Matematický časopis

V. N. Salii

Полугруппы случайных отношений

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 2, 122--134

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126374`

Matematický časopis 20 (1970), No. 2

ПОЛУГРУППЫ СЛУЧАЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

В. Н. САЛИЙ, Саратов (СССР)

Бинарным отношением между множествами A и B называется всякое подмножество декартова произведения $A \times B$. Таким образом, элементами бинарного отношения являются упорядоченные пары, в каждой из которых на первом месте стоит элемент множества A, а на втором — элемент множества B. Бинарные отношения являются весьма удобным математическим аппаратом и теория их в последнее время интенсивно развивается (см. например, [6], [4]). Совершенно естественным обобщением понятия бинарного отношения является случайное бинарное отношение, т. е. такое бинарное отношение, в которое каждая пара входит с некоторой вероятностью. Несмотря на естественность этой конструкции, ее изучение с абстрактно-алгебраической точки зрения фактически не проводилось, хотя попытки такого подхода имеются [5]. Объясняется это, по-видимому, тем, что, с одной стороны, потребность в соответствующем алгебраическом аппарате не возникала в теории вероятностей, а с другой стороны, построение теории случайных бинарных отношений через напрашивающееся обобщение понятия случайной величины приводит к тому, что уже развитый формализм детерминистской теории отношений не включается в так получающуюся громоздкую и неудобную для приложений схему. Развитие теории вероятностных автоматов делает уже необходимым изучение случайных преобразований множеств, а преодолению трудностей, возникающих на пути построения соответствующих понятий, способствует возникшая недавно теория $\mathfrak{L}$-отношений (см. например, [7], [9], [10], [11]), являющаяся, по существу, абстрактной теорией случайных отношений. Целью настоящей работы является изложение основных понятий теории случайных бинарных отношений между элементами произвольных множеств, а также изучение некоторых полугрупп, возникающих при этом. Поскольку привлекаемые множества не предполагаются наделенными какой-либо топологией (именно такова ситуация в упоминавшихся приложениях, где рассматриваются лишь конечные или счетные множества), все рассмотрения носят явный дискретный характер, хотя видно, как соответствующие конструкции могут быть обобщены и на непрерывный случай. Отметим, что в работе термины «отображение» и «полное отображение» заменяют соответственно выражения «частичное отображение» и «отображение».

§ 1. ПРЕДПОСЫЛКИ ТЕОРИИ

Пусть Ω—некоторое непустое множество; $\mathfrak{L}$-булева σ-алгебра его подмножеств; p—вероятностная мера на $\mathfrak{L}$; R^1—числовая прямая. Дискретной случайной величиной называется всякое полное отображение $\xi : \Omega \to R^1$ такое, что 1) множество всех значений его не более чем счетно и 2) для всякого $x \in R^1$ прообраз $\overset{-1}{\xi}\langle x\rangle$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{L}$. С каждой случайной величиной ξ связан закон ее распределения — совокупность чисел $\{p(\overset{-1}{\xi}\langle x_k\rangle)\}$, где x_k, $1 \leqslant k < \infty$, суть значения ξ. Очевидно, $\sum\limits_{(k)} p(\overset{-1}{\xi}\langle x_k\rangle) = 1$. В практике приходится сталкиваться с такими случаями, когда не все значения данной случайной величины известны или представляют интерес: например, нас могут интересовать только ее неотрицательные значения и соответствующие вероятности. В этих случаях полезно рассматривать не саму случайную величину ξ, а ее ограничение на том подмножестве основного множества Ω, на котором она принимает выделяемые значения. Это ограничение ξ есть, уже не обязательно полное, отображение Ω в R^1, обладающее двумя свойствами, указанными в определении случайной величины. При этом, естественно, может быть $\sum\limits_{(k)} p(\overset{-1}{\xi}\langle x_k\rangle) < 1$. Выделение таких объектов совершенно оправдано и в дальнейшем термины «случайная величина» и «закон распределения» будем употреблять в этом более широком смысле, используя для обозначения исходных понятий выражения «полная случайная величина» и «полный закон распределения».

Алгебраическая структура, определенная на числовой прямой, позволяет естественным образом ввести в множестве Ξ всех случайных величин одноименные операции, как это делается обычно в теории отображений [3]. Именно, если $\mathfrak{F}(B \times A)$—совокупность всех отображений множества B в абстрактную алгебру A, то для любой n-арной ($n > 0$) операции o, определенной на A, и любого набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ отображений полагаем $\varphi = o(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ тогда и только тогда, когда для всякого $b \in B$, на котором все эти отображения определены, $\varphi(b) = o(\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b))$, или $\varphi = \emptyset$, если нет ни одного такого b. Если $n = 0$, т. е. операция o нульарна в A и, следовательно, фиксирует некоторый элемент $a_0 \in A$, считаем, что одноименная операция в $\mathfrak{F}(B \times A)$ фиксирует полное отображение с постоянным значением a_0. Таким образом $\mathfrak{F}(B \times A)$ превращается в алгебру того же типа, что и A. В этом смысле мы будем говорить об алгебре $\mathfrak{F}(B \times A)$.

Случайное бинарное отношение между множествами A и B естественно определить как случайное подмножество декартова произведения $A \times B$. Что касается понятия случайного подмножества данного множества A, то, учитывая конструкцию случайной величины, его следовало бы определить как случайный элемент множества $\mathfrak{P}(A)$ всех подмножеств множества A, т. е. как отображение вероятностного пространства Ω в множество всех (или некоторых — по соображениям измеримости) подмножеств A. Однако, как мы отмечали, этот путь приводит к формализму, не включающему уже имеющийся аппарат детерминистской теории отношений. Поэтому мы воспользуемся другим, столь же естественным путем. Именно, рассматривая подмножества некоторого множества A, мы можем с каждым из них связать, как это обычно делается в теории вероятностей, функцию-индикатор, являющуюся полным отображением A в двухэлементную булеву алгебру $\mathfrak{L} = \{0, 1\}$ и принимающую значение 1 на тех и только тех элементах из A, которые входят в данное подмножество. Пусть имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{L}, p)$. Рассмотрим полное отображение $\mathfrak{A} : A \to \mathfrak{L}$. Обобщая понятие индикатора, можем считать $\mathfrak{A}$ индикатором некоторого случайного подмножества множества A, в которое данный элемент $a \in A$ входит с вероятностью $p(\mathfrak{A}(a))$. Эта идея и будет использована для построения теории случайных отношений.

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА, СЛУЧАЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Пусть A — некоторое множество, $\mathfrak{L}$ — произвольная полная решетка с операциями $\vee$ (объединение) и $\wedge$ (пересечение), наибольшим элементом 1 и наименьшим элементом 0. $\mathfrak{L}$-множествами, определенными на A, называются элементы решетки $\mathfrak{L}^A$ [1]. Следовательно, $\mathfrak{L}$-множества суть «последовательности», составленные из элементов решетки $\mathfrak{L}$, причем компоненты каждой такой последовательности «занумерованы» элементами множества A. Со всяким $\mathfrak{L}$-множеством связана его функция-индикатор: полное отображение $\mathfrak{A} : A \to \mathfrak{L}$, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ a-ю компоненту данного $\mathfrak{L}$-множества. Совокупность индикаторов всех $\mathfrak{L}$-множеств над A обозначим $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$. Поскольку все операции над $\mathfrak{L}$-множествами определяются и все их свойства формулируются и доказываются в терминах индикаторов, мы будем всюду в дальнейшем отождествлять эти понятия. Отметим, что при выборе в качестве $\mathfrak{L}$ двухэлементной булевой алгебры $\{0, 1\}$ получаются подмножества множества A. Значение $\mathfrak{L}$-множества $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ на элементе $a \in A$ обозначается $\mathfrak{A}(a)$. Структура решетки определяется в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ обычным образом: операции объединения и пересечения (мы будем их обозначать так же, как одноименные операции решетки $\mathfrak{L}$) выполняются «покомпонентно». Отношение включения $\mathfrak{L}$-множеств, обозначаемое знаком $\leqslant$, есть отношение порядка в решетке $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$. Наибольший в смысле этого порядка элемент решетки $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$, совпадающий, легко видеть, с индикатором самого множества A, будем обозначать через A. Если в решетке $\mathfrak{L}$ определена операция взятия дополнения, причем дополнение элемента l обозначается l', то одноименная операция вводится и в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$: дополнением $\mathfrak{L}$-множества $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ называется $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ такое, что $\mathfrak{A}'(a) = (\mathfrak{A}(a))'$ для всякого $a \in A$.

Среди $\mathfrak{L}$-множеств, определенных на A, выделяются некоторые важные классы $\mathfrak{L}$-множеств. $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ называется полным, если $[\mathfrak{A}] = \bigvee\limits_{a \in A} \mathfrak{A}(a) = 1$. Совокупность всех полных $\mathfrak{L}$-множеств над A будем обозначать $\overline{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{L}}(A)$. $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ называется нормальным, если для любых различных $a_1, a_2 \in A$ будет $\mathfrak{A}(a_1) \wedge \mathfrak{A}(a_2) = 0$. Пусть $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ есть множество всех нормальных $\mathfrak{L}$-множеств над A. Примером нормальных $\mathfrak{L}$-множеств являются элементарные $\mathfrak{L}$-множестъа, т.е. такие $\mathfrak{L}$-множества, для которых лишь одно значение отлично от нуля и притом равно единице. Если $a_0 \in A$ есть тот элемент, значение данного элементарного $\mathfrak{L}$-множества на котором равно 1, то это $\mathfrak{L}$-множество будет обозначаться $\mathfrak{A}_{a_0}$. Очевидно, элементарные $\mathfrak{L}$-множества полны. Если $\mathfrak{L} = \{0,1\}$, то нормальными $\mathfrak{L}$-множествами будут пустое и одноэлементные подмножества множества A.

Теперь будем считать, что данное множество A наделено алгебраической структурой. Пусть o—некоторая n-арная операция, определенная на $A (n > 0)$, а $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$—произвольные $\mathfrak{L}$-множества. Рассмотрим $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A}$ такое, что для всякого $a \in A$

$$\mathfrak{A}(a) = \bigvee_{o(a_1, \ldots, a_n) = a} (\mathfrak{A}_1(a_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_n(a_n)), \tag{1}$$

где объединение справа берется по всем $a_1, \ldots, a_n$, для которых $o(a_1, \ldots, a_n) = a$. Полученное $\mathfrak{L}$-множество будем считать результатом операции o, примененной к $\mathfrak{L}$-множествам $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, и в этом смысле писать: $\mathfrak{A} = o(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$. Если операция o нульарна, т.е. фиксирует некоторый элемент $a_0 \in A$, будем считать, что одноименная операция в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ фиксирует элементарное $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A}_{a_0}$. Таким образом $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ превращается в алгебру того же типа, что и A. Могут быть доказаны следующие факты [11].

Теорема 1. *Если решетка $\mathfrak{L}$ бесконечно дистрибутивна, т.е. для любого множества индексов I выполняется $l \wedge \bigvee\limits_{i \in I} l_i = \bigvee\limits_{i \in I} (l \wedge l_i)$, то множества $\overline{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{L}}(A)$ и $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ суть подалгебры алгебры $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$.*

Теорема 2. *Алгебра $\mathfrak{F}(B \times A)$ всех отображений множества B в алгебру A допускает изоморфизм на алгебру $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$, где $\mathfrak{L}$ есть булева алгебра всех подмножеств множесмва B.*

Изоморфизмом, упомянутым в теореме 2, является отображение $P : \mathfrak{F}(B \times A) \to \mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ такое, что $P(\varphi)(a) = \overset{-1}{\varphi} \langle a \rangle$ для $\varphi \in \mathfrak{F}(B \times A)$ и $a \in A$.

Следующее понятие играет основную роль в дальнейшем. $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ называется дискретным, если совокупность элементов множества A, на которых значение $\mathfrak{A}(a)$ отлично от 0 и 1, не более чем счетна. $^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ будет обозначать совокупность всех дискретных $\mathfrak{L}$-множеств над A, а $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$—совокупность всех нормальных дискретных $\mathfrak{L}$-множеств.

Теперь обратимся непосредственно к вероятностным конструкциям, интуитивно описанным в предыдущем разделе.

Пусть Ω есть некоторое непустое множество, $\mathfrak{L}$ —булева σ-алгебра его подмножеств, p—вероятностная мера на $\mathfrak{L}$, A—произвольное множество. Дискретным случайным подмножеством множества A называется всякое дпскретное $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A} \in {}^*\mathfrak{P}(A)$. Слово „дискретное" мы будем часто опукатьт, ибо никакие другие случайные подмножества рассматриваться не сбуду. Случайными подмножествами множества A являются, в частности, все подмножества этого множества (в том числе и оно само). Легко доказывается

Теорема 3. *Сбучайные подмножества множества A образуют булеву σ-алгебру.*

Случайным элементом множества A называется всякое дискретное нормальное $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A} \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$. Точнее было бы назвать эти $\mathfrak{L}$-множества одноэлементными случайными подмножествами, но мы, как это часто делается, не будем разграничивать эти понятия. Очевидна

Теорема 4. *Если $\mathfrak{A}_1 \in {}^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ есть случайное подмножество, а $\mathfrak{A}_2 \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ случайный элемент множеста A, $\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2$ есть случайный элемент.*

Число $p([\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2])$ есть вероятность того, что случайный элемеит $\mathfrak{A}_2$ принадлежит случайному подмножеству $\mathfrak{A}_1$. Этот факт естественно записывать в виде: $\mathfrak{A}_2 \in_p \mathfrak{A}_1$. В частности, $[\mathfrak{A} \wedge A] = [\mathfrak{A}]$ и значит, $p([\mathfrak{A}])$ есть вероятность того, что случайный элемент $\mathfrak{A}$ принадлежит самому множеству A. Для полных случачных элементов эта вероятность равна единице. Заметим, что когда $\mathfrak{L} = \{0, 1\}$, т.е. алгебра случайных событий состоит лишь из тривиальных элементов, введенные понятия случайного подмножества и случайного элемента имеют смысл обычного подмножества и элемента множества A.

Рассмотрим теперь случайные элементы алгебраических систем. Пусть A есть некоторая абстрактная алгебра (вероятностная конструкция считается раз навсегда заданной). В множестве ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ всех случайных элементов алгебры A, которое является подмножеством множества $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ всех $\mathfrak{L}$-множеств над A, определены все операции алгебры A. Но, вообще говоря, неясно, будет ли интересующая нас совокупность ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ замкнута относительно этих операций. Этот вопрос высняяет

Теорема 5. *Множество ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ всех дискретных случайных элементов алгебры A и множество ${}^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A)$ всех ее полных случайных элементов являются подалгебрами алгебры $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$.*

Доказательство замкнутости ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ относительно имеющихся операций проводится рассмотрением формулы (1) для дискретных $\mathfrak{L}$-множеств. Что касается множества ${}^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A)$ всех полных случайных элементов алгебры A, то это множество есть пересечение двух подалгебр алгебры $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$, именно ${}^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A) = \overline{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{L}}(A) \cap {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$. Но тогда ${}^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A)$ и само является подалгеброй.

Теорема 6. *Если A пологруппа, и только в этом случае, ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ является пологруппой.*

Доказательство. Следует из теорем 2 и 5 и соответствующего факта для алгебры $\mathfrak{F}(B \times A)$ [3].

Теорема 7. *Если A—группа то ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ есть обобщенная группа Клиффорда (вполне регулярная инверсная пологруппа), а ${}^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A)$—группа.*

Доказательство. Из теорем 2 и 5 и результатов работы [3] следует что $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ естъ обобщенная группа Клиффорда. При этом обобщенно обратным элементом для $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ будет $\mathfrak{A}$ такое, что $\overline{\mathfrak{A}}(a) = \mathfrak{A}(a^{-1})$, где a^{-1} —обратный для a элемент в группе A. Дискретные случайные элементы группы A образуют, в следствие теоремы 5, подполугруппу обобщенной группы $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$. Но, легко видеть, $\overline{\mathfrak{A}}$ дискретно вместе с $\mathfrak{A}$, т.е. рассматриваемая полугруппа замкнута относительно взятия обобщенно обратного. Значит, ${}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ сама является обобщенной группой Клиффорда. Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ естъ полный случайный элемент группы A. Тогда (см. теорему 2) ему соответствует в обобщенной группе $\mathfrak{F}(B \times A)$ полное отображение множества B в группу A. Но полные отображения образуют подгруппу обобщенной групы $\mathfrak{F}(B \times A)$, следовательно, ${}^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A)$ есть группа.

Инверсным полукольцом называется алгебра с двумя бинарными операциями, одна из которых определяет структуру коммутативной обобщенной группы, а вторая ассоциативна и дистрибутивна относительно первой. Из теорем 6 и 7 следует

Теорема 8. *Если A кольцо, то $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ есть инверсное полукольцо, а $^*\overline{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{L}}(A)$—кольцо.*

Если выбрать в качестве алгебры, на которой рассматриваются случайные элементы, числовую прямую с определенными на ней операциями, то получается

Теорема 9. *Алгебра $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(R^1)$ изоморфна алгебре $^*\Xi$ всех дискретных случайных величин; при этом алгебра $^*\overline{\mathfrak{N}}(R^1)$ изоморфна подалгебре $^*\overline{\Xi}$ всех полных дискретных случайных величин.*

Случайные элементы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ множества A называются независимыми, если для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ элементы $\mathfrak{A}_1(a_1), \ldots, \mathfrak{A}_n(a_n)$ σ-алгебры $\mathfrak{L}$ независимы в смысле независимости случайных событий. Очевидно, если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ независимы, то для любой n-арной операции o, определенной в $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$, будет

$$(2) \qquad P(o(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)(a)) = \sum_{o(a_1, \ldots, a_n)=a} p(\mathfrak{A}_1(a_1)) \ldots p(\mathfrak{A}_n(a_n)).$$

В множестве $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ всех случайных элементов множетства A можно ввести отношение ε_p, полагая $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in \varepsilon_p$ тогда и только тогда, когда для всякого $a \in A$ выполняется равенство $p(\mathfrak{A}_1(a)) = p(\mathfrak{A}_2(a))$. Очевидно, ε_p есть отношение эквивалентности. Элементы фактор-множества $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)/\varepsilon_p$ будем называть законами распределения. Заметим, что свойство полноты есть свойство закона распределения, ибо этим свойством ε_p-эквивалентные случайные элементы обладают одновременно. Разбиение $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ на законы расрпеделения стабильно относительно всех операций алгебры $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ в следующем смысле.

Теорема 10. *Если случайные элементы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ независимы и случайные элементы $\tilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{A}}_n$ независимы и при этом $(\mathfrak{A}_i, \tilde{\mathfrak{A}}_i) \in \varepsilon_p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то для всякой n-арной операнции o, определенной на $^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$, случайные элементы $\mathfrak{A} = o(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ и $\tilde{\mathfrak{A}} = o(\tilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{A}}_n)$ ε_p-эквивалентны..*

Доказательство. Следует из формулы (2).

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)/\varepsilon_p$—законы распределения независимых случайных элементов $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$. Закон распределения случайного элемента $\mathfrak{A} = o(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ будем считать результатом операции o, примененной к $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ясно, что операции над законами распределения, вообще говоря, являются частичными, так как не для всякого набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)/\varepsilon_p$ найдутся независимые случайные элементы $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$ такие, что $\mathfrak{A}_i \in \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Выяснение строения частичной алгебры законов распределения на данной алгебраической системе представляется трудной и весьма интересной задачей. Более просто устроена, по-видимому, частичная алгебра полных законов распределения.

§ 3. СЛУЧАЙНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Бинарным $\mathfrak{L}$-отношением между множествами A и B называется всякое $\mathfrak{L}$-множество, определенное на декартовом произведении $A \times B$, т.е. всякий элемент множества $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$. Если $\mathfrak{L} = \{0,1\}$, мы получаем обычные бинарные отношения. Значение бинарного $\mathfrak{L}$-отношения $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ на паре (a,b) будем обозначать $f(a, b)$. Сруктура декартова произведения позволяет ввести для бинарных $\mathfrak{L}$-отношений две специальные операции.

а) Обращение. Если $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$, то обратным к нему называется бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f^{-1} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B \times A)$ такое, что для любых $a \in A$, $b \in B$ имеет место равенство $f^{-1}(b,a) = f(a,b)$.

б) Умножение. Если $f_1 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$, $f_2 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B \times C)$, то произведением f_1 и f_2 называется бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f_2 \circ f_1 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times C)$ такое, что $f_2 \circ f_1(a,c) = \bigvee\limits_{b \in B} (f_1(a,b) \wedge f_2(b,c))$ для всех $a \in A$, $c \in C$.

Имеют место обычные формулы:

$$\overset{1}{\overline{f}}{}^{1} = f,\quad \overset{1}{\overline{f_2 \circ f_1}} = \overset{-1}{f_1} \circ \overset{-1}{f_2},\quad \overset{1}{\overline{f_1 \vee f_2}} = \overset{1}{f_1} \vee \overset{-1}{f_2},\quad \overset{-1}{\overline{f_1 \wedge f_2}} = \overset{-1}{f_1} \wedge \overset{-1}{f_2}.$$

Можно показать, что необходимым и достаточным условием ассоциативности умножения бинарных $\mathfrak{L}$-отношений является бесконечная дистрибутивность решетки $\mathfrak{L}$ [10].

По аналогии с теорией обычных бинарных отношений вводятся следующие понятия для бинарных $\mathfrak{L}$-отношений:

а) Распространение бинарного $\mathfrak{L}$-отношения $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ на множество всех $\mathfrak{L}$-множеств есть бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $\check{f}$ между множествами $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ и $\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B)$ такое, что для любых $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ и $\mathfrak{B} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B)$ будет $\check{f}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \bigvee\limits_{a \in A, b \in B} (f(a, b) \wedge \mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{B}(b))$;

б) Срез бинарного $\mathfrak{L}$-отношения $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ через $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ есть $\mathfrak{L}$-множество $f(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B)$ такое, что $f(\mathfrak{A})(b) = \check{f}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_b)$;

в) Первая проекция $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ есть $\mathfrak{L}$-множество $pr_1 f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ такое, что $pr_1 f(a) = \check{f}(\mathfrak{A}_a, B)$;

г) Вторая проекция $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ есть $\mathfrak{L}$-множество $pr_2 f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B)$ такое, что $pr_2 f(b) = \check{f}(A, \mathfrak{B}_b)$.

Имеют место следующие соотношения: а) если $f_1 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$, $f_2 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B \times C)$ и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$, то $f_2 \circ f_1(\mathfrak{A}) = f_2(f_1(\mathfrak{A}))$; б) $pr_1 \overset{1}{f} = pr_2 f$, $pr_2 \overset{-1}{f}$ —

$= pr_1 f$; в) $pr_1 f = \overset{1}{f}(B)$, $pr_2 f = f(A)$; г) $pr_1 f(a) = \overset{-1}{f} \circ f(a, a)$, $pr_2 f(b) = f \circ \overset{1}{f}b), b)$; д) $pr_1 f_2 \circ f_1 = \overset{-1}{f_1}(pr_1 f_2)$, $pr_2 f_2 \circ f_1 = f_2(pr_2 f_1)$.

Бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ называется 1-полным, если $pr_1 f = A$, и 2-полным, если $pr_2 f = B$. 1- и 2-полное бинарное $\mathfrak{L}$-отношение называется полным. Совокупность всех полных бинарных $\mathfrak{L}$-отношений между множествами A и B будем обозначать $\overline{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$. Легко видеть, 1-, 2-полнота и полнота стабильны относительно умножения бинарных $\mathfrak{L}$-отношений. Например, если $f_1 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ и $f_2 \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B \times C)$ полны, то $pr_1 f_2 \circ f_1 = \overset{-1}{f_1}(pr_1 f_2) = \overset{-1}{f_1}(B) = pr_1 f_1 = A$ и $pr_2 f_2 \circ f_1 = f_2(pr_2 f_1) = f_2(B) = pr_2 f_2 = C$, т.е. $f_2 \circ f_1$ полно.

Следующий класс бинарных $\mathfrak{L}$-отношений при $\mathfrak{L} = \{0, 1\}$ становится классом отображений (функций). Бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ называется однозначным, если для всякого $a \in A$ и различных $b_1, b_2 \in B$ будет $f(a, b_1) \wedge f(a, b_2) = 0$. Совокупность всех однозначных бинарных $\mathfrak{L}$-отношений между множествами A и B обозначается $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$. Примером однозначного бинарного $\mathfrak{L}$-отношения служит тождественное бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $\Delta_A \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ такое, что

$$\Delta_A (a_1, a_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } a_1 = a_2, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Известно [7], [9], что для того, чтобы бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ было однозначным, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \overset{-1}{f} < \Delta_B$. Бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ называется однородным, если $A = B$. Однородное однозначное бинарное $\mathfrak{L}$-отношение называется $\mathfrak{L}$-преобразованием соответствующего множества. Частный случай следующей теоремы (для булевых матриц) доказывается в [8].

Теорема 11. *Если $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ есть 2-полное $\mathfrak{L}$-преобразование множества A, то $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} (A \times A)$, т.е. является полным $\mathfrak{L}$-преобразованием этого множества.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ и f есть 2-полное $\mathfrak{L}$-преобразование. Тогда, по условию однозначности, $f \circ \overset{-1}{f} \leqslant \Delta_A$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Действительно, для всякого $a \in A$ выполняется $\overset{-1}{f} \circ f(a, a) = pr_2 f(a)$. Но $pr_2 f = A$, а тогда $f \circ \overset{-1}{f} = \Delta_A$, откуда $pr_1 f = \overset{-1}{f}(A) = \overset{1}{f}(pr_2 f) = pr_1 f \circ \overset{-1}{f} = pr_1 \Delta_A = A$, т. е. f 1-полно, чем и завершается доказательство теоремы.

Однозначное бинарное $\mathfrak{L}$-отношение $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ называется взаимно однозначным, если $\overset{-1}{f}$ также однозначно. Совокупность всех взаимно однозначных бинарных $\mathfrak{L}$-отношений между множествами A и B обозначается $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$. Оказывается, $\bar{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ совпадает с $\bar{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$, т. е. полные $\mathfrak{L}$-преобразования являются и взаимно однозначными $\mathfrak{L}$-преобразованиями. Действительно, если $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$, то $f \circ \overset{-1}{f} = \Delta_A$, откуда, переходя к обратным, получаем $\overset{-1}{f} \circ f = \Delta_A$, что и означает однозначность $\overset{-1}{f}$.

Изучим некоторые свойства случайных бинарных отношений.

Случайным бинарным отношением между множествами A и B называется всякое случайное подмножество декартова произведения $A \times B$. Таким образом, дискретными случайными бинарными отношениями между множествами A и B будут элементы множества $^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ и только они. Как и в случае случайных подмножеств, слово «дискретное» мы будем часто опускать, поскольку никакие другие случайные бинарные отношения нам не встретятся.

Теорема 12. *Пусть $\mathfrak{A} \in {}^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A)$ и $\mathscr{B} \in {}^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(B)$—случайные подмножества множеств A и B соответственно, $f \in {}^*\mathfrak{P}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$—случайное бинарное отношение между множествами A и B. Тогда $\check{f}(\mathfrak{A}, \mathscr{B}) \in \mathfrak{L}$, т. е. является случайным событием.*

Доказательство. Следует из дискретности $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, f и замкнутости $\mathfrak{L}$ относительно счетных объединений и пересечений.

В частности, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$—случайные элементы, то число $p(\check{f}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$ есть вероятность того, что пара случайных элементов $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ входит в случайное бинарное отношение f. Из теоремы 12 следует, что срез случайного бинарного отношения через случайное подмножество есть случайное подмножество и что проекции случайного бинарного отношения суть случайные подмножества.

Случайным отображением множества A в множество B (или случайной функцией, определенной в A и принимающей значения в B) называется однозначное случайное бинарное отношение $f \in {}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$.

Теорема 13. *Для того, чтобы случайное бинарное отношение было случайной функцией, необходимо и достаточно, чтобы срез его через любой случайный элемент был снова случайным элементом.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in {}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$ есть случайная функция, а $\mathfrak{A} \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(A)$—случайный элемент множества A. Из теоремы 12 следует, что $f(\mathfrak{A})$ есть случайное подмножество множества B. Покажем, что оно нормально. Действительно, если b_1 и b_2—различные элементы множества B, то

$$f(\mathfrak{A})(b_1) \wedge f(\mathfrak{A})(b_2) = \bigvee_{a \in A} (f(a, b_1) \wedge \mathfrak{A}(a)) \wedge \bigvee_{a \in A} (f(a, b_2) \wedge \mathfrak{A}(a)) =$$

$$= \bigvee_{a,\ \bar{a}\in A} (f(a, b_1) \wedge \mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(a) \wedge f(a, b_2)) = \bigvee_{a\in A} (f(a, b_1) \wedge f(a, b_2) \wedge \mathfrak{A}(a)) = 0,$$

т. е. $f(\mathfrak{A}) \in {}^*\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}}(B)$. Достаточность. Пусть срез случайного бинарного отношения f через любой случайный элемент будет снова случайным элементом. Возьмем для произвольного $a \in A$ элементарное $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{A}_a$, которое, конечно, является случайным элементом множества A. Тогда для различных b_1, b_2 получаем:

$$0 = f(\mathfrak{A}_a)(b_1) \wedge f(\mathfrak{A}_a)(b_2) = f(a, b_1) \wedge 1 \wedge f(a, b_2) \wedge 1 = f(a, b_1) \wedge f(a, b_2),$$

т. е. f однозначно. Теорема доказана.

Если $\mathfrak{L} = \{0, 1\}$, то доказанная теорема превращается в известный признак функциональности бинарного отношения.

Случайным преобразованием множества A называется всякая случайная функция $f \in {}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$.

Теорема 14. *Совокупность ${}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ всех случайных преобразований множества A есть регулярная полугруппа относительно умножения случайных преобразований.*

Доказательство. Ассоциативность умножения следует из дистрибутивности $\mathfrak{L}$. Из теоремы 13 получаем однозначность суперпозиции (произведения) двух случайных преобразований, и остается выяснить лишь ее дискретность. Она получается несложными расуждениями из дискретности сомножителей и их однозначности. Итак, ${}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ есть полугруппа. Покажем, что она регулярна, т. е. что уравнение $f \circ x \circ f = f$ разрешимо в ней для каждого ее элемента f. Пусть $a \in A$ и $f \in {}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$. Рассмотрим множество всех таких элементов $a \in A$, что $f(\bar{a}, a)$ отлично от 0 и 1. В силу дискретности f, это множество не более чем счетно, и мы можем упорядочить его, индексируя натуральным рядом: $a_i \leqslant a_j$ тогда и только тогда, когда $i \leqslant j$. Определим теперь $\bar{f}$ следующим образом. Если для данного a_1 имеется $a_2 \in A$ такой, что $f(a_2, a_1) = 1$, то положим, выбирая один из таких элементов a_2,

$$\bar{f}(a_1, \tilde{a}_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{a}_2 = a_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если же при всех $a_2 \in A$ будет $f(a_2, a_1) \neq 1$, положим $\bar{f}(a_1, a_2)$ равным элементу $(\bigvee_{\bar{a}_2<a_2} f(\bar{a}_2, a_1))' \wedge f(a_2, a_1)$ σ-алгебры $\mathfrak{L}$ (он принадлежит ей в силу дискретности f). Очевидно, $\bar{f}$ дискретно, ибо если $\bar{f}(a_1, a_2)$ отлично от 0 и 1, то хотя бы одно из значений $f(a_2, a_1)$, $a_2 < a_2$, отлично от 0 и 1. Далее, пусть a—некоторый фиксированный элемент множества A, а a_1 и a_2 различны и при этом $f(a_1, a) \neq 0$ и $f(a_2, a) \neq 0$. Пусть $a_1 < a_2$. Тогда

$$f(a, a_1) \wedge \bar{f}(a, a_2) = (\bigvee_{a_1 < a_1} f(a_1, a))' \wedge f(a_1, a) \wedge (\bigvee_{a_2 < a_2} f(a_2, a))' \wedge f(a_2, a) =$$

$$= (\bigvee_{a_2 < a_2} f(a_2, a))' \wedge f(a_1, a) \wedge f(a_2, a) = 0.$$

Значит, $\bar{f}$ однозначно. Прямым вычислением проверяется равенство $\bigvee_{a_2 \in A} \bar{f}(a_1, a_2) = \bigvee_{a_2 \in A} f(a_2, a_1)$. Тогда получаем:

$$f \circ \bar{f} \circ f(a_1, a_2) = \bigvee_{\bar{a}, \bar{\bar{a}} \in A} (f(a_1, a) \wedge \bar{f}(a, \bar{\bar{a}}) \wedge f(\bar{\bar{a}}, a_2))_{\bar{a}=a_2} =$$

$$= \bigvee_{\bar{\bar{a}} \in A} (f(a_1, a_2) \wedge \bar{f}(a_2, \bar{\bar{a}}) \wedge f(\bar{\bar{a}}, a_2)) =$$

$$= f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{a \in A} (\bar{f}(a_2, \bar{\bar{a}}) \wedge f(\bar{\bar{a}}, a_2)) = f(a_1, a_2) \wedge \bigvee_{a \in A} \bar{f}(a_2, \bar{\bar{a}}) = f(a_1, a_2),$$

т. е. $f \circ \bar{f} \circ f = f$. Поскольку $\bar{f} \in^* \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$, теорема доказана.

Теорема 15. *Совокупность всех взаимно однозначных случайных преобразований множества есть обобщенная группа Вагнера (инверсная полугруппа).*

Доказательство. Известно [9], что совокупность всех взаимно однозначных $\mathfrak{L}$-преобразований некоторого множества при бесконечно дистрибутивной решетке $\mathfrak{L}$ является обобщенной группой Вагнера. Поскольку совокупность взаимно однозначных случайных преобразований множества замкнута относительно их умножения и обращения, то она образует обобщенную подгруппу Вагнера в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$. Это и доказывает теорему.

Теорема 16. *Совокупность всех польных случайных преобразований множества есть группа.*

Доказательство. Известно [9], что полные $\mathfrak{L}$-преобразования образуют группу при бесконечно дистрибутивной решетке $\mathfrak{L}$. Полные случайные преобразования образуют подмножество этой группы, замкнутое относительно умножения и обращения. Теорема доказана.

Две случайные функции $f_1 \in^* \mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times B)$, $f_2 \in {}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(B \times C)$ называются независимыми, если для любых $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ элементы $f_1(a, b)$ и $f_2(b, c)$ σ-алгебры $\mathfrak{L}$ независимы. На множестве ${}^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ всех случайных преобразований множества A введем частичную операцию независимого умножения, символом которой будет $*$. $f_2 * f_1$ считаем определенным тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 независимы и в этом случае полагаем $f_2 * f_1 = f_2 \circ f_1$. Легко видеть, для любых $a_1, a_2 \in A$

(3) $$p(f_2 * f_1(a_1, a_2)) = \sum_{a \in A} p(f_1(a_1, a))\, p(f_2(a, a_2)),$$

причем сумма справа не более чем счетна. Это умножение играет основную ных преобразований множества A рассмотрим отношение ε_p такое, что роль в теории вероятностей. Если на множестве $^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)$ всех случай- $(f_1, f_2) \in \varepsilon_p$ тогда и только тогда когда, для любой пары (a_1, a_2) элементов A будет $p(f_1(a_1, a_2)) = p(f_2(a_1, a_2))$, то, легко видеть, ε_p есть отношение эквивалентности. Из формулы (3) следует

Теорема 17. *ε_p стабильно относительно независимого умножения.*

Формулу (3), следовательно, можно считать определением умножения в фактор-множестве $^*\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}(A \times A)/\varepsilon_p$. Элементы этого фактор-множества называются стохастическими матрицами. Тогда полученная операция есть не что иное, как умножение стохастических матриц в обычном смысле. При достаточно богатой σ-алгебре $\mathfrak{L}$ операция эта становится всюду определенной (точнее: если $\mathfrak{L}$ такова, что для любых двух стохастических матриц найдутся принадлежащие им независимые случайные преобразования). Заметим, что так же, как и в случае законов распределения, свойства полноты случайного преобразования суть свойства полноты соответствующей стохастической матрицы. 1-полнота и 2-полнота выражаются соответственно равенствами: $\sum\limits_{a_2 \in A} p(f(a_1, a_2)) = 1$, $\sum\limits_{a_1 \in A} p(f(a_1, a_2))$ 1.

Причем, в следствие теоремы 11, 2-полнота стохастической матрицы влечет ее 1-полноту.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бурбаки Н., *Алгебра*, Москва 1962.

[2] Вагнер В. В., *Обобщенные группы*, ДАН СССР *84* (1952), 1119—1122.

[3] Вагнер В. В., *Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков*. Тр. семин. по вект. и тенз. анализу, вып. *10* (1956), 31—88.

[4] Вагнер В. В., *Теория отношений и алгебра частичных отображений*, Сб. „Теория полугрупп и ее приложения", Саратов 1965.

[5] Mişicu M., *Relatii statistice*, Studii si cercetari matem. *3* (1963), 465—483.

[6] Riguet J., *Relations binaires, fermetures, correspondance de Galois*, Bull. Soc. Math. France *76* (1948), 114—155.

[7] Riguet J., *Sur l'extension de calcul des relations binaires au calcul des matrices à éléments dans une algebre de Boole complète*, Acad. Sci. C. R. *238* (1954), 2382—2385.

[8] Rutherford D. E., *Inverses of Boolean matrices*, Proc. Glasgow Math. Assos. *6* (1963), 49—53.

[9] Салий В. Н., *Бинарные $\mathfrak{L}$-отношения*, Изв. высш. учебн. заведений, Математика *1* (1965), 133—144.

[10] Салий В. Н., *Представление алгебраических систем $\mathfrak{L}$-отношениями*. Саратов 1965.

[11] Салий В. Н., *Полугруппы $\mathfrak{L}$-множеств*, Сибирский матем. журн. VIII (1967), 659—668.

Поступило 22. 11. 1967

Саратовский государственный университет
Саратов