoto typu.*

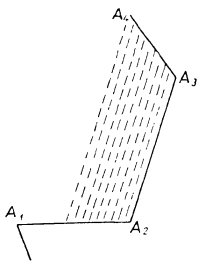
Mnohoúhelník s vlastností (z) je zřejmě nekonvexní a $n \geq 4$. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Nechť $n = 4$. Pak A_3, A_4 leží v různých polorovinách určených přímkou p_1 (obsahuje body A_1, A_2), $a_2 \nparallel a_4$ a $\alpha_3, \alpha_4 < 180°$ (obr. 31). Odtud plyne, že P je typu $S(1, n)$. Pro $n = 4$ tedy lemma platí. Nechť $n > 4$ je libovolné přirozené číslo a nechť lemma platí pro všechny jednoduché k-úhelníky s vlastností (z), $4 \leq k < n$. Nechť P je jednoduchý n-úhelník uvedený v lemmatu. Jestliže P je typu $S(1, 2)$, existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(2)}$ dovnitř mnohoúhelníka P tak, že $\tau^{(2)}(\mathsf{P})$ je typu $S(1, n)$ — jsme hotovi. Nechť tedy P není typu $S(1, 2)$.

1. Studujme nejdříve případ, kdy $\alpha_3 > 180°$. Proveďme mezní transformaci třetí strany dovnitř mnohoúhelníka P. Postupujeme nyní naprosto stejně jako v části 1 důkazu lemmatu 1. (Jen označení je jiné. Bodům $A'_1, A'_2, \ldots$ odpovídají nyní body po řadě $A_2, A_3, \ldots$ Dospějeme-li k mnohoúhelníku R a je-li počet jeho stran ≥ 5, užijeme pro R tvrzení lemmatu 1 stejně, jak jsme to učinili v důkazu lemmatu 1, kde oprávněnost užití lemmatu byla zaručena indukčními předpoklady.) Tímto postupem dospějeme k tvrzení,

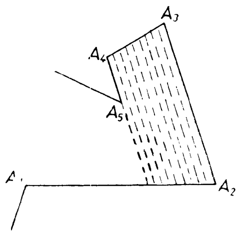
že buď P sám je typu $S(i, j)$, $i \in (3, 4, \ldots, n-2)$, $j \in (3, 4, \ldots, n-1)$, nebo dovolenou transformací lze mnohoúhelník P na tento typ převést. Lze tedy předpokládat, že P je typu $S\ (i, j)$ (i, j jsou čísla uvedená nahoře). Označme $\overline{\mathrm{P}}$ mnohoúhelník, jenž vznikne z P anulováním jeho i-té strany. Očíslování stran ponechme jako v mnohoúhelníku P. Jestliže $\overline{\mathrm{P}}$ je $n-1$-úhelník, nemá i-tou stranu. Jestliže $\overline{\mathrm{P}}$ je $n-2$-úhelník, strany $i-1$-tá a $i+1$-tá leží v téže přímce. Tuto stranu mnohoúhelníka $\overline{\mathrm{P}}$ označme $\overline{a}_{i-1}$. Mnohoúhelník $\overline{\mathrm{P}}$ je typu (z) a má menší počet stran nežli mnohoúhelník P. Podle indukčního předpokladu existuje dovolená transformace $\bar{\tau}$ (eventuálně identická) mnohoúhelníka $\overline{\mathrm{P}}$ tak, že $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ je typu $S(1, n)$.

Poněvadž $i \neq n-1, n, 1, 2$ a $j \neq n, 1, 2$, existuje jednoduchý n-úhelník P_1, isogonální s P tak, že je typů $S(i, j)$, $S(1, n)$ a anulováním i-té jeho strany obdržíme mnohoúhelník $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$. Z lemmatu 3 plyne existence dovolené transformace τ převádějící P v P_1 — jsme hotovi. Tím máme vyřešen případ $\alpha_3 > 180°$.

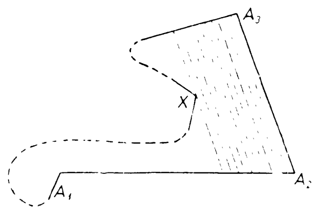
2. Nechť $\alpha_3 < 180°$. Proveďme s mnohoúhelníkem P mezní transformaci $\Pi^{(2)}$ dovnitř. Poněvadž $\alpha_3 < 180°$, nevymizí druhá strana. Vymizí-li první strana (ačkoli jsme předpokládali, že P není typu $S(1, 2)$, může při transformaci $\Pi^{(2)}$ vymizet první strana; pak $\Pi^{(2)}(\mathrm{P})$ není jednoduchý nebo vymizí ještě třetí strana), existuje zřejmě elementární transformace $\tau^{(2)} < \Pi^{(2)}$ tak, že $\tau^{(2)}(\mathrm{P})$ je typu $S(1, n)$ — jsme hotovi. Nechť nevymizí první strana. Pak pro mnohoúhelník $\Pi^{(2)}(\mathrm{P})$ nastane jedna ze tří situací, vyznačených na obrázcích 32, 33 a 34. Ve všech třech případech dospějeme (podobně jako v případu 1) jistou



Obr. 32.



Obr. 33.



Obr. 34.

dovolenou transformací τ_1 k jednoduchému mnohoúhelníku $\tau_1(\mathrm{P})$, který je typu $S(i, j)$, $i \in (3, 4, \ldots, n-2)$, $j \in (2, 3, \ldots, n-1)$. Označíme-li $\overline{\mathrm{P}}$ mnohoúhelník, jenž vznikne z $\tau_1(\mathrm{P})$ anulováním jeho i-té strany, existuje podle indukčního předpokladu dovolená transformace $\bar{\tau}$ tak, že $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ je typu $S(1, n)$. Jestliže $j \neq 2$, postupujeme zcela stejně jako v části 1 našeho důkazu. (Sestrojíme mnohoúhelník P_1, jenž je isogonální s P, je typů $S(i, j)$, $S(1, n)$, anulováním jeho i-té strany obdržíme $\bar{\tau}(\overline{\mathrm{P}})$ atd.) Jestliže $j = 2$, je $i = 3$ a snadno se zkonstruuje jednoduchý mnohoúhelník P_1, jenž je isogonální s P, je typů

$S(3, 2)$, $S(1, n)$ a anulováním jeho i-té strany obdržíme mnohoúhelník $\bar{\tau}(\bar{\mathsf{P}})$. Pokračujeme pak dále jako nahoře. Důkaz lemmatu je hotov.

Nyní již můžeme dokázat naši větu. **Důkaz** provedeme úplnou indukcí. Pro trojúhelníky věta platí. Nechť $n > 3$ je libovolné přirozené číslo a nechť věta platí pro všechna k, $3 \leq k < n$. Nechť P, Q jsou dva jednoduché isogonální mnohoúhelníky, které nejsou shodné. Jestliže $n = 4$ a P je rovnoběžník, věta platí. Nechť P není rovnoběžník a nechť P je konvexní. Pak existuje index i tak, že $\alpha_i + \alpha_{i+1} > 180°$. (Jinak by součet vnitřních úhlů $(n - 2) \cdot 180°$ byl menší než $\frac{n}{2} \cdot 180°$, z čehož plyne $n < 4$ proti předpokladu.) Poněvadž Q je také konvexní, jsou oba mnohoúhelníky typu $S(i, i)$ a podle indukčního předpokladu a lemmatu 3 existuje dovolená transformace τ mnohoúhelníka P tak, že $\tau(\mathsf{P})$ je shodný s Q. Jestliže P není konvexní, lze jeho strany očíslovat tak, že P má vlastnost (z). (Příslušné přečíslování provedeme též v mnohoúhelníku Q.) Podle lemmatu 4 lze mnohoúhelníky P, Q převést dovolenými transformacemi v mnohoúhelníky P', Q', jež jsou typu $S(1, n)$. Označme $\bar{\mathsf{P}}$, $\bar{\mathsf{Q}}$ mnohoúhelníky, jež vzniknou z P', Q' anulováním jejich prvních stran. Podle indukčního předpokladu existuje dovolená transformace $\bar{\tau}$ tak, že $\bar{\tau}(\bar{\mathsf{P}})$ je shodný s $\bar{\mathsf{Q}}$. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $\bar{\tau}(\bar{\mathsf{P}}) = \bar{\mathsf{Q}}$. Podle lemmatu 3 lze dovolenou transformací převést P' v Q'. Věta je tím dokázána.

Došlo 19. 2. 1959.

Katedra matematiky university v Brně

О ТРАНСФОРМАЦИИ ПРОСТЫХ ПЛОСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

ВАЦЛАВ ПОЛАК

Выводы

Пусть $\mathsf{P} = (A_1, \ldots, A_n)$ — простой плоский многоугольник, у которого все вершины собственные (соседние стороны лежат на различных прямых). Под элементарной трансформацией n — угольника P разумеется такой параллельный перенос любой его стороны, что все многоугольники, возникшие в течение этой трансформации, являются простыми n — угольниками.

Пусть P, Q — пара простых изогональных многоугольников. В работе доказывается, что с помощью конечного числа элементарных трансформацией перейдёт P в многоугольник конгруэнтный с Q.

ABOUT CERTAIN TRANSFORMATION OF THE SIMPLE PLANE POLYGONS

VÁCLAV POLÁK

Summary

Let $\mathsf{P} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ be a simple plane polygon all vertices of which are own ones (neighbour sides lie in different straight lines). A parallel translation of any side of polygon P is called the elementar transformation, if all polygons formed during that transformation are simple and have n own vertices.

Let P, Q be two isogonal simple plane polygons. The existence of finite number of elementar transformations that transform P in a polygon congruent with Q is proved.