Matematicko-fyzikálny časopis

Zdeněk Hustý
O některých vlastnostech Picardových posloupností

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 8 (1958), No. 1, 7--19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126485

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH PICARDOVÝCH POSLOUPNOSTÍ

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

1. V diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

učiňme o funkci $f(x, y)$ předpoklad, že je spojitá a monotonní vzhledem k y v dvojrozměrném intervalu D: $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$, kde $a =$ konst > 0, $b =$ konst > 0. Uvažujme o řešeních diferenciální rovnice (1.1), která procházejí počátkem a jsou definována *jen* pro $x \geqq 0$.

Rovnicemi

$$y_k(x) = \int_0^x f[t, y_{k-1}(t)]\,\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

je určena v jistém intervalu $J \equiv \langle 0, \varrho \rangle$ ($\varrho \leqq a$) Picardova posloupnost funkcí, patřících k diferenciální rovnici (1.1), k bodu (0, 0) a k libovolně zvolené výchozí funkci $y_0(x)$, která má v čísle 0 hodnotu 0, má všude derivaci a její hodnoty leží vesměs v intervalu $\langle -b, b \rangle$.

Nechť značí $\{Z_i^{nk}\}$, $\{\Delta_i^{nk}\}$ (n přirozené, $k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n$) posloupnosti funkcí definovaných v intervalu J takto:

$$\begin{aligned} Z_0^{nk} &= y_0'(x) - f[x, y_{n-1}(x)],\\ Z_i^{nk} &= f[x, y_{(k-1)n+i-1}] - f[x, y_{kn+i-1}], \quad k = 1, 2, \dots;\quad i = 1, 2, \dots n,\\ \Delta_i^{nk} &= \int_0^x Z_{i-1}^{nk}\,\mathrm{d}t = y_{(k-1)n+i-1} - y_{kn+i-1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Předpokládejme nejdříve, že funkce $f(x, y)$ v intervalu D vzhledem k y neklesá. Jestliže v nějakém intervalu $J' \subset J$ je

$$Z_{i-1}^{nk} \geqq 0 \qquad (Z_{i-1}^{nk} \leqq 0),$$

pak podle (1.3) platí v J' nerovnosti

$$\Delta_i^{nk} \geqq 0 \qquad (\Delta_i^{nk} \leqq 0),$$
$$Z_i^{nk} \geqq 0 \qquad (Z_i^{nk} \leqq 0).$$

Učiňme tedy předpoklad, že pro pevné n platí v J'

$$y_0' \geqq f[x, y_{n-1}(x)] \qquad (y_0' \leqq f[x, y_{n-1}(x)]). \tag{2.1}$$

Potom částečné posloupnosti

$$\{y_{\nu n}\}, \quad \{y_{\nu n+1}\}, \quad \{y_{\nu n+2}\}, \ldots, \quad \{y_{\nu n+n-1}\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

jsou monotónní, takže existuje v J' stejnoměrně

$$\lim_{\nu\to\infty} y_{\nu n+s} = Y_s(x), \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \text{ (viz na př. [4]).}$$

Funkce $Y_s(x)$ vyhovují systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Y_1' &= f[x, Y_0], \\ Y_2' &= f[x, Y_1], \\ &\ldots. \\ Y_{n-1}' &= f[x, Y_{n-2}], \\ Y_0' &= f[x, Y_{n-1}]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ukažme, že systém (2.3) má jenom řešení tvaru $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, kde $y(x)$ je řešení rovnice (1.1). Předpokládejme tedy, že všechny funkce $Y_s(x)$ v intervalu J' nesplývají a bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $Y_0(x) - Y_1(x) \not\equiv 0$. Existuje bod $0 \neq c \in J'$ takový, že na př. $Y_0(c) > Y_1(c)$. Vzhledem k spojitosti obou funkcí existuje dále největší interval $\langle x_0, c\rangle$ takový, že $0 \leqq x_0 < c$, $Y_0(x_0) = Y_1(x_0)$, $Y_0(x) \geqq Y_1(x)$ pro $x \in \langle x_0, c\rangle$. Integrací rovnice

$$Y_1' - Y_2' = f[x, Y_0(x)] - f[x, Y_1(x)]$$

v intervalu $\langle x_0, c\rangle$ dojdeme k nerovnosti

$$Y_1(c) \geqq Y_2(c).$$

Podobným způsobem odvodíme spornou relaci

$$Y_0(c) > Y_1(c) \geqq Y_2(c) \geqq \ldots \geqq Y_{n-1}(c) \geqq Y_0(c).$$

Došli jsme k tomuto výsledku:
Když funkce $f(x, y)$ v intervalu D vzhledem k y neklesá a mezi dvěma funkcemi $y_0(x)$, $y_{n-1}(x)$ Picardovy posloupnosti (1.2) platí v nějakém intervalu $J' \subset J$ nerovnost (2.1), pak Picardova posloupnost v intervalu J' stejnoměrně konverguje k řešení diferenciální rovnice (1.1).

Poznámka 2.1. Z důkazu je patrné, že místo (2.1) můžeme předpokládat

$$f[x, y_\nu(x)] \geqq f[x, y_{\nu+n}(x)] \qquad (f[x, y_\nu(x)] \leqq f[x, y_{\nu+n}(x)]). \tag{2.4}$$

eventuálně

$$y_\nu(x) \geqq y_{\nu+n}(x) \qquad (y_\nu(x) \leqq y_{\nu+n}(x)),$$

ν = libovolné přirozené číslo.

3. Nechť funkce $f(x, y)$ v intervalu D vzhledem k y neroste. Jestliže v nějakém intervalu $J' \subset J$ je

$$Z_{i-1}^{nk} \geqq 0 \qquad (Z_{i-1}^{nk} \leqq 0),$$

pak podle (1.3) platí v J' nerovnosti

$$\Delta_i^{nk} \geqq 0 \qquad (\Delta_i^{nk} \leqq 0),$$

$$Z_i^{nk} \leqq 0 \qquad (Z_i^{nk} \geqq 0).$$

Předpokládejme tedy, že platí (2.1). Je-li n sudé, pak částečné posloupnosti (2.2) jsou monotonní, stejnoměrně konvergují v intervalu J' a jejich limity vyhovují systému (2.3). Jestliže systém (2.3) má řešení, kde $Y_i(x) \neq Y_j(x)$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pak Picardova posloupnost, patřící k diferenciální rovnici (1.1), k bodu (0, 0) a k výchozí funkci $Y_i(x)$ je periodická. Jestliže systém (2.3) má pouze jediné řešení, pak $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, kde $y(x)$ je jediné řešení diferenciální rovnice (1.1) (viz [5], str. 89) a posloupnost (1.2) stejnoměrně v J' konverguje.

Poznámka 3.1. Opět místo (2.1) můžeme předpokládat (2.4).

4. V dalších úvahách se omezíme na případ $n = 2$. Předpokládáme tedy, že mezi některou funkcí $y_\nu(x)$ Picardovy posloupnosti (1.2) a následující funkcí $y_{\nu+1}(x)$ platí v nějakém intervalu $J' \equiv \langle 0, \alpha \rangle$ nerovnost

$$y'_\nu(x) \geqq f[x, y_{\nu+1}(x)] \qquad (y'_\nu(x) \leqq f[x, y_{\nu+1}(x)]) \tag{4.1}$$

a že funkce $f(x, y)$ vzhledem k y v intervalu $\langle -b, b \rangle$ neroste. Pak částečná Picardova posloupnost funkcí o sudých [lichých] indexech v intervalu J' stejnoměrně konverguje monotonně shora nebo zdola [zdola nebo shora] k jisté funkci $Y_0(x)$ [$Y_1(x)$], viz [3]. Funkce $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ jsou řešením systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Y_0' &= f[x, Y_1], \\ Y_1' &= f[x, Y_0]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

a mají v bodě 0 hodnotu 0. Uvedeme některé vlastnosti funkcí Y_0, Y_1:

1° Jestliže v některém bodě $c \in (0, \alpha)$ je $Y_0(c) \neq Y_1(c)$, pak $Y_0(x) \neq y_1(x)$ pro všechna $x \in \langle c, \alpha \rangle$.

V opačném případě existuje $x_0 \in (c, \alpha)$ takové, že $Y_0(x_0) = Y_1(x_0)$ $Y_0(x) \neq Y_1(x)$ pro $x \in \langle c, x_0)$. Předpokládejme, že platí na př. nerovnost

$$Y_0(x) > Y_1(x) \qquad \text{pro } x \in \langle c, x_0). \tag{4.3}$$

Pak

$$f[x, Y_0(x)] \leqq f[x, Y_1(x)],$$

$$Y_1(x_0) - Y_1(c) = \int_c^{x_0} f[x, Y_0(x)]\,\mathrm{d}x \leqq \int_c^{x_0} f[x, Y_1(x)]\,\mathrm{d}x = Y_0(x_0) - Y_0(c).$$

Poslední nerovnosti jsou vzhledem k (4.3) nemožné.

2° Jestliže v některém bodě $c \in (0, \alpha\rangle$ je $Y_0(c) > Y_1(c)$, pak

$$Y_0(x) \geqq Y_1(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \langle 0, \alpha\rangle. \tag{4.4}$$

Neplatí-li nerovnost (4.4) pro všechna $x \in (0, \alpha\rangle$, pak množina čísel, pro něž (4.4) neplatí, má dolní hranici $m \in \langle 0, \alpha\rangle$ a vzhledem k spojitosti funkcí $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ je $Y_0(m) = Y_1(m)$. Je $m < \alpha$ a podle 1° je také $m < c$. Zvolme $0 < \varepsilon < c - m$. Podle definice čísla m existuje v intervalu $(m, m + \varepsilon)$ aspoň jedno číslo $\bar{x}$ takové, že $Y_0(\bar{x}) < Y_1(\bar{x})$, což podle 1° není možné.

Poznámka 4.1. Jestliže platí $Y_0(c) > Y_1(c)$ pro $c \in (0, \alpha\rangle$, pak existuje největší interval $\langle x_0, \alpha\rangle$ takový, že $0 \leqq x_0 < c$, $Y_0(x_0) = Y_1(x_0)$, $Y_0(x) > Y_1(x)$ pro $x \in (x_0, \alpha\rangle$, $Y_0(x) = Y_1(x)$ pro $x \in \langle 0, x_0\rangle$. Jestliže $x_0 \neq 0$, pak Picardova posloupnost (1.2) v intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ konverguje. Vyloučíme-li tuto možnost, pak můžeme stále předpokládat, že

$$Y_0(x) > Y_1(x) \qquad \text{pro } x \in (0, \alpha\rangle. \tag{4.5}$$

Nyní učiníme doplňující předpoklad, že funkce $f(x, y)$ vzhledem k y v intervalu $\langle -b, b\rangle$ klesá.

3° Jestliže v nějakém bodě $c \in (0, \alpha)$ platí $Y_0(c) > y(c)$, pak $Y_0(x) \geqq y(x)$ pro všechna $x \in \langle c, \alpha\rangle$ [$y(x)$ je jediné řešení diferenciální rovnice (1.1)].

Předpokládejme opak. Podle Perronovy metody indukce v kontinuu existuje číslo $m \in (c, \alpha)$ takové, že

$$\begin{aligned} Y_0(m) &= y(m), \\ Y_0'(m) &\leqq y'(m). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Avšak s ohledem na (4.5) je

$$Y_0'(m) = f[m, Y_1(m)] > f[m, Y_0(m)] = f[m, y(m)] = y'(m),$$

což není podle (4.6) možné.

4° Platí aspoň jedna z nerovností

$$Y_0(x) \geqq y(x), \qquad \text{pro všechna } x \in \langle 0, \alpha\rangle. \tag{4.7}$$

$$Y_1(x) \leqq y(x) \tag{4.8}$$

Jestliže neplatí ani jedna z nerovností (4.7) [(4.8)], pak množina těch bodů, pro které neplatí (4.7) [(4.8)], má jistou dolní hranici $m_1 < \alpha$ $[m_2 < \alpha]$. Podle Perronovy indukce v kontinuu je

$$\begin{aligned} Y_0(m_1) &= y(m_1), \\ Y_0'(m_1) &\leqq y'(m_1). \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\left[\begin{aligned} Y_1(m_2) &= y(m_2) \\ Y_1'(m_2) &\geqq y'(m_2) \end{aligned}\right]. \tag{4.10}$$

Musí být $m_1 = 0$ $[m_2 = 0]$, neboť v opačném případě je s ohledem na (4,5)

$$Y_0'(m_1) = f[m_1, Y_1(m_1)] > f[m_1, Y_0(m_1)] = f[m_1, y(m_1)] = y'(m_1),$$
$$[Y_1'(m_2) = f[m_2, Y_0(m_2)] < f[m_2, Y_1(m_2)] = f[m_2, y(m_2)] = y'(m_2)].$$

Tyto nerovnosti dávají spor vzhledem k (4,9). (4,10).

Zvolme $0 < \varepsilon < \alpha$. Podle definice čísla $m_1 = 0$ existuje číslo $x_1 \in (0, \varepsilon)$ takové, že

$$Y_0(x_1) < y(x_1). \tag{4.11}$$

Podle definice čísla $m_2 = 0$ existuje číslo $x_2 \in (0, x_1)$ takové, že

$$Y_1(x_2) > y(x_2).$$

Podle (4,5) je také

$$Y_0(x_2) > y(x_2),$$

takže (4.11) je ve sporu s tvrzením odstavce 3°, neboť $x_2 < x_1$.

5° Obě nerovnosti (4.7), (4.8) platí současně. Nechť na př. platí (4.7). V bodech, ve kterých se vyskytuje znaménko rovnosti, je nerovnost (4.8) podle (4.5) splněna. Nuže jak vypadá situace v libovolném bodě $c \in (0, \alpha)$, v němž je

$$Y_0(c) > y(c).$$

Pro všechna $x \in \langle 0, c\rangle$ je podle (4.7)

$$Y_1'(x) = f[x, Y_0(x)] \leqq f[x, y(x)] = y'(x),$$

takže

$$Y_1(c) = \int_0^c f[x, Y_0(x)] < \int_0^c f[x, y(x)] = y(c).$$

Poznámka 4.2. Z důkazu odst. 5° vyplývá, že pro všechna $x \in (0, \alpha\rangle$ platí nerovnosti $Y_0(x) > y(x) > Y_1(x)$.

Poznámka 4.3. Jestliže $f(x, 0) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \alpha\rangle$, pak funkce $Y_0(x)$ $[Y_1(x)]$ je pro $x \in (0, \alpha\rangle$ stále kladná [záporná] a roste [klesá].

Poznámka 4.4. Nechť funkce $f(x, y)$ splňuje tyto předpoklady:

a) $f(x, 0) = 0$ pro $x \in \langle 0, \varkappa \rangle$;

b) pro $y < 0$ [$y > 0$] v intervalu D vzhledem k y klesá nebo roste [roste nebo klesá].

Jestliže platí v intervalu $\langle 0, \varkappa \rangle$ nerovnosti (4.1), pak Picardova posloupnost (1.2) v intervalu $\langle 0, \varkappa \rangle$ konverguje.

Z předpokladu plyne, že funkce $f[x, y]$ je v intervalu D buď stále nezáporná nebo nekladná. Jsou tedy obě funkce $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ současně nezáporné nebo nekladné. Stačí tedy uvažovat o řešení systému (4.2) buď v intervalu D_1: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ nebo D_2: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \geqq y \geqq -b$. Jestliže funkce v D_1 roste, pak podle výsledku odst. 2 je $Y_0(x) = Y_1(x)$. Jestliže funkce v D_1 klesá, pak podle pozn. 4.2 je $Y_0(x) = Y_1(x) = 0$. Stejný závěr platí pro interval D_2.

Poznámka 4.5. Nechť funkce $f(x, y)$ splňuje tyto předpoklady:

a) vzhledem k y v intervalu D klesá;

b) vzhledem k y je v intervalu D lichou funkcí.

Každé řešení $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ systému (4.2) vyhovuje rovnici

$$Y_1(x) = -Y_0(x). \tag{4.12}$$

Jestliže $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ je řešení systému (4.2), kde funkce $f(x, y)$ vzhledem k y klesá, pak funkce $\overline{Y}_0 = -Y_0$, Y_1 jsou řešením systému

$$\overline{Y}_0' = -f[x, Y_1],$$
$$Y_1' = -f[x, \overline{Y}_0],$$

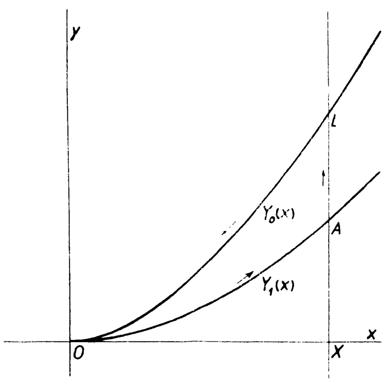
kde funkce $-f(x, y)$ vzhledem k y roste. Podle odst. 2 je $\overline{Y}_0(x) = Y_1(x) = y(x)$, kde $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice $y' = -f(x, y)$.

Odtud vyplývá postačující podmínka pro periodičnost Picardovy posloupnosti: Picardova posloupnost, patřící k funkci $f(x, y)$ [jež vzhledem k y je lichou funkcí a klesá v intervalu D], k bodu (0,0) a k výchozí funkci $y_0(x)$ [jež je řešením diferenciální rovnice $y' = -f(x, y)$], je tvaru

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_0(x),\ y_1(x),\ \ldots,$$

kde

$$y_1(x) = \int_0^x f[t, y_0(t)]\, \mathrm{d}t.$$



Obr. 1

5. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$, která vzhledem k y klesá, má spojitou parciální derivaci podle x v intervalu D a nechť

$$\varphi(x, y) = \int_0^y f_x'(x, t)\, \mathrm{d}t.$$

Potom

$$\int_{K=O\widehat{ABO}} \varphi(x, y)\,\mathrm{d}x + f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{5.1}$$

kde orientace křivky K byla zvolena podle obr. 1, při čemž funkce $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ jsou řešením systému (4.2) a mají vlastnost uvedenou v poznámce 4.2.

Rovnici (5.1) můžeme upravit na tvar

$$\int_0^x \mathrm{d}t \int_{Y_1(t)}^{Y_0(t)} f'_t(t, u)\,\mathrm{d}u = \int_{Y_1(x)}^{Y_0(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{5.2}$$

Vidíme, že složky řešení systému (4.2) můžeme hledat mezi funkcemi, které vyhovují rovnici (5.2). V dalších odstavcích ukážeme, že v některých případech můžeme hledat složky řešení systému (4.2) mezi funkcemi, které vyhovují jednodušší rovnici, než je (5.2). Připomeňme, že se zajímáme pouze o řešení systému (4.2), která procházejí počátkem a jsou definována pro $x \geqq 0$.

1° Nechť funkce $y(x)$, $z(x)$ jsou řešením systému (4.2). Potom

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f'_x(x, u)\,\mathrm{d}u = 0 \Leftrightarrow \int_{z(x)}^{y(x)} f(x, u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

Tvrzení vyplývá z rovnice (5.2).

2° Položme

$$G(x, y) = \int_0^y f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

a uvažujme o rovnici

$$F(x, y, z) = G(x, y) - G(x, z) = 0. \tag{5.3}$$

Předpokládejme, že existuje spojitá funkce

$$z = \varphi(x, y), \tag{5.4}$$

definovaná v intervalu $\bar{D}: 0 \leqq x \leqq \alpha \leqq a$, $|y| \leqq \beta$, $0 < \beta = \text{konst} \leqq b$, která v intervalu $\bar{D}$ splňuje rovnice

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0, \qquad \varphi(0, 0) = 0. \tag{5.5}$$

Nechť $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice

$$y' = f[x, \varphi(x, y)] \tag{5.6}$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$ a nechť

$$z(x) = \varphi[x, y(x)]. \tag{5.7}$$

Poznámka 5.1. V rovnici (5.7) předpokládáme, že $|y(x)| \leqq \beta$, $|z(x)| \leqq b$ pro $x \in \langle 0, \alpha \rangle$. Tento předpoklad zajisté nečiní naše úvahy méně obecnými.

Rovnice (5.7) je podle (5.3) v intervalu $\langle 0, \varkappa\rangle$ ekvivalentní s rovnicí

$$G[x, y(x)] = G[x, z(x)]. \tag{5.8}$$

Jestliže funkce $y(x)$, $z(x)$ splňují ještě podmínku

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f'_x(x, u)\, du = 0, \qquad x \in \langle 0, \varkappa\rangle, \tag{5.9}$$

pak derivací (5.8) s ohledem na (5.9), (5.6) obdržíme vztah

$$f[x, \varphi(x, y(x))] \,.\, \{z'(x) - f[x, y(x)]\} = 0. \tag{5.10}$$

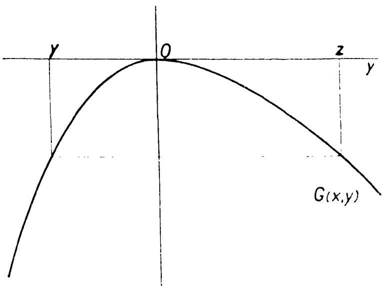
Rovnice (5.10) ovšem vyžaduje existenci funkce $z'(x)$.

Jestliže pomocí rovnice (5.10) dojdeme k závěru, že pro $0 \leq x \leq \varkappa$ platí

$$z'(x) = f[x, y(x)],$$

pak funkce $y(x), z(x)$ [definované rovnicemi $\int_z^y f(x, u)\, du = 0$, (5.6), (5.7), (5.9)] jsou v intervalu $\langle 0, \varkappa\rangle$ řešením systému (4.2).

Poznámka 5.2. Rovnice (5.3) má vždy triviální řešení $z = y$, které splňuje podmínky (5.5). Jestliže $y_0(x)$ je řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, pak funkce $y(x)$, $z(x)$, kde $y(x) = z(x) = y_0(x)$, jsou řešením systému (4.2). V dalších odstavcích se budeme zajímat hlavně o existenci netriviálního řešení rovnice (5.3).



Obr. 2

3° Je-li $f(x, 0) \neq 0$, pro všechna $x \in \langle 0, \varkappa\rangle$, má rovnice (5.3) pouze triviální řešení $y = z$ (viz [1], odst. 220, str. 342).

4° Nechť $f(x, 0) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \varkappa\rangle$. Pak platí tato **tvrzení:**

A. *Rovnice* (5.3) *má jediné netriviální řešení* (5.4).

B. *Funkce* (5.4) *je spojitá.*

C. *Jestliže funkce* $y(x)$, $z(x)$ [*kde* $y(x)$ *je řešením rovnice* (5.6) *takové, že* $y(0) = 0$, $z(x) = \varphi[x, y(x)]$] *splňují podmínku* (5.9), *pak jsou řešením systému* (4.2).

Poznámka 5.3. Všimněme si, že $f(x, y) > 0\,(< 0)$ pro $y < 0$ (> 0). Funkce $G(x, y)$ pro $y < 0$ (> 0) při pevném $x \in \langle 0, \varkappa\rangle$ vzhledem k y roste (klesá), při čemž $G(x, 0) = 0$.

Důkaz tvrzení A.

Buď (x, y) libovolný bod v jistém vhodném dvojrozměrném intervalu $\overline{D}_1$: $0 \leq x \leq \varkappa$, $-b_1 \leq y \leq b_2$, $0 < b_i =$ konst. $\leq b$, $i = 1,2$. Pak můžeme najít jedinou hodnotu $z \in \langle -b_1, b_2\rangle$, která má tyto vlastnosti (viz obr. 2):

a) $G(x, y) = G(x, z)$,

b) $y \gtrless 0 \Leftrightarrow z \lessgtr 0$,

c) $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Odtud plyne, že rovnice (5.3) má v intervalu $\overline{D}_1$ jediné netriviální řešení (5.4), které splňuje (5.5) a podmínku:

$$z = \varphi(x, y) \gtrless 0 \Leftrightarrow y \lessgtr 0,$$

při čemž

$$0 \neq \varphi(x, y) \neq y \quad \text{pro} \quad y \neq 0.$$

Důkaz tvrzení B. rozdělme na dvě části.

α) Funkce $\varphi(x, y)$ je spojitá v každém bodě $(x_1, y_1) \in \overline{D}_1$, který neleží na ose x, t. j. $y_1 \neq 0$. Označme $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$. Podle věty o implicitních funkcích (viz [1], l. c.) existuje právě jedna funkce $\overline{z} = \overline{\varphi}(x, y)$, definovaná v jistém okolí $\mathfrak{D} \subset \overline{D}_1$ bodu (x_1, y_1), která splňuje podmínku:

$$F[x, y, \overline{\varphi}(x, y)] = 0 \quad \text{pro} \quad x, y \in \mathfrak{D}, \quad \overline{\varphi}(x_1, y_1) = z_1 .$$

Vzhledem k odstavci A. platí identicky $\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(x, y)$ pro všechna $x, y \in \mathfrak{D}$. Podle věty o implicitních funkcích je funkce $\overline{\varphi}(x, y)$ spojitá v $\mathfrak{D}$.

β) Zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť $G(x, -\varepsilon) = -\Delta_1(x)$, $G(x, \varepsilon) = -\Delta_2(x)$. $\Delta_1(x) > 0$, $\Delta_2(x) > 0$.

Funkce $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ jsou spojité pro všechna $0 \leqq x \leqq \varkappa$ a nabývají pro $\varepsilon > 0$ jen kladných hodnot. Nechť $\Delta_1 > 0$, $[\Delta_2 > 0]$ značí minimum funkce $\Delta_1(x)[\Delta_2(x)]$ v intervalu $\langle 0, \varkappa\rangle$ a buď $\Delta = \min[\Delta_1, \Delta_2]$. Platí implikace

$$|\, G(x, y) \,| < \Delta \Rightarrow |\, y \,| < \varepsilon.$$

Rovnicí

$$G(x, y) + \Delta = 0$$

je definována pro $y \in (0, \varepsilon\rangle$ $[y \in \langle -\varepsilon, 0)]$ v intervalu $\langle 0, \varkappa\rangle$ právě jedna kladná [záporná] spojitá funkce $y = \eta_1(x)[y = \eta_2(x)]$ (viz [1], l. c.). Označme $\eta_1 > 0$, $[\eta_2 > 0]$ minimum funkce $\eta_1(x)$ $[\,|\, \eta_2(x) \,|\,]$, v intervalu $\langle 0, \varkappa\rangle$ a nechť $\eta = \min[\eta_1, \eta_2]$. Pak je pro $|\, y \,| < \eta$ a všechna $x \in \langle 0, \varkappa\rangle$

$$|\, G(x, y) \,| = |\, G(x, z) \,| < \Delta,$$

takže

$$|\, z \,| = |\, \varphi(x, y) \,| < \varepsilon.$$

Existuje tedy k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ číslo $\eta > 0$ takové, že pro všechna $x \in \langle 0, \varkappa\rangle$, $|\, y \,| < \eta$ platí nerovnost $|\, \varphi(x, y) \,| < \varepsilon$. Tím je dokázána spojitost funkce $\varphi(x, y)$v bodě $(x, 0)$, $0 \leqq x \leqq \varkappa$.

Důkaz tvrzení C.

Položme $G[x, y(x)] = u(x)$. Funkce $u(x)$ má spojitou derivaci, takže podle věty o implicitních funkcích (viz [1], l. c.) má i funkce $z(x)$, která vyhovuje rovnici $G[x, z(x)] = u(x)$, derivaci pro všechna $0 < x \leqq \alpha$. Z (5.3) vyplývá, že $\varphi(x, y) > 0\,[< 0]$ pro $y < 0\,[> 0]$; podle (5.6) funkce $y(x)$ pro $y(x) > 0\,[< 0]$ roste [klesá], takže $f[x, \varphi(x, y(x))] \neq 0$ pro $0 \neq x \leqq \alpha$. Z (5.10) vychází, že pro všechna $0 \neq x \leqq \alpha$ platí rovnice

$$z'(x) = f[x, y(x)]. \tag{5.11}$$

Položíme-li ještě $z'(0) = 0$, pak (5,11) platí pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$. Podle (5.6), (5.11) pak soudíme, že tvrzení C. je správné.

5° Výsledek odstavce 4° se dá bezprostředně aplikovat na funkci $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$, která splňuje požadované předpoklady, neboť rovnice

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f'_x[x, y] \, dy = h'(x) \int_{z(x)}^{y(x)} g(y) \, dy = 0,$$

$$\int_{z(x)}^{y(x)} f[x, y] \, dy = h(x) \int_{z(x)}^{y(x)} g(y) \, dy = 0$$

jsou vždy splněny, jestliže platí

$$\int_{z(x)}^{y(x)} g(y) \, dy = 0. \tag{5.12}$$

V případě $h(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \alpha \rangle$ každá dvojice funkcí $y(x)$, $z(x)$ (majících derivace a splňujících počáteční podmínky $y(0) = z(0) = 0$), která vyhovuje rovnici (5.2), vyhovuje také rovnici (5.12). Neboť částečnou integrací levé strany rovnice (5.2) obdržíme vztah

$$\int_0^x h(t) \, \{g[y(t)] \, y'(t) - g[z(t)] \, z'(t)\} \, dt = 0,$$

odkud snadno plyne (5.12). Takže v tomto případě řešení systému (4.2) můžeme hledat pouze mezi řešeními rovnice (5.12).

Rovnice (5.3), (5.4), (5.6) mají nyní tvar

$$G(y) = G(z), \qquad z = \varphi(y)$$

$$y' = h(x) \cdot g[\varphi(y)]. \tag{5.6'}$$

Jestliže integrál

$$\int_0 \frac{dy}{g[\varphi(y)]} \tag{5.13}$$

diverguje, má diferenciální rovnice (5.6′) pouze jediné řešení $y = 0$ (viz [2], str. 20), takže i systém (4.2) má pouze jediné řešení $Y_0 = Y_1 = 0$.

Odtud plyne, že Picardova posloupnost (1.2), pro kterou platí jedna z nerovností (4.1), konverguje, jestliže funkce $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$ vzhledem k y klesá [$g(0) = 0$, $h(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, \varkappa\rangle$] a splňuje podmínku (5.13).

Příklad. Nechť $h(x) = 1$, $g(y) = y \log | y |$, $g(0) = 0$. Funkce $g(y)$ v intervalu $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\rangle$ je spojitá a klesá. Rovnice (5.3) má řešení $z = -y$ a podmínka (5.13) je splněna, neboť integrál

$$-\int\limits_0 \frac{\mathrm{d}y}{y \log | y |} = - [\log \log | y |]_0$$

diverguje. Picardova posloupnost patřící k funkci $y \log | y |$, k bodu (0,0) a k jisté výchozí funkci $y_0(x)$, vždy konverguje k řešení $y = 0$ v jistém intervalu $\langle 0, \varkappa\rangle$, jestliže v tomtéž intervalu platí mezi dvěma po sobě následujícími funkcemi jedna z nerovností (4.1).

LITERATURA

[1] K. Petr, Počet diferenciální, Praha 1923.
[2] E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930.
[3] O. Borůvka, Vlastnosti Picardových posloupností, rkp.
[4] M. Müller, Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Mathematische Zeitschrift 26 (1927), 619—645.
[5] G. Sansone, Обыкновенные дифференциальные уравнения II. Москва 1954.

Došlo 31. 1. 1957.

Katedra matematiky a geodesie
Vysoké školy zemědělské a lesnické v Brně

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПИКАРДА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ

Выводы

Пусть последовательность функций Пикарда

$$\{y_n(x)\}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

принадлежащая к дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

к точке (0,0) и к какой-либо начальной функции $y_0(x)$ и пусть справедливо одно из неравенств

$$y_0' \geqq f[x, y_{n-1}(x)] \qquad \text{или} \qquad y_0' \leqq f[x, y_{n-1}(x)].$$

Если функция $f(x, y)$ в силу y монотонна, то подпоследовательности Пикарда $\{y_{\nu n+s}\}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ сходятся равномерно и пределы Y_s удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$Y_s' = f[x, Y_{s-1}],\ s = 1, 2, \ldots, n-1,\ Y_0' = f[x, Y_{n-1}] \tag{3}$$

[если $f(x, y)$ в силу y не возрастает, то надо предполагать, что n четное].

Если функция $f(x, y)$ в силу y не убывает, тогда (3) имеет только тривиальное решение вида $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, где $y(x)$ является решением уравнения (2), так что (1) сходится.

Если функция $f(x, y)$ в силу y не возрастает, то система (3) бывает в состоянии иметь решение, компоненты которого не совпадают. Если $f(x, y)$ в силу y убывает, то для $n = 2$ и для нетривиального решения на каком-либо отрезке $\langle 0, \alpha\rangle$ справедливы неравенства $Y_0(x) > y(x) > Y_1(x)$. Оттуда вытекают следующие следствия: а) Если $f(x, y)$ для $y < 0$ $[y > 0]$ в силу y убывает или возрастает [возрастает или убывает], $f(x, 0) = 0$, то система (3) для $n = 2$ имеет только тривиальное решение и (1) сходится. б) Если функция $f(x, y)$ нечетна, то решение Y_0, Y_1 системы (3) удовлетворяет уравнению $Y_0 = -Y_1$ и каждая из функций Y_0, Y_1 является решением уравнения $y' = -f(x, y)$.

Если $f(x, y)$ в силу y убывает и имеет непрерывную производную по переменной x, то функции Y_0, Y_1 удовлетворяют уравнению

$$\int_0^x \mathrm{d}t \int_{Y_1(t)}^{Y_0(t)} f_t'(t, u)\,\mathrm{d}u = \int_{Y_1(x)}^{Y_0(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

В дальнейшем указаны условия, когда компоненты Y_0, Y_1 возможно определить как решения уравнения

$$\int_{Y_0}^{Y_1} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER PICARDSFOLGEN

ZDENĚK HUSTÝ

Zusammenfassung

Es sei

$$\{y_n(x)\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

die Picard-Folge der Funktionen, die zu der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

zum Punkt (0, 0) und zur bestimmten Ausgangsfunktion $y_0(x)$ gehört, und es gelte eine von den Ungleichungen

$$y_0' \geqq f[x, y_{n-1}(x)] \qquad \text{oder} \qquad y_0' \leqq f[x, y_{n-1}(x)].$$

Wenn die Funktion $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y monoton ist, dann konvergieren die Picard-Teilfolgen $\{y_{\nu n+s}\}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ gleichmäßig und ihre Grenzwerte Y_s erfüllen das Differentialgleichungssystem

$$Y_s' = f[x, Y_{s-1}],\ s = 1, 2, \ldots, n-1,\ Y_0' = f(x, Y_{n-1}) \tag{3}$$

[wenn $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y nicht wächst, dann muß man voraussetzen, daß n eine gerade Zahl ist].

Wenn die Funktion $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y nicht abnimmt, dann hat das System (3) nur eine Triviallösung der Form $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-1} = y(x)$, wo $y(x)$ die Lösung der Gleichung (2) ist, so daß die Folge (1) konvergiert.

Wenn die Funktion mit Rücksicht auf y nicht wächst, dann kann das System eine solche Lösung haben bei der die Komponenten nicht zusammenfallen. Wenn $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y abnimmt, dann gelten für $n = 2$ für die nicht triviale Lösung im bestimmten Intervall $(0, \alpha\rangle$ die Ungleichungen $Y_0(x) > y(x) > Y_1(x)$. Daraus folgen folgende Folgerungen:

a) Wenn $f(x, y)$ für $y < 0$ [$y > 0$] mit Rücksicht auf y abnimmt oder zunimmt [zunimmt oder abnimmt], $f(x, 0) = 0$, dann hat das System (3) nur eine Triviallösung und die Folge (1) konvergiert.

b) Wenn $f(x, y)$ eine ungerade Funktion ist, dann erfüllt die Lösung Y_0, Y_1 des Systems (3) die Gleichung $Y_0 = -Y_1$ und jede von den Funktionen Y_0, Y_1 ist eine Lösung der Gleichung $y' = -f(x, y)$.

Wenn die Funktion $f(x, y)$ mit Rücksicht auf y abnimmt und wenn sie eine stetige Ableitung nach x hat, dann erfüllen die Funktionen Y_0, Y_1 die Gleichung $\int\limits_0^x \mathrm{d}t \int\limits_{Y_1(t)}^{Y_0(t)} f_t'(t, u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{Y_1(x)}^{Y_0(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$. Ferner werden Bedingungen beschrieben, unter welchen wir die Komponenten Y_0, Y_1 als Lösung der Gleichung $\int\limits_{Y_0}^{Y_1} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ bestimmen können.