Ladislav Mišík
Über einen Satz von Khintchine

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 3, 243--252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126517

Matematický časopis 22 (1972), No. 3

ÜBER EINEN SATZ VON KHINTCHINE

LADISLAV MIŠÍK

A. Khintchine hat im [1], S. 243 folgenden Satz bewiesen:

Eine approximative Ableitung f'_{ap} *auf dem Intervall* J *ist dann und nur dann die Ableitung einer Funktion, wenn eine Ableitung* g' *so existiert, daß* $f'_{\mathrm{ap}} \geqq g'$ *ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird mittels folgender zwei Lemmaten durchgeführt:

Lemma 1. *Wenn* f *eine nichtfallende Funktion ist und wenn die approximative Ableitung* $f'_{\mathrm{ap}}(x)$ *im Punkte* x *existiert, dann hat die Funktion* f *im Punkte* x *eine Ableitung und es gilt* $f'(x) = f'_{\mathrm{ap}}(x)$.

Lemma 2. *Wenn* $f'_{\mathrm{ap}}(x) \geqq 0$ *für alle* x *aus dem Intervall* J *gilt, dann ist* f *eine nichtfallende Funktion auf* J.

Wir bemerken, daß A. Khintchine für die Werte approximativer Ableitungen nur endliche Werte betrachtet hat, aber sein Resultat ist auch für approximative Ableitungen gültig, die auch ∞ und $-\infty$ annehmen können ([2]), wenn f'_{ap} und g' in keinem Punkt denselben unendlichen Wert annehmen.

Das Ziel dieses Artikels ist den Zusammenhang dieser Behauptungen mit einigen sehr einfachen Sätzen über Grenzfunktionen der Funktionen von zwei Variablen zu zeigen.

Es sei H eine offene Halbebene die durch eine Gerade P begrenzt ist. Es sei $x \in P$, dann sei $\mathscr{F}_x$ ein nichtleeres System von Teilmengen von H, die den Punkt x als Häufungspunkt haben. Für $A \in \mathscr{F}_x$ bezeichnen wir mit A_h die Menge aller Punkte aus A, die die Entfernung von P kleiner als h haben. Es sei jetzt g eine reelle Funktion, die auf H definiert ist. Dann definieren wir:

$$\limsup_{\mathscr{F}_x} g(u, v) = \lim_{h\to 0^+} \inf \{\sup \{g(u, v) : (u, v) \in A_h\} : A \in \mathscr{F}_x\}$$

und

$$\liminf_{\mathscr{F}_x} g(u, v) = \lim_{h\to 0^+} \sup \{\inf \{g(u, v) : (u, v) \in A_h\} : A \in \mathscr{F}_x\} .$$

Wenn $\limsup_{\mathscr{F}_x} g(u, v) = \liminf_{\mathscr{F}_x} g(u, v)$ ist, dann werden wir sagen, daß der Grenzwert der Funktion $g(u, v)$ im Punkte x bezüglich des Systems $\mathscr{F}_x$ existiert und dieser Grenzwert $f_{\mathscr{F}_x}(x) = \limsup_{\mathscr{F}_x} g(u, v)$(1) ist.

(1) $f_{\mathscr{F}_x}(x)$ kann auch ∞ oder $-\infty$ sein.

Satz 1. *(Die Verallgemeinerung des Satzes von Khintchine) Es seien $\mathcal{F}_x^{(1)}$ und $\mathcal{F}_x^{(2)}$ zwei solche nichtleere Systeme von Teilmengen von H, die den Punkt x aus P als Häufungspunkt haben. Es sei g eine reelle Funktion, die auf H definiert ist. Dann folgt aus der Existenz von $f_{\mathcal{F}_x^{(1)}}$ die Existenz von $f_{\mathcal{F}_x^{(2)}}$ und die Gleichheit $f_{\mathcal{F}_x^{(2)}}(x) = f_{\mathcal{F}_x^{(1)}}(x)$ dann und nur dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

es gilt für alle a:

$$\limsup_{\mathcal{F}_x^{(2)}} g(u, v) \geqq a \Rightarrow \limsup_{\mathcal{F}_x^{(1)}} g(u, v) \geqq a$$

und (1)

$$\liminf_{\mathcal{F}_x^{(2)}} g(u, v) \leqq a \Rightarrow \liminf_{\mathcal{F}_x^{(1)}} g(u, v) \leqq a.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß (1) eine notwendige Bedingung ist. Aus (1) bekommt man $\liminf_{\mathcal{F}_x^{(1)}} g(u, v) \leqq \liminf_{\mathcal{F}_x^{(2)}} g(u, v)$ und $\limsup_{\mathcal{F}_x^{(2)}} g(u, v) \leqq \limsup_{\mathcal{F}_x^{(1)}} g(u, v)$. Daraus folgt leicht, daß (1) auch eine hinreichende Bedingung ist.

Jetzt werden wir zeigen wie aus dem Satz 1. Lemma 1. abgeleitet werden kann. Wir nehmen für H die Halbebene $\{(u, v) : v > u\}$. Wir nehmen für das System $\mathcal{F}_x^{(2)}$ das System $\{L_x \cup P_x\}$, welches nur von einer Menge gebildet ist, wobei $L_x = \{(y, x) : y < x\}$ und $P_x = \{(x, y) : y > x\}$ ist. Für $\mathcal{F}_x^{(1)}$ nehmen wir das System aller Teilmengen von $L_x \cup P_x$, die den Punkt (x, x) als Dichtigkeitspunkt bezüglich L_x wie auch bezüglich P_x haben. Für die Funktion $g(u, v)$ nehmen wir die Funktion $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ auf der Menge H.

Jetzt werden wir zeigen, daß (1) erfüllt ist, falls f eine nichtfallende Funktion darstellt. Es sei a eine solche Zahl, daß $\limsup_{\mathcal{F}_x^{(2)}} \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} \geqq a > \limsup_{\mathcal{F}_x^{(1)}} \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ gilt. Dann existieren zwei positive Zahlen a_1 und a_2, für welche $\limsup_{\mathcal{F}_x^{(1)}} \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} < a_1 < a_2 < \limsup_{\mathcal{F}_x^{(2)}} \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ gilt.

Wir können also eine positive Zahl δ_1 so wählen, daß für jedes h', $0 < h' < \delta_1$, eine Menge $A^{(h')} \in \mathcal{F}_x^{(1)}$ so existiert, daß $a_1 > \sup \left\{ \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} : (u, v) \in A_{h'}^{(h')} \right\}$ ist. Es sei $0 < h' = 2h < \delta_1$. Dann gilt $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} < a_1$ für jedes $(u, v) \in A_{2h}^{(2h)}$. Es existiert weiter eine positive Zahl δ kleiner als $\dfrac{h}{2}$

so, daß $\frac{1}{\eta}\ |A^{(2h)} \cap \{(u, x) : x - \eta < u < x\}| > \max\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{1}{2}\right)$ und $\frac{1}{\eta}\ |A^{(2h)} \cap$ $\cap \{(x, u) : x < u < x + \eta\}| > \max\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{1}{2}\right)$ für jedes $\eta \in (0{,}4\delta)$ gilt.

Aus der Ungleichung $a_2 < \limsup_{\mathscr{F}_{x^{(2)}}} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ geht hervor, daß entweder ein Punkt $(y, x) \in (L_x \cup P_x)_\delta$ oder ein Punkt $(x, y) \in (L_x \cup P_x)_\delta$ existiert, für welchen $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > a_2$ ist.

Wir nehmen zuerst den ersten Fall in Betracht. Dann ist das Intervall (y, x) in $\left\{u : \frac{f(u) - f(x)}{u - x} > a_1\right\}$ enthalten. Es ist leicht zu sehen, daß $\{(u, x) : y < u < x\} \cap A^{(2h)} \neq \emptyset$ ist, weil die Ungleichung

$$\frac{|A^{(2h)} \cap \{(y, x) : y < u < x\}|}{x - y} > \max\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{1}{2}\right) > 0 \text{ gilt.}$$

Aus $\{(u, x) : y < u < x\} \cap A^{(2h)} \neq \emptyset$ folgt jetzt, daß $\sup\left\{\frac{f(u) - f(v)}{u - v} : (u,v) \in \in A^{(2h)}_{2h}\right\} > a_1$ ist. Das ist aber ein Widerspruch.

Im zweiten Fall ist $x < y < x + \delta\sqrt{2}$ und $\alpha = \min\left(x + \frac{a_2}{a_1}(y - x), 2y - x\right) \leqq x + 2\delta\sqrt{2} < x + 4\delta$, also ist das Intervall (y, α) in der Menge $\left\{u : \frac{f(u) - f(x)}{u - x} > a_1\right\}$ enthalten, weil für $t \in (y, \alpha)$ die Ungleichung $\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,\frac{y - x}{t - x} > a_2 \frac{a_1}{a_2} = a_1$ gilt. Wenn $\alpha = x + \frac{a_2}{a_1}(y - x)$ ist, dann ist $\frac{y - x}{\alpha - x} = \frac{a_1}{a_2}$, wenn $\alpha = 2y - x$ ist, dann ist $\frac{y - x}{\alpha - x} = \frac{1}{2}$. Da $\frac{|A^{(2h)} \cap \{(x, u) : x < u < \alpha\}|}{\alpha - x} > \max\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{1}{2}\right)$ ist, existiert ein Punkt $(x, u) \in \in A^{(2h)}$, für welchen $\alpha > u > x$ ist. Es ist $(x, u) \in A^{(2h)}_{2h}$, weil $\alpha \leqq x + 2\delta\sqrt{2}$ ist.

Darum muß $\sup\left\{\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} : (u, v) \in A_{2h}^{(2h)}\right\} > a_1$ sein, was ein Widerspruch ist.

Ähnlich können wir auch den zweiten Teil von (1) beweisen.

Einen anderen Beweis des Lemmas 1. von Khintchine können wir mittels unseres Satzes 1. durch eine Methode geben, die L. E. Snyder in [4] gibt. In diesem Falle nehmen wir im Satz 1. für H die Menge $\{(x, y) : y > 0\}$. In der zitierten Arbeit hat L. E. Snyder im Beweise des Satzes 3. folgendes bewiesen: Es sei S_{x_0} der Winkel $\left\{(x, r) : x_0 - \dfrac{r}{2} < x < x_0 + \dfrac{r}{2}\,,\ r > 0\right\}$ und B_{x_0} eine Teilmenge von $(-\infty, \infty)$, die den Punkt x_0 als Dichtigkeitspunkt hat. Dann hat die Menge $E_{x_0} = \left\{(x, r) : (x, r) \in H,\ x - \dfrac{r}{2} \text{ und } x + \dfrac{r}{2} \text{ sind aus } B_{x_0}\right\}$ den Punkt $(x_0, 0)$ als Dichtigkeitspunkt bezüglich der Menge S_{x_0}. Für $F_{x_0}^{(1)}$ nehmen wir das System $\{E_{x_0}\}$ mit einer einzigen Menge E_{x_0} und für $F_{x_0}^{(1)}$ nehmen wir das System $\{S_{x_0}\}$ mit einer einzigen Menge S_{x_0}.(2) Es gilt folgender:

Satz 2. *Es sei $f\colon (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine monotone Funktion und* $\Phi(u, v) = \dfrac{f(u + (v/2)) - f(u - (v/2))}{v}$. *Dann sind die Implikationen in* (1) *erfüllt.*

Beweis. Wir werden annehmen, daß f eine nichtfallende Funktion ist. Für eine nichtsteigende Funktion ist der Beweis ähnlich.

Jetzt nehmen wir an, daß die erste Implikation von (1) nicht gilt. Dann existiert eine Zahl a so, daß $\limsup_{F_{x_0}^{(2)}} \Phi(u, v) \geqq a > \limsup_{F_{x_0}^{(1)}} \Phi(u, v)$ ist. Dann existieren zwei Zahlen a_1 und a_2 so, daß $0 < a_2 < a_1 < 2a_2$ und $\limsup_{F_{x_0}^{(2)}} \Phi(u, v) > a_1 > a_2 > \limsup_{F_{x_0}^{(1)}} \Phi(u, v)$ gilt. Es sei η eine solche positive Zahl, für welche $\sup\{\Phi(u, v) : (u, v) \in (E_{x_0})_{h'}\} < a_2$ und $1 - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a_2}{a_1}\right)^2 < \dfrac{|(E_{x_0})_{h'}|}{|(S_{x_0})_{h'}|}$ für jedes $0 < h' < \eta$ gilt. Es sei $0 < h <$

---

(2) L. E. Snyder definiert die Mengen E_{x_0} und S_{x_0} so, daß er in seinen Definitionen anstatt von $x_0 - \dfrac{r}{2} < x < x_0 + \dfrac{r}{2}$ die Ungleichung $x_0 - \dfrac{r}{2} \leqq x \leqq x_0 + \dfrac{r}{2}$ nimmt. Die Mengen E_{x_0} nach unserer und Snyderscher Definition sind dieselben.

$< \frac{1}{2}\eta$. Dann existiert ein solcher Punkt $(x, r) \in (S_{x_0})_{h'}$, d. h. $x_0 - \frac{r}{2} < x <$ $< x_0 + \frac{r}{2}$ und $0 < r < h$, $\Phi(x, r) > a_1$ ist.

Es sei $x \leqq x_0$. Setzen wir $A = \left\{(u, t) : x \leqq u \leqq x + \frac{t}{2} - \frac{r}{2}, r \leqq t \leqq h_1 = \frac{a_1}{a_2} r\right\}$. Dann gilt für jedes $(u, t) \in A$: $\Phi(u, t) \geqq \Phi(x, r) \frac{r}{h_1} > a_2$, weil $x + \frac{r}{2} \leqq u + \frac{t}{2}$, $u - \frac{t}{2} \leqq x - \frac{r}{2}$ und $t \leqq h_1$ ist. Es gilt weiter $\frac{|A|}{|(S_{x_0})_{h_1}|} =$

$$= \frac{\frac{1}{4}(h_1 - r)^2}{\frac{1}{2} h_1^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2 > 0.$$

Wenn $x_0 < x$ ist, dann gilt für jedes $(u, t) \in A = \left\{(u, t) : x - \frac{t}{2} + \frac{r}{2} \leqq u \leqq x, r \leqq t \leqq h_1 - \frac{a_1}{a_2} r\right\}$ die folgende Ungleichung $\Phi(u, t) \geqq \Phi(x, r) \frac{r}{h_1} > a_2$, weil $x + \frac{r}{2} \leqq u + \frac{t}{2}$, $u - \frac{t}{2} \leqq x - \frac{r}{2}$ und $t \leqq h_1$ ist. Es gilt weiter $\frac{|A|}{|(S_{x_0})_{h_1}|} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2 > 0$. Jetzt bekommen wir in jedem von diesen zwei Fällen, daß $A \cap (E_{x_0})_{h_1} \neq \emptyset$ ist. Es muß also $\sup \{\Phi(u, v) : (u, v) \in (E_{x_0})_{h_1}\} > a_2$ sein. Das ist aber ein Widerspruch.

Wenn die zweite Implikation von (1) nicht gilt, dann existiert eine solche Zahl a, daß $\liminf_{F_{x_0}^{(2)}} \Phi(u, v) \leqq a < \liminf_{F_{x_0}^{(1)}} \Phi(u, v)$ ist. Dann existieren zwei positive Zahlen a_1 und a_2 so, daß $\liminf_{F_{x_0}^{(2)}} \Phi(u, v) < a_2 < a_1 < \liminf_{F_{x_0}^{(1)}} \Phi(u, v)$ und $a_1 < 2a_2$ gilt. Dann existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $|(E_{x_0})_h| > \left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2\right) |(S_{x_0})_h|$, $a_1 < \inf \{\Phi(u, v) : (u, v) \in (E_{x_0})_h\}$, $|B_{x_0} \cap \langle x_0 - h, x_0\rangle| > \frac{2a_2 h}{a_1 + a_2}$ und $|B_{x_0} \cap \langle x_0, x_0 + h\rangle| > \frac{2a_2 h}{a_1 + a_2}$ für jedes h, $0 < h \leqq \delta$, gilt. Wir werden jetzt beweisen, daß $a_2 \leqq \inf \{\Phi(u, v) : (u, v) \in (S_{x_0})_\delta\}$ ist. Daraus wird folgen, daß $\liminf_{F_{x_0}^{(2)}} \Phi(u, v) \geqq a_2$ ist und das ist ein Widerspruch.

Die Funktion $\Phi(u, v) = \dfrac{f\left(u+\frac{v}{2}\right) - f\left(u-\frac{v}{2}\right)}{v}$ hat die folgende Eigenschaft: *Wenn* $\Phi(u_0, v_0) \leqq a_2$ *ist, dann ist* $\Phi(u, v) \leqq a_1$ *für jedes* (u, v), *welches die Ungleichung* $u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq u \leqq u_0 + \frac{v_0}{2} - \frac{v}{2}$ *und* $\frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq v \leqq v_0$ *erfüllt*.

Es gilt nämlich $\Phi(u, v) \leqq \Phi(u_0, v_0)\frac{v_0}{v} \leqq a_2 \frac{v_0}{v} \leqq a_1$ für jedes (u, v), welches $u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq u \leqq u_0 + \frac{v_0}{2} - \frac{v}{2}$ und $\frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq v \leqq v_0$ erfüllt.

Es sei $\Phi(u_0, v_0) \leqq a_1$ für $(u_0, v_0) \in (S_{x_0})_\delta$. Dann ist $0 < v_0 < \delta$ und $\Phi(u, v) \leqq \leqq a_1$ und deshalb $(u, v) \in E_{x_0}$ für jedes (u, v) für welches $u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq \leqq u \leqq u_0 + \frac{v_0}{2} - \frac{v}{2}$ und $\frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq v \leqq v_0$ gilt. Wenn $u_0 \leqq x_0$ ist, dann können zwei Möglichkeiten bestehen: entweder ist die Länge des Durchschnitts der Halbgerade $x_0 - \frac{t}{2}$ für $t > 0$ mit der Menge $\left\{(u, v) : u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq u \leqq u_0 + \frac{v_0}{2} - \frac{v}{2}, \frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq v \leqq v_0\right\}$ mindestens $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) v_0$ oder sie ist kleiner.

Im ersten Fall ist jede Menge $T_x = \left\{\left(x - \frac{1}{2}(v - v_0),\ v\right) : u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq u, \frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq v \leqq v_0\right\}$ für $x_0 - \frac{v_0}{2} \leqq x \leqq u_0$ eine Teilmenge von $S_{x_0} - - E_{x_0}$. Darum muß entweder $x + \frac{1}{2} v_0 \notin B_{x_0}$ oder $x + \frac{1}{2} v_0 - v \notin B_{x_0}$ sein. Weil $\left\{x + \frac{1}{2} v_0 : x_0 - \frac{v_0}{2} \leqq x \leqq u_0\right\} = \left(x_0, u_0 + \frac{1}{2} v_0\right\rangle$ ist und weil x_0 ein Dichtigkeitspunkt von B_{x_0} ist, existiert eine Zahl $x \in \left(x_0, u_0 + \frac{1}{2} v_0\right) \cap B_{x_0}$. Für diese Zahl x muß $x + \frac{1}{2} v_0 - v \notin B_{x_0}$ für jedes v sein, für welches $\frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq \leqq v \leqq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) v_0$ gilt. Nehmen wir den Intervall $\left\langle x - \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0, x_0\right\rangle$.

Es ist $\left\langle x - \frac{a_2}{2a_1} v_0, x + \frac{1}{2} v_0 - \frac{a_2}{a_1} v_0 \right\rangle \cap B_{x_0} = \emptyset$. Darum gilt:

$$\frac{\left|\left\langle x - \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0, x_0 \right\rangle \cap B_{x_0}\right|}{x_0 - x + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0} \leqq \frac{x_0 - x - \frac{1}{2} v_0 + \frac{a_2}{a_1} v_0}{x_0 - x + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0} < \frac{2a_2}{a_1 + a_2}.$$

Aber es gilt auch

$$x_0 - x + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0 < \frac{v_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) v_0 < v_0 < \delta.$$

Darum muß auch die Ungleichung

$$\left|\left\langle x - \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0, x_0 \right\rangle \cap B_{x_0}\right| > \frac{2a_2}{a_1 + a_2}\left(x_0 - x + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} v_0\right)$$

gelten. Das ist aber ein Widerspruch.

Im zweiten Fall gilt folgendes:

$$\left|S_{x_0} \cap \left\{(u, v) : u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq u \leqq u_0 + \frac{v_0}{2} - \frac{v}{2}, \frac{a_2}{a_1} v_0 \leqq v \leqq v_0\right\}\right| \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2 v_0^2$$

und

$$\left(S_{x_0} \cap \left\{(u, v) : u_0 - \frac{v_0}{2} + \frac{v}{2} \leqq u \leqq u_0 + \frac{v_0}{2} - \frac{v}{2}\right\}\right) \cap E_{x_0} = \emptyset.$$

Daraus folgt jetzt, daß

$$\frac{|(E_{x_0})_{v_0}|}{|(S_{x_0})_{v_0}|} \leqq \frac{\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2 v_0^2}{\frac{1}{2} v_0^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2 \text{ ist.}$$

Das ist aber ein Widerspruch, weil $v_0 < \delta$ ist.

Folgerung. *Es sei f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine monotone Funktion, die im Punkte x_0 die approximative Ableitung besitzt. Dann hat f die Ableitung in x_0 und es gilt $f'(x_0) = f'_{ap}(x_0)$.*

Beweis. Da die Funktion f im Punkte x_0 die approximative Ableitung besitzt, muß eine Teilmenge $B_{x_0} \subset (-\infty, \infty)$ so existieren, daß x_0 ihr Dichtigkeitspunkt ist und $\lim \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_{\mathrm{ap}}(x_0)$ für $x \to x_0$ und $x \in B_{x_0}$ gilt. Jetzt nehmen wir eine Folge $\{(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus E_{x_0}, die gegen den Punkt $(x_0, 0)$ konvergiert. Dann ist

$$x_n + \frac{r_n}{2},\ x_n - \frac{r_n}{2} \in B_{x_0},\ x_0 - \frac{r_n}{2} < x_n < x_0 + \frac{r_n}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x_n + \frac{r_n}{2}\right) - f\left(x_n - \frac{r_n}{2}\right)}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n + \frac{r_n}{2} - x_0}{r_n} \, \frac{f\left(x_n + \frac{r_n}{2}\right) - f(x_0)}{x_n + \frac{r_n}{2} - x_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_0 - x_n + \frac{r_n}{2}}{r_n} \, \frac{f(x_0) - f\left(x_n - \frac{r_n}{2}\right)}{x_0 - x_n + \frac{r_n}{2}} \right) = f'_{\mathrm{ap}}(x_0)\,.$$

Daraus folgt, daß $\Phi_{F^{(1)}_{x_0}}(x_0) = f'_{\mathrm{ap}}(x_0)$ ist.

Aus dem Satz 2. geht hervor, daß $\Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ existiert und es ist $\Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0) = f'_{\mathrm{ap}}(x_0)$. Es sei jetzt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Zahlen, die gegen x_0 konvergiert. Wir werden zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ ist.

Zuerst beweisen wir, daß $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqq \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ ist. Nehmen wir an, daß $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} > a > \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ ist. Dann existiert eine Teilfolge $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ der Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ derart, daß $\dfrac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} > a$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Wählen wir $0 < \tau_n < \dfrac{1}{n}$ so, daß $a < \dfrac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0 + \tau_n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Wenn $y_n < x_0$ ist, dann setzen wir $y_n - \dfrac{1}{2}\tau_n = u_n - \dfrac{\varrho_n}{2}$

und $x_0 + \frac{\tau_n}{2} = u_n + \frac{\varrho_n}{2}$; wenn $x_0 < y_n$ ist, dann setzen wir $y_n + \frac{\tau_n}{2} = u_n + \frac{\varrho_n}{2}$ und $x_0 - \frac{\tau_n}{2} = u_n - \frac{\varrho_n}{2}$. Dann ist $x_0 - \frac{\varrho_n}{2} < u_n < x_0 + \frac{\varrho_n}{2}$ für jedes n. Also bekommen wir: $\lim_{n\to\infty} (u_n, \varrho_n) = (x_0, 0)$, $(u_n, \varrho_n) \in S_{x_0}$ und

$$\frac{f\left(u_n + \frac{\varrho_n}{2}\right) - f\left(u_n - \frac{\varrho_n}{2}\right)}{\varrho_n} > a$$

für jedes n. Es muß also $\limsup_{F^{(2)}_{x_0}} \Phi(u, v) \geqq a$ sein, was unmöglich ist.

Wir zeigen noch die Gültigkeit von $\liminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqq \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ die gegen x_0 konvergiert. Wenn für eine Folge $\{y_n\}_{n-1}^{\infty}$, die gegen x_0 konvergiert, die Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = a < \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ gilt, dann ist entweder $y_n < x_0$ oder $y_n > x_0$. Im ersten Falle wählen wir $y_n = x_0 - \frac{r_n}{2}$ und $z_n = x_0 + \frac{r_n}{2}$; im zweiten Falle wählen wir $y_n = x_0 + \frac{r_n}{2}$ und $z_n = x_0 - \frac{r_n}{2}$. Dann ist $(x_0, r_n) \in S_{x_0}$ für jedes n und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{r_n}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{r_n}{2}\right)}{r_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{f\left(x_0 + \frac{r_n}{2}\right) - f(x_0)}{\frac{r_n}{2}} + \frac{f(x_0) - f\left(x_0 - \frac{r_n}{2}\right)}{\frac{r_n}{2}}\right) < \frac{1}{2}\left(a + \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)\right) < \Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0),$$

was unmöglich ist.

Es ist jetzt evident, daß $f'(x_0)$ existiert und gleich $\Phi_{F^{(2)}_{x_0}}(x_0)$ ist.

Lemma 3. *Es sei g eine reelle Funktion auf $H = \{(x, y) : y > x\}$, die folgende Bedingung*

$$\min(g(a_1, b_1), g(b_1, c_1)) \leqq g(a_1, c_1) \text{ für alle } a_1 < b_1 < c_1 \tag{2}$$

erfüllt. Es sei $F_x = \{L_x \cup P_x\}$. Es sei $\alpha = g(a, b)$. Dann existiert in (a, b) mindestens ein Punkt ξ_1 so, daß $\liminf_{F_{\xi_1}} g(u, v) \leqq \alpha$ ist.

Beweis. Aus $\min\left(g\left(a, \frac{a+b}{2}\right), g\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right) \leqq \alpha$ folgt die Existenz eines Punktes $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)})$ derart, daß $g(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}) \leqq \alpha$ und $\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)} = \frac{b-a}{2}$ gilt. Wir können mit dieser Methode die Existenz einer solchen Folge $\{(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten beweisen, daß $g(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) \leqq \alpha$ und $\xi_2^{(n)} - \xi_1^{(n)} = \frac{b-a}{2^n}$ gilt. Es sei ξ das Limes $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)}$. Weil $\min\,(g(\xi_1^{(n)}, \xi), g(\xi, \xi_2^{(n)})) \leqq g(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) \leqq \alpha$ für alle n gilt, muß für jedes n eintweder $g(\xi_1^{(n)}, \xi) \leqq \alpha$ oder $g(\xi, \xi_2^{(n)}) \leqq \alpha$ gelten. Darum muß $\lim\inf_{\mathscr{F}_\xi} g(u, v) \leqq \alpha$ sein.

Lemma 4. *Es sei g eine reelle Funktion auf $H = \{(x, y) : y > x\}$, die die Bedingung (2) erfüllt. Es sei $\mathscr{F}_x = \{L_x \cup P_x\}$. Es sei $\alpha < \beta$ und $f_{\mathscr{F}_x}(x) \geqq 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. Dann gilt $g(a, b) \geqq 0$ für alle a und b, welche die Ungleichung $\alpha < a < b < \beta$ erfüllen.*

Beweis. Das Lemma folgt unmittelbar aus dem Lemma 3.

Satz 2. (*Die Verallgemeinerung von Lemma 2*) *Es sei $\mathscr{F}_x^{(1)}$ das System aller Teilmengen von $L_x \cup P_x$, die den Punkt (x, x) als Dichtigkeitspunkt bezüglich L_x wie auch bezüglich P_x haben und $\mathscr{F}_x^{(2)}$ sei $\{L_x \cup P_x\}$. Es sei g eine reelle Funktion auf $H = \{(x, y) : y > x\}$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Wenn $\bar{f}_{\mathscr{F}_x^{(1)}}(x)$ für jedes x existiert und wenn $\underline{f}_{\mathscr{F}_x^{(1)}}(x) \geqq 0$ für alle x ist, dann ist $g(x, y) \geqq 0$ auf der Menge H.*

Beweis. Dieser Satz geht aus dem Satz 1. und dem Lemma 4. hervor.

LITERATUR

[1] KHINTCHINE, A.: Recherches sur la structure des fonctions mesurables. Fund. Math., *9*, 1927, 212—279.

[2] MIŠÍK, L.: Bemerkungen über approximative Ableitung. Mat. Čas., *19*, 1969, 283—291.

[3] MIŠÍK, L.: Notes on an approximate derivative. Mat. Čas., *22*, 1972, 108—114.

[4] SNYDER, L. E.: Approximate Stolz angle limits. Proc. Amer. Math. Soc., *17*, 1966, 416—422.

Eingegangen am 23. 12. 1970

Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied
Bratislava