Ladislav Mišík

Über einen Satz von E. Hopf

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 15 (1965), No. 4, 285--295

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126448

ÜBER EINEN SATZ VON E. HOPF

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

E. Hopf hat in [3], S. 46 folgenden Satz bewiesen:

Satz. *Es sei* $(X, \mathcal{M}, m)$ *ein* σ*-endlicher Massraum und es sei* T *eine solche eineindeutige messbare Transformation, welcher inverse Transformation auch messbar ist, und welche die folgende Bedingung erfüllt: für* $A \in \mathcal{M}$ *ist* $m(A) = 0$ *dann und nur dann wenn* $m(T^{-1}(A)) = 0$ *ist. Dann gilt:* $X = X_1 \cup X_2$, *wobei* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, X_1 *und* X_2 *sind invariante Mengen,* $X_1 = \bigcup \{T^n(A) : n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ *und* $A \cap T^{-n}(A) = \emptyset$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *und aus* $B \subset X_2$, $B \cap T^{-n}(B) = 0$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *folgt, dass* $m(B) = 0$ *ist. Diese Zerlegung ist bis auf die Nullmengen eindeutig bestimmt und ist für jede Transformation* T^n *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *dieselbe.*

Ein anderer Beweis dieses Satzes ist in [1], S. 23. J. R. Choksi [4] hat bei geeigneten Formulierungen den Satz für allgemeinere Transformationen bewiesen. In allen Beweisen dieses Satzes benützt man grundsätzlich den Begriff Mass zur Konstruktion dieser Zerlegung. In diesem Artikel beweisen wir den Satz für Booleschen σ-Algebren ohne das Mass zu benützen. Leider muss man den Auswahlaxiom benützen. Den Satz werden wir nur für Booleschen σ-Algebren, welche eine unten beschriebene Eigenschaft haben, beweisen. Die Algebra aller messbaren Mengen in einem σ-endlichen Massraum hat immer diese Eigenschaft.

Im ganzen Artikel wird N die Menge aller natürlichen Zahlen bedeuten. Das System $(X, \mathcal{M}, m)$ werden wir σ-endlicher Massraum nennen, wenn folgendes gilt: A ist eine nicht leere Menge, $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra der Mengen, d. h. ein nicht leeres System der Mengen, das mit jeder Menge auch ihr Komplement und mit einer Folge von Mengen auch ihre Vereinigung enthält und m ist eine nicht negative σ-additive Funktion, die auf $\mathcal{M}$ definiert ist und für welche $X = \bigcup \{A_n : n \in N\}$, wobei $A_n \in \mathcal{M}$ und $m(A_n) < \infty$ für $n \in N$ ist. Es sei $\mathcal{N}$ die Menge aller derjenigen Mengen aus $\mathcal{M}$, welche das Mass Null haben.

Es sei jetzt $\mathcal{M}$ eine Boolesche σ-Algebra, d. h. eine Boolesche Algebra für welche $\bigcup \{A_n : n \in N\}$ für jede Folge $\{A_n\}_{n \in N}, A_n \in \mathcal{M}$ für $n \in N$, existiert und aus $\mathscr{M}$ ist. Das Zeichen $\mathscr{N}$ wird ein σ-Ideal in $\mathscr{M}$ bedeuten, d. h. ein Ideal für das die Vereinigung einer Folge von Elementen aus $\mathscr{N}$ wieder in $\mathscr{N}$ liegt. In die Boolesche σ-Algebra $\mathscr{M}$ führen wir die Relation $\leqq$ (1). Für $A_1, A_2 \in \in \mathscr{M}$ gilt $A_1 \leqq A_2$ dann und nur dann wenn $A_1 - A_2 \in \mathscr{N}$ ist. Wir sagen, dass $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität nach unten (nach oben) bezüglich $\mathscr{N}$ hat, wenn für jede Kette $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$ eine höchstens abzählbare Unterkette $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ mit folgender Eigenschaft existiert: für jede $A \in \mathscr{A}$ gilt die Beziehung $\bigcap \{B : B \in \mathscr{B}\} \leqq A$ $(A \leqq \bigcup \{B : B \in \mathscr{B}\})$. Wenn $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität nach unten und nach oben bezüglich $\mathscr{N}$ hat, dann sagen wir, dass $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$ hat. Wird eine Rede über eine Kette in $\mathscr{M}$ sein, dann werden wir diese Kette bezüglich der Relation $\leqq$ verstehen.

Es sei $(X, \mathscr{M}, m)$ ein Massraum. Dann ist das System $\mathscr{M}$ aus dem Massraum $(X, \mathscr{M}, m)$ eine Boolesche σ-Algebra. Das System $\mathscr{N}$ ist ein σ-Ideal in $\mathscr{M}$. Wir können also die Relation $\leqq$ in $\mathscr{M}$ einführen.

Lemma 1. *Es sei $(X, \mathscr{M}, m)$ ein σ-endlicher Massraum. Dann hat $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$.*

Beweis. Es sei $(X \mathscr{M}, m)$ ein endlicher Massraum, d. h. $m(X) < \infty$. Es sei $\mathscr{A}$ eine Kette in $\mathscr{M}$. Weiter sei $\alpha = \inf \{m(A) : A \in \mathscr{A}\}$ und $\beta = \sup \{m(A) : A \in \in \mathscr{A}\}$. Dann existiert eine solche höchstens abzählbare Kette $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, bzw. $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ für die $\alpha = \inf \{m(B) : B \in \mathscr{B}\}$, bzw. $\beta = \sup \{m(C) : C \in \mathscr{C}\}$ gilt. Es ist evident, dass $B_0 = \cap \{B : B \in \mathscr{B}\} \in \mathscr{M}$ und $m(B_0) \leqq \alpha$, bzw. $C_0 = = \bigcup \{C : C \in \mathscr{C}\} \in \mathscr{M}$ und $m(C_0) \geqq \beta$ ist.

Es sei A ein solches Element aus $\mathscr{A}$, dass $A \leqq B$ für jedes $B \in \mathscr{B}$ ist. Dann ist $A \leqq B_0$, weil $A - B_0 = \bigcup \{A - B : B \in \mathscr{B}\} \in \mathscr{N}$ ist. Daraus folgt $m(A) = = m(A \cap B_0) + m(A - B_0) = m(A \cap B_0)$. Wäre $B_0 - A \notin \mathscr{N}$, dann müsste $m(B_0) = m(A \cap B_0) + m(B_0 - A) = m(A) + m(B_0 - A) > \alpha$ sein, und das ist unmöglich.

Wenn $A \in \mathscr{A}$ ein solches Element ist, für das ein $B \in \mathscr{B}$ so existiert, dass $B \leqq A$ ist, dann ist $B_0 - A \subset B - A \in \mathscr{N}$. Also ist $B_0 \leqq A$.

Es sei A ein solches Element aus $\mathscr{A}$, für welches $C \leqq A$ für jedes $C \in \mathscr{C}$ ist. Dann gilt $C_0 \leqq A$, weil $C_0 - A = \bigcup \{C : C \in \mathscr{C}\} - A = \bigcup \{C - A : C \in \in \mathscr{C}\} \in \mathscr{N}$ gilt. Weiter muss gelten: $m(C_0) = m(A \cap C_0) + m(C_0 - A) = = m(A \cap C_0)$. Aus dieser Gleichung und aus den Beziehungen $\beta \leqq m(C_0) = = m(A \cap C_0) \leqq m(A \cap C_0) + m(A - C_0) = m(A) \leqq \beta$ folgt, dass $m(A - - C_0) = 0$ und deswegen $A \leqq C_0$ ist.

Wenn $A \in \mathscr{A}$ ein solches Element ist für das ein $C \in \mathscr{C}$ so existiert, dass

(1) Die Relation $\leqq$ ist nicht identisch mit der Ordnungsrelation $\subset$ in der Booleschen Algebra.

$A \leqq C$ ist, dann ist $A - C_0 \subset A - C \in \mathscr{N}$. Also ist auch in diesem Falle $A \leqq C_0$.

Also das System $\mathscr{M}$ hat in diesem Falle die Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$.

Wenn $(X, \mathscr{M}, m)$ ein solcher σ-endlicher Massraum mit $m(X) = \infty$ ist, dann existiert ein solcher Massraum $(X, \mathscr{M}, m_1)$, dass $m_1(X) < \infty$ und $m(A) = 0$ dann und nur dann, wenn $m_1(A) = 0$ ist. Aus dem und aus dem früher bewiesenem folgt jetzt die Behauptung des Lemmas.

In weiterem wird h ein σ-Homomorphismus der Boolesche σ-Algebra $\mathscr{M}$ in sich bedeuten, d. h. h ist ein Homomorphismus für den folgendes gilt: $h(\bigcup \{A_n : n \in N\}) = \bigcup \{h(A_n) : n \in N\}$ für jede Folge $\{A_n\}_{n \in N}$, wobei $A_n \in \mathscr{M}$ für $n \in N$. Jetzt definieren wir h^n für $n \in N$ folgendermassen: $h^1 = h$, $h^{n+1} = h(h^n)$, d. h. $h^{n+1}(A) = h(h^n(A))$ für jedes $A \in \mathscr{M}$. Es ist evident, dass h^n für jedes $n \in N$ ein σ-Homomorphismus der Booleschen σ-Algebra $\mathscr{M}$ in sich ist.

Das Element $A \in \mathscr{M}$ heisst invariant bezüglich h, wenn $h(A) = A$ ist. Die Menge aller invarianten Elementen bildet eine Boolesche σ-Algebra. Das Element $A \in \mathscr{M}$ heisst fast invariant bezüglich h, wenn $A + h^n(A) \in \mathscr{N}$ für $n \in N$ ist. Dabei soll $A + B$ die symetrische Differenz der Elementen A und B, d. h. $(A - B) \cup (B - A)$ bedeuten. Das System aller fast invarianten Elementen bildet eine Boolesche σ-Unteralgebra. Diese Behauptung beweist man folgendermassen: Aus den Beziehungen $A + B = (-A) + (-B)$(²) und $(\bigcup \{A_n : n \in N\}) + (\bigcup \{B_n : n \in N\}) \subset \bigcup \{A_n + B_n : n \in N\}$ folgt, dass folgendes gilt: Wenn A ein fast invariantes Element ist, dann gilt $(-A) + h^n(-A) = (-A) = + (-h^n(A)) = A + h^n(A) \in \mathscr{N}$ für jedes $n \in N$, also $-A$ ist ein fast invariantes Element. Wenn jetzt $\{A_n\}_{n \in N}$ eine Folge von fast invarianten Elementen ist, dann gilt $(\bigcup \{A_n : n \in N\}) + h^k(\bigcup \{A_n : n \in N\}) = (\bigcup \{A_n : n \in N\}) + (\bigcup \{h^k(A_n) : n \in N\}) \subset \bigcup \{A_n + h^k(A_n) : n \in N\} \in \mathscr{N}$ für jedes $k \in N$ und also $\bigcup \{A_n : n \in N\}$ ist ein fast invariantes Element.

Es sei $A \in \mathscr{M}$. Dann benennen wir $B \in \mathscr{M}$ ein minimales fast invariantes Element über A, wenn $A \subset B$ ist, B ein fast invariantes Element ist, und wenn für jedes fast invariantes Element C über A die Beziehung $B - C \in \mathscr{N}$ gilt. Die Bezeichnung $[A]$ soll das System aller minimalen fast invarianten Elementen über A bedeuten. Ähnlich führen wir den Begriff des minimalen invarianten Elementes ein. Überall soll man nur fast invariant durch invariant ersetzen. Den System aller minimalen invarianten Elementen über A werden wir durch $[A]^*$ bezeichnen. Für $[A]$ und $[A]^*$ gilt folgender Satz, der über die Existenz und Eindeutigkeit spricht.

(²) $-A$ bedeutet das Komplement von A.

Satz 1. *Es sei $\mathscr{M}$ eine Boolesche σ-Algebra, $\mathscr{N}$ ein σ-Ideal im $\mathscr{M}$ und $\mathscr{M}$ hat die Eigenschaft der σ-Konfinalität nach unten bezüglich $\mathscr{N}$. Es sei h ein σ-Homomorphismus $\mathscr{M}$ in sich. Es sei $A \in \mathscr{M}$. Dann ist $[A]$ und $[A]^*$ nicht leer und weiter gilt es: wenn $B, C \in [A]$, bzw. $B, C \in [A]^*$ ist, so ist $B + C \in \mathscr{N}$.*

Beweis. Es sei $\mathscr{A}$ das System aller (fast) invarianten Elementen aus $\mathscr{M}$ über A. Das System $\mathscr{A}$ ist nicht leer, weil $h(\bigvee) = \bigvee$, wobei $\bigvee$ das grösste Element in $\mathscr{M}$ bedeutet. Es sei $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}$ eine maximale Kette bei der Relation $\leqq$ in $\mathscr{M}$. Weil $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität nach unten bezüglich $\mathscr{N}$ hat, existiert eine höchstens abzählbare Kette $\mathscr{B} \subset \mathscr{R}$, so dass für jedes $R \in \mathscr{R}$ folgendes gilt: wenn $B_0 = \bigcap \{B : B \in \mathscr{B}\}$ ist, dann ist $B_0 - R \in \mathscr{N}$. Es sei C ein beliebiges (fast) invariantes Element über A. Dann ist $B_0 \cap C \in \mathscr{R}$. Das bekommen wir folgendermassen: Wenn $R \in \mathscr{R}$ ein solches Element ist, dass ein $B \in \mathscr{B}$ mit $B \leqq R$ existiert, dann ist $B_0 \cap C - R \subset B_0 - R \subset B - R \in \mathscr{N}$ und $B_0 \cap C \leqq R$. Wenn $R \in \mathscr{R}$ ein solches Element ist, dass $R \leqq B$ für jedes $B \in \mathscr{B}$ ist, dann ist $B_0 - R \in \mathscr{N}$ und auch $B_0 \cap C \leqq R$. Damit haben wir festgestellt, dass $B_0 \cap C \leqq R$ für jedes $R \in \mathscr{R}$ gilt. Aus der Maximalität von $\mathscr{R}$ geht hervor, dass $B_0 \cap C \in \mathscr{R}$ und also $B_0 - C = B_0 - (B_0 \cap C) \in \mathscr{N}$. Damit haben wir festgestellt, dass B_0 ein minimales (fast) invariantes Element über A ist. Also ist $[A]^* \neq 0$ ($[A] \neq 0$).

Es sei $B, C \in [A]$, bzw. $B, C \in [A]^*$. Dann ist $B - C \in \mathscr{N}$ und $C - B \in \mathscr{N}$ und auch $B + C \in \mathscr{N}$.

Das Element $A \in \mathscr{M}$ ist ein wanderndes Element bei σ-Homomorphismus h, wenn $h^i(A) \cap h^j(A) = \bigwedge$ für $i \neq j$, $i, j \in N$ oder $i = 0$, oder $j = 0$, ist und $\bigwedge$ ist das kleinste Element von $\mathscr{M}$. Es ist evident: wenn A ein wanderndes Element bei h ist, dann ist auch $B \subset A$ ein wanderndes Element bei h. Ausserdem gilt noch, dass $h^n(A)$ ein wanderndes Element bei h für jedes $n \in N$ ist, wenn A ein wanderndes Element bei h ist. Ein Element A ist ein fast wanderndes Element bei h, wenn $A \cap \bigcup \{h^n(A) : n \in N\} \in \mathscr{N}$ gilt. Es ist evident: wenn A ein fast wanderndes Element bei h ist, dann auch $B \subset A$ ein fast wanderndes Element bei h ist. Wenn $A \notin \mathscr{N}$ und A ein fast wanderndes Element bei h ist, dann ist $B = A - \bigcup \{h^n(A) : n \in N\}$ ein wanderndes Element bei h und $A + B \in \mathscr{N}$.

Lemma 2. *Es sei $A \in [F]$ und $B \in [G]$. Dann gilt $A \cup B \in [F \cup (G - A)]$. Ähnlich gilt $A \cup B \in [F \cup (G - A)]^*$, wenn $A \in [F]^*$ und $B \in [G]^*$ ist.*

Beweis. Es sei $A \in [F]^*$ ($A \in [F]$) und $B \in [G]^*$ ($B \in [G]$). Zuerst ist $F \cup (G - A) \subset F \cup G \subset A \cup B$. Weil $A \cup B$ ein (fast) invariantes Element ist, zum Beweis, dass $A \cup B \in [F \cup (G - A)]^*$ ($A \cup B \in [F \cup (G - A)]$) ist, genügt es nur zu zeigen, dass für jedes (fast) invariantes Element C über $F \cup (G - A)$ die Relation $A \cup B \leqq C$ gilt. Es sei also C ein (fast) invariantes Element über $F \cup (G - A)$. Dann ist $C \cup A$ ein (fast) invariantes Element über F und auch über G. Es ist also $A \leqq C \cup A$ und $B \leqq C \cup A$. Weil auch $A \leqq C$ ist, ist auch $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - (C \cup A)) \in \mathcal{N}$. Daraus folgt jetzt $A \cup B \leqq C$.

Wenn $A \notin \mathcal{N}$ ein (fast) wanderndes Element bei h ist, dann heisst jedes Element aus $[A]^*$ ($[A]$) (fast) dissipativ bei h. Es gilt:

Lemma 3. *Das System $\mathcal{D}$ aller fast dissipativen Elemente ist additiv und monoton nach unten, d. h. wenn A, $B \in \mathcal{D}$ ist, dann ist auch $A \cup B \in \mathcal{D}$ und wenn $\{A_n\}_{n \in N}$ eine nicht fallende Folge von Elementen aus $\mathcal{D}$ ist, dann ist $\bigcup \{A_n : n \in N\} \in \mathcal{D}$. Das System $\mathcal{D}^*$ aller dissipativen Elemente ist additiv und monoton nach unten.*

Beweis. Es sei A, $B \in \mathcal{D}$, d. h. es existieren solche fast wandernde Elemente F, $G \notin \mathcal{N}$, dass $A \in [F]$ und $B \in [G]$, wobei $F \subset A$ und $G \subset B$ sind. Dann ist das Element $H = F \cup (G - A) \notin \mathcal{N}$ und ist fast wanderndes bei h. Es ist nämlich:

$$(1)\ H \cap h^n(H) = (F \cup (G - A)) \cap (h^n(F) \cup (h^n(G) - h^n(A))) = \\ = (F \cap h^n(F)) \cup (F \cap (h^n(G) - h^n(A))) \cup ((G - A) \cap h^n(F)) \cup ((G - \\ - A) \cap (h^n(G) - h^n(A))) \subset (F \cap h^n(F)) \cup (A + h^n(A)) \cup (G \cap \\ \cap h^n(G)) \in \mathcal{N}.$$

Aus dem Lemma 2 folgt jetzt, dass $A \cup B \in [H]$. Daraus folgt nun $A \cup B \in \mathcal{D}$.

Es sei $\{A_n\}_{n \in N}$ eine nicht fallende Folge von fast dissipativen Elementen. Dann existiert eine solche Folge $\{F_n\}_{n \in N}$ von fast wandernden Elementen die nicht in $\mathcal{N}$ liegen, dass $A_n \in [F_n]$ für jedes $n \in N$ ist. Wir legen $B_1 = F_1$ und $B_{n+1} = B_n \cup (F_{n+1} - A_n)$ für $n \in N$ und $B = \bigcup \{B_n : n \in N\}$. Aus der Beziehung

$$(2)\ B_{n+1} \cap h^k(B_{n+1}) \subset (B_n \cap h^k(B_n)) \cup (A_n + h^k(A_n)) \cup (F_{n+1} \cap (h^k(F_{n+1}))$$

die für jedes $n \in N$ gültig ist, folgt auf Grund der vollständigen Induktion, dass die Elemente B_n für jedes $n \in N$ fast wandernde Elemente sind. Daraus und aus der Relation

$$(3)\ B \cap h^n(B) = \bigcup \{B_k : k \in N\} \cap h^n (\bigcup \{B_k : k \in N\}) = \\ = (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\}) \cup (\bigcup \{B_i \cap h^n(B_j) : i \neq j, i, j \in N\}) \subset \\ \subset (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) . k \in N\}) \cup (\bigcup \{B_i \cap h^n(B_j) : i < j, i, j \in N\}) \cup \\ \cup (\bigcup \{B_i \cap h^n(B_j) : i > j, i, j \in N\}) = (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\}) \cup \\ \cup (\bigcup \{B_i \cap h^n(B_{j-1} \cup (F_j - A_{j-1})) : i < j, i, j \in N\}) \cup \\ \cup (\bigcup \{(B_{i-1} \cup (F_i - A_{i-1})) \cap h^n(B_j) : i > j, i, j \in N\}) \subset \\ \subset (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\}) \cup (\bigcup \{B_i \cap h^n(B_{j-1}) : i < j, i, j \in N\}) \cup \\ \cup (\bigcup \{B_i \cap h^n(-A_{j-1}) : i < j, i, j \in N\}) \cup (\bigcup \{B_{i-1} \cap h^n(B_j) : i > \\ > j, i, j \in N\}) \cup (\bigcup\{-A_{i-1}) \cap h^n(B_j) : i > j, i, j \in N\}) \subset \\ \subset (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\}) \cup (\bigcup \{B_{j-1} \cap h^n(B_{j-1}) : i <$$

$$< j, i, j \in N\}) \cup (\bigcup \{A_i \cap (-h^n(A_{j-1})) : i < j, j \in N\}) \cup$$
$$\cup (\bigcup \{B_{i-1} \cap h^n(B_{i-1}) : i > j, i, j \in N\}) \cup (\bigcup \{-(A_{i-1}) \cap$$
$$\cap h^n(A_j) : i > j, i, j \in N\}) \subset (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\}) \cup$$
$$\cup (\bigcup \{A_{j-1} - h^n(A_{j-1}) : i < j, i, j \in N\}) \cup (\bigcup \{h^n(A_{i-1}) -$$
$$- A_{i-1} : i > j, i, j \in N\}) \subset (\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\}) \cup$$
$$\cup (\bigcup \{A_k + h^n(A_k) : k \in N\})$$

geht hervor, dass B ein fast wanderndes Element ist.

Man beweist durch vollständige Induktion, dass $A_n \in [B_n]$ ist. Man benutzt dazu nur das Lemma 2. Jetzt zeigen wir, dass $A = \bigcup \{A_n : n \in N\} \in [B]$ ist. Es ist zuerst evident, dass A ein fast invariantes Element über B ist. Das geht aus der Tatsache hervor, dass A_n ein fast invariantes Element über B_n für jedes $n \in N$ ist. Jetzt genügt es zu zeigen, dass für ein fast invariantes Element C über B $A \leqq C$ gilt. Es gilt $A_n \leqq C$ für jedes $n \in N$, weil C ein fast invariantes Element auch über B_n für jedes $n \in N$ ist. Daraus und aus der Relation $A - C = \bigcup \{A_n - C : n \in N\}$ folgt, dass $A \leqq C$ ist. Damit ist das Lemma für den Fall $\mathscr{D}$ bewiesen.

Die Behauptung für $\mathscr{D}^*$ beweist man ähnlich. Man muss nur die Worte fast invariant durch invariant, fast wanderndes Element durch wanderndes Element und fast dissipativ durch dissipativ ersetzen. In der Relation (1) ist jetzt

$$(F \cap h^n(F)) \bigcup (A + h^n(A)) \bigcup (G \cap h^n(G)) = \wedge \cap \wedge \cap \wedge = \wedge .$$

In der Relation (2) ist jetzt ähnlich

$$(B_n \cap h^k(B_n)) \cup (A_n + h^k(A_n)) \cup (F_{n+1} \cap h^k(F_{n+1})) = \wedge$$

und in der Relation (3) ist jetzt

$$(\bigcup \{B_k \cap h^n(B_k) : k \in N\} \cup (\bigcup \{A_k + h^n(A_k) : k \in N\}) = \wedge ,$$

weil $B_k \cap h^n(B_k) = \wedge$ und $A_k + h^n(A_k) = \wedge$ für jedes $k \in N$ ist. Also sind die Elemente H, B_n für jedes $n \in N$ und B wandernde Elemente.

Lemma 4. *Es sei $X \in [A]$, bzw. $X \in [A]^*$ und Y ein fast invariantes, bzw. invariantes Element. Dann ist $X \cap Y \in [A \cap Y]$, bzw. $X \cap Y \in [A \cap Y]^*$.*

Beweis. Das Element $X \cap Y$ ist fast invariant über $A \cap Y$. Es sei Z ein beliebiges fast invariantes Element über $A \cap Y$. Dann ist $Z \cup (-Y)$ ein fast invariantes Element über A und deshalb gilt $X - (Z \cup (-Y)) \in \mathscr{N}$. Es ist $X \cap Y \leqq Z$, weil $(X \cap Y) - Z = X - (Z \cup (-Y))$ ist. Daraus folgt $X \cap Y \in [A \cap Y]$. Ähnlich beweist man die Behauptung für den Fall $X \in [A]^*$.

Satz 2. *Es sei $\mathscr{M}$ eine Boolesche σ-Algebra und $\mathscr{N}$ ein σ-Ideal in $\mathscr{M}$. Es soll $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$ haben. Es sei h ein σ-Homo-*

morphismus $\mathscr{M}$ in sich. Dann existieren zwei solche fast invariante Elemente X_1 und X_2, dass $X_1 \cup X_2 = \bigvee$, $\bigwedge = X_1 \cap X_2$ ist, wobei X_1 entweder $\bigwedge$ oder ein fast dissipatives Element ist, und für X_2 gilt: für jedes fast wanderndes Element $A \subset X_2$ gilt, dass $A \in \mathscr{N}$ ist.

Es sei $X_1 = \bigwedge$ oder sei h ein solcher σ-Homomorphismus, der folgende Eigenschaft hat: wenn B ein fast invariantes Element ist, dass zu $\mathscr{N}$ nicht gehört und über dem fast wandernden Element A ist, dann existiert ein fast wanderndes Element C, dass zu $\mathscr{N}$ nicht gehört und für das $B \in [C]$ ist. Dann gilt für jede andere Zerlegung $\bigvee = X_1^* \cup X_2^*$ mit den oben aufgeführten Eigenschaften, dass $X_1 + X_1^* \in \mathscr{N}$ ist.

Beweis. Wenn für jedes fast wanderndes Element $A \in \mathscr{M}$ gilt $A \in \mathscr{N}$, dann wählen wir $X_1 = \bigwedge$. Wenn die fast dissipativen Elemente in $\mathscr{M}$ existieren, d. h. $\mathscr{D} \neq \emptyset$, dann können wir in $\mathscr{D}$ bei der Relation $\leqq$ eine maximale Kette $\mathscr{A}$ wählen. Wegen der Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$ von $\mathscr{M}$, existiert eine solche höchstens abzählbare Unterkette $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ für die für jedes $A \in \mathscr{A}$ $A \leqq \bigcup \{A_0 : A_0 \in \mathscr{A}_0\}$ gilt. Weil $\mathscr{D}$ additiv und monoton nach unten ist, ist $\bigcup \{A_0 : A_0 \in \mathscr{A}_0\} \in \mathscr{D}$. Jetzt setzen wir $X_1 = \bigcup \{A_0 : A_0 \in \in \mathscr{A}_0\}$. Es sei $X_2 = -X_1$. Wir zeigen jetzt, dass das Element X_2 die Eigenschaft aus dem Satze hat. Es existiert ein fast wanderndes Element A_1 für das $X_1 \in [A_1]$ und $A_1 \notin \mathscr{N}$ ist. Es sei B ein fast wanderndes Element und $B \subset X_2$. Es sei $C \in [B]$. Dann ist $C_1 = X_1 \cup C \in \mathscr{D}$. Weil für jedes $A \in \mathscr{A}$ $A \leqq X_1$ gilt, gilt auch, dass $A \leqq C_1$ für jedes $A \in \mathscr{A}$ ist. Also ist $C_1 \in \mathscr{A}$. Daraus folgt jetzt, dass $C_1 \leqq X_1$ ist. Weil $B \subset C_1$ ist, es ist auch $B \leqq X_1$. Weil zugleich $B \cap X_1 = \bigwedge$ ist, muss $B = (B \cap X_1) \cup (B - X_1) \in \mathscr{N}$ sein.

Es sei jetzt $\bigvee = X_1^* \cup X_2^*$, $X_1^* \cap X_2^* = \bigwedge$, X_1^* ein fast dissipatives Element aus $[A_1^*]$, wobei A_1^* ein fast wanderndes Element ist und es soll X_2^* die folgende Eigenschaft haben: für jedes fast wanderndes Element $A \subset X_2^*$ gilt $A \in \mathscr{N}$. Nach dem Lemma 4 ist $X_1 \cap X_2^* \in [A_1 \cap X_2^*]$ und $X_1^* \cap X_2 \in [A_1^* \cap X_2]$. Die Elemente $A_1 \cap X_2^*$ und $A_1^* \cap X_2$ sind fast wandernde Elemente, welche in X_2^*, bzw. X_2 enthalten sind. Wenn $X_1 = \bigwedge$ ist, dann muss auch $X_1^* = \bigwedge$ und $X_1 + X_1^* \in \mathscr{N}$ sein. Wenn $X_1 \neq \bigwedge$, dann muss wegen der Eigenschaft von σ-Homomorphismus h und wegen der Eigenschaft von Elementen X_2^* und X_2, $X_1 \cap X_2^* \in \mathscr{N}$ und $X_2 \cap X_1^* \in \mathscr{N}$ sein. Daraus folgt, dass $X_1 + X_1^* = (X_1 \cap X_2^*) \cup (X_1^* \cap X_2) \in \mathscr{N}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Ähnlich beweist man den folgenden Satz:

Satz 2*. *Es sei $\mathscr{M}$ eine Boolesche σ-Algebra und $\mathscr{N}$ ein σ-Ideal in $\mathscr{M}$. Es soll $\mathscr{M}$ die Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$ haben. Es sei h ein σ-Homomorphismus $\mathscr{M}$ in sich. Dann existieren zwei solche invariante Elemente X_1 und X_2, dass $X_1 \cap X_2 = \bigwedge$, $\bigvee = X_1 \cup X_2$ ist, wobei X_1 entweder $\bigwedge$ oder ein* *dissipatives Element ist und h auf $\mathcal{M} \cap X_2$(3) konservativ ist, d. h. für jedes wanderndes Element $A \subset X_2$ gilt $A \in \mathcal{N}$.*

Es sei $X_1 = \Lambda$, oder h ein solcher σ-Homomorphismus, der folgende Eigenschaft hat: wenn B ein invariantes Element, das zu $\mathcal{N}$ nicht gehört und über dem wandernden Element A ist, dann existiert ein wanderndes Element C das zu $\mathcal{N}$ nicht gehört und für das $B \in [C]$ ist. Dann gilt für jede Zerlegung $\bigvee = X_1^* \cup X_2^*$ mit oben beschriebenen Eigenschaften, dass $X_1 + X_1^* \in \mathcal{N}$ ist.

Wir bemerken, dass die zweite Behauptung im Satze 2 nich gilt, wenn $X_1 \neq \Lambda$ und der σ-Homomorphismus h die Eigenschaft im zweiten Absatz des Satzes 2 nicht erfüllt. Tatsächlich, es sei h ein solcher σ-Homomorphismus $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$, der die Eigenschaft vom zweiten Absatz nicht erfüllt. Dann existiert ein fast invariantes Element B das zu $\mathcal{N}$ nicht gehört und für das jedes fast wanderndes Element C mit der Eigenschaft $B \in [C]$ zu σ-Ideal $\mathcal{N}$ gehört. Es sei $\bigvee = X_1 \cup X_2$ eine Zerlegung mit den Eigenschaften aus dem Satze 2. Weil $B = (X_1 \cap B) \cup (X_2 \cap B) \notin \mathcal{N}$ ist, ist es entweder $X_1 \cap B \notin \mathcal{N}$ oder $X_2 \cap B \notin \mathcal{N}$.

Im ersten Falle, legen wir $X_1^* = X_1 - B$ und $X_2^* = -X_1$. Dann hat die Zerlegung $\bigvee = X_1^* \cup X_2^*$ die Eigenschaften aus dem Satze 2 und für ihn gilt $X_1 + X_1^* = X_1 \cap B \notin \mathcal{N}$. Diese letzten Behauptungen beweist man folgendermassen:

Es sei $B \in [C]$. X_1^* ist ein fast invariantes Element, weil es die Differenz zweier fast invarianter Elemente ist. Es sei $X_1 \in [A]$, wo $A \in \mathcal{N}$ ein fast wanderndes Element ist. Jetzt zeigen wir, dass $X_1^* \in [A - (A \cap B)]$ und $A - (A \cap B) \notin \mathcal{N}$. Es ist evident, dass X_1^* fast invariant über $A - (A \cap B)$ ist, weil $A - (A \cap B) \subset X_1 - B = X_1^*$ ist. Es sei D ein fast invariantes Element über $A - (A \cap B)$. Dann ist $D \cup B$ fast invariant über A, weil $A = (A \cap B) \cup (A - (A \cap B)) \subset B \cup D$ ist. Jetzt gilt $X_1^* - D = (X_1 - (X_1 \cap B)) - D = (X_1 - (X_1 \cap B)) - (D \cup B) \subset X_1 - (D \cup B) \in \mathcal{N}$. Es ist also $X_1^* \leqq D$ und auch X_1^* ist aus $[A - (A \cap B)]$.

Jetzt werden wir zeigen, dass $A - (A \cap B) \notin \mathcal{N}$ ist. Aus dem Lemma 2 geht hervor, dass $B \in [(A \cap B) \cup (C - (X_1 \cap B))]$ ist, weil nach dem Lemma 4 $X_1 \cap B \in [A \cap B]$ ist und es ist weiter $B = (X_1 \cap B) \cup B \in [(A \cap B) \cup (C - (X_1 \cap B))]$ und $(A \cap B) \cup (C - (X_1 \cap B))$ ist ein fast wanderndes Element (Sehe die Formel (1)). Aus der Eigenschaft von h ist es evident, dass $(A \cap B) \cup (C - (X_1 \cap B)) \in \mathcal{N}$ ist und deswegen ist auch $A \cap B \in \mathcal{N}$. Es ist also $A - (A \cap B) \notin \mathcal{N}$.

X_1^* hat also die Eigenschaft aus dem Satze 2.

Es sei $E \subset X_2^*$ ein fast wanderndes Element. Dann ist $E = (E \cap B) \cup$

(3) Das System $\mathcal{M} \cap X_2$ ist das System aller Elemente aus $\mathcal{M}$, die in X_2 enthalten sind.

$\cup (E - (E \cap B))$ und beide Summanden sind fast wandernde Elemente. Jetzt ist $E - (E \cap B) \subset X_2^* - B = (-(X_1 - B)) - B = (-(X_1 \cap (-B))) - - B = (X_2 \cup B) \cap (-B) \subset X_2$ und es ist also $E - (E \cap B) \in \mathcal{N}$. Es sei $F \in [E \cap B]$, dann ist nach dem Lemma 4 $F \cap B \in [E \cap B]$. Aus dem Lemma 2 folgt nun, dass $B \in [(E \cap B) \cup (C - (F \cap B))]$ ist. Wegen der Eigenschaft des Homomorphismus h und weil $(E \cap B) \cup (C - (F \cap B))$ ein fast wanderndes Element ist, ist $(E \cap B) \cup (C - (F \cap B)) \in \mathcal{N}$ und also auch $E \cap B \in \mathcal{N}$. Aus dem bewiesenen folgt, dass $E \in \mathcal{N}$ ist. Das Element X_2^* hat also die Eigenschaft aus dem Satze 2.

Im zweiten Falle, legen wir $X_1^* = X_1 \cup B$ und $X_2^* = X_2 - B$. Die Zerlegung $V = X_1^* \cup X_2^*$ hat die Eigenschaften aus dem Satze 2 und $X_1 + X_1^* = = X_2 \cap B \notin \mathcal{N}$. Das geht daraus hervor, dass X_1 ein fast dissipatives Element ist, und $X_2^* \subset X_2$ ist.

Der σ-Homomorphismus h hat die Eigenschaft aus dem Satze 2, wenn er positiv nicht singular ist, d. h. das Bild vom σ-Ideal $\mathcal{N}$ bei h ist in $\mathcal{N}$ enthalten. Diese Behauptung bestätigen wir folgendermassen: Es sei B ein fast dissipatives Element, das zu $\mathcal{N}$ nicht gehört. Sollte mindestens ein fast wanderndes Element A mit der Eigenschaft $B \in [A]$ zu $\mathcal{N}$ gehören, dann müsste wegen der positiver Nichtsingularität von σ-Homomorphismus h gelten, dass $h^n(A) \in \mathcal{N}$ für jedes $n \in N$ ist. Dann wäre $A' = A \cup \bigcup \{h^n(A) : n \in N\}$ fast invariant über A, weil $A' + h^n(A') \subset \bigcup \{h^k(A) : k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1\} \in \in \mathcal{N}$ ist. Also wäre $B \leqq A'$ und $B = A' \cap B \cup (B - A') \in \mathcal{N}$. Das wäre ein Wiederspruch. Also die zweite Behautptung des Satzes 2 gilt für jeden positiv nicht singularen σ-Homomorphismus.

Wenn h ein σ-Isomorphismus auf sich bedeutet, d. i. ein eineindeutiger σ-Homomorphismus $\mathcal{M}$ auf sich, dann ist auch h^{-1} ein σ-Isomorphismus $\mathcal{M}$ auf sich. Jetzt können wir h^n auch für ganze nicht positive Zahlen definieren. Wir definieren dies folgendermassen: $h^0(A) = A$ für jedes $A \in \mathcal{M}$ und $h^{-n} = = (h^{-1})^n$ für $n \in N$. Wenn h ein σ-Isomorphismus $\mathcal{M}$ auf sich ist und wenn h dazu noch nicht singular ist, d. h. h und h^{-1} positiv nicht singular sind, dann gilt auch die Behauptung bezüglich T^n für $n \in N$ aus dem Satze von E. Hopf. Das geht folgendermassen hervor: Wenn $V = X_1 \cup X_2$ eine Zerlegung aus dem Satze 2* ist, dann kann man $X_1 = \bigcup \{h^n(A) : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ für ein geeignetes A gewählt werden, weil aus $X_1 \in [A]^*$ $X_1 = \bigcup \{h^n(A) : n = = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ folgt. Es sei $k \in N$. Dann ist X_1 ein invariantes Element auch bei h^k. Das Element $B = \bigcup \{h^i(A) : i = 0, 1, 2, \ldots, k - 1\}$ ist ein wanderndes Element bei h^k und X_1 ist ein dissipatives Element bei h^k, weil $X_1 \in [B]$ ist. Weil h auf dem System $\mathcal{M} \cap X_2$ konservativ ist, dann folgt aus [5], dass auch h^k auf $\mathcal{M} \cap X_2$ konservativ ist. Dann ist $V = X_1 \cup X_2$ eine Zerlegung mit den Eigenschaften aus dem Satze 2* auch für den σ-Isomorphismus h^k.

Also gilt der Satz:

Satz 3. *Es sei $\mathscr{M}$ eine Boolesche σ-Algebra, welche die Eigenschaft der σ-Konfinalität bezüglich des σ-Ideals $\mathscr{N}$ hat. Es sei h ein nicht singularer σ-Isomorphismus $\mathscr{M}$ auf sich. Dann existieren X_1 und X_2 mit folgenden Eigenschaften: $\bigvee = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \bigwedge$, X_1 ist $\bigwedge$ oder ein dissipatives Element, h ist auf $\mathscr{M} \cap X_2$ konservativ. Für eine andere Zerlegung $\bigvee = X_1^* \cup X_2^*$ gilt $X_1 + X_1^* \in \mathscr{N}$. Die Zerlegung $\bigvee = X_1 \cup X_2$ ist auch eine solche Zerlegung für jeden σ-Isomorphismus h^k, wo $k \in N$ ist.*

Zusatz. Nach der Einsendung dieser Arbeit habe ich den Artikel [2] gelesen, in dem eine andere Zerlegung gegeben ist. Auch diese Zerlegung kann man ohne das Mass zu benutzen bekommen. Das Hauptersultat, das wir dann erhalten, lautet:

Es sei $\mathscr{M}$ eine Boolesche σ-Algebra, $\mathscr{N}$ ein σ-Ideal im $\mathscr{M}$ und $\mathscr{M}$ soll die Eigenschaft von σ-Konfinalität bezüglich $\mathscr{N}$ haben. Es sei h ein σ-Homomorphismus $\mathscr{M}$ in sich. Dann existieren vier Elemente Y_0, Y, $\hat{Y}$ und Z aus $\mathscr{M}$ so, dass folgendes gilt: Y_0 ist im Y enthalten, Y_0, bzw. Y ist das grösste invariante, bzw. das grösste Element auf dem h konservativ ist, Z ist das grösste invariante Element auf dem h rein dissipativ ist, $\hat{Y}$ ist das kleinste invariante Element, welches Y enthält, $\hat{Y}$ und Z sind paarweise disjunkt und es gilt: $\bigvee = Y_0 \cup (Y - Y_0) \cup (\hat{Y} - Y) \cup Z$. Wenn Y_0^*, Y^*, $\hat{Y}^*$ und Z^* vier andere solche Elemente aus $\mathscr{M}$ sind, dann sind die Elemente $Y_0 + Y_0^*$, $\hat{Y} + \hat{Y}^*$, $Y + Y^*$ und $Z + Z^*$ aus $\mathscr{N}$.

Dabei sind die Begriffe „kleiner“ und „grösser“ in dem Sinne der Quasiordnung zu verstehen.

LITERATUR

[1] Халмош П. Р., *Лекции по эргодической теории*, Москва 1959.

[2] Helmberg G., *Über die Zerlegung einer messbaren Transformation in konservative und dissipative Bestandteile*, Math. Z. *88* (1965), 358–367.

[3] Hopf E., *Ergodentheorie*, Berlin 1937.

[4] Choksi J. R., *Extension of a theorem of E. Hopf*, J. London Math. Soc. *36* (1961), 81–88, corigendum 253.

[5] Риечан Б., *Замечание к теореме Пуанкаре о возвращении на булевских кольцах*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 234–242.

Eingegangen am 9. 11. 1964.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied,
Bratislava

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Э. ХОПФА

Ладислав Мишик

Резюме

Пусть $\mathscr{M}$ — булева σ-алгебра и $\mathscr{N}$ — σ-идеал в ней. Определим отношение $\leqq$ так, что $A_1 \leqq A_2$ ($A_1, A_2 \in \mathscr{M}$) тогда и только тогда, когда $A_1 - A_2 \in \mathscr{N}$. Тогда отношение $\leqq$ является квазиупорядочением в $\mathscr{M}$. $\mathscr{M}$ имеет свойство σ-конфинальности снизу, соответственно сверху, относительно $\mathscr{N}$, если для каждой цепи $\mathscr{A}$ при этом упорядочении существует не более чем счетная подцепь $\mathscr{B}$, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ имеет место $\bigcap \{B : B \in \mathscr{B}\} - A \in \mathscr{N}$, соответственно $A - \bigcup \{B : B \in \mathscr{B}\} \in \mathscr{N}$. В каждом σ-конечном пространстве меры $(X, \mathscr{M}, m)$ $\mathscr{M}$ имеет свойство σ-конфинальности снизу и сверху относительно системы всех множеств меры 0.

Пусть h — σ-гомоморфизм $\mathscr{M}$ в себя. $A \in \mathscr{M}$ есть инвариантный, соответственно почти инвариантный элемент, если $A = h(A)$, соответственно $A + h^n(A) \in \mathscr{N}$, где $A + B$ — симметрическая разность элементов A и B. $A \in \mathscr{M}$ есть минимальный (почти) инвариантный над $B \in \mathscr{M}$, если 1) $B \subset A$, 2) A есть (почти) инвариантный, 3) для каждого (почти) инвариантного C над B справедливо $A \leqq C$. $A \in \mathscr{M}$ есть блуждающий, соответственно почти блуждающий, если $A \cap h^n(A) = \wedge$ для $n = 1, 2, 3 \ldots$, соответственно $A \cap \bigcup \{h^n(A) : n = 1, 2, 3, \ldots\} \in \mathscr{N}$. $A \in \mathscr{M}$ называется (почти) диссипативным, если существует (почти) блуждающий элемент $B \in \mathscr{M} - \mathscr{N}$ такой, что A является минимальным (почти) инвариантным над B.

Теорема. Пусть $\mathscr{M}$ — булева σ-алгебра, $\mathscr{N}$ — σ-идеал в ней и $\mathscr{M}$ имеет свойство σ-конфинальности снизу и сверху относительно $\mathscr{N}$. Пусть h — σ-гомоморфизм $\mathscr{M}$ в себя. Тогда существуют инвариантные, соответственно почти инвариантные, элементы X_1 и X_2 такие, что $X_1 \cap X_2 = \wedge$, $\vee = X_1 \cup X_2$, X_1 — или $\wedge$, или диссипативный, соответственно почти диссипативный, а каждый блуждающий, соответственно почти блуждающий, элемент, находящийся в X_2, есть из $\mathscr{N}$.

Если или $X_1 = \wedge$, или для h имеет место следующее утверждение: если $A \notin \mathscr{N}$ есть минимальный (почти) инвариантный над некоторым (почти) блуждающим, то A есть (почти) диссипативный, тогда для каждого другого такого разложения $\vee = X_1^* \cup X_2^*$ имеет место $X_1 + X_1^* \in \mathscr{N}$.