Roman Koplatadze

Заметка о колебломости решений дифференциальных уравнений второго порядкка с запаздывающим аргументом

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 3, 253--261

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126522

Matematický časopis 22 (1972), No. 3

ЗАМЕТКА О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

РОМАН КОПЛАТАДЗЕ, Тбилиси, СССР

В настоящей статье рассматривается вопрос о колеблемости решений уравнения

$$u''(t) + f(t,\, u(\tau_1(t)),\, \ldots,\, u(\tau_m(t)),\, u'(\tau_1(t)),\, \ldots,\, u'(\tau_m(t))) = 0\,, \tag{1}$$

где функция $f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ определена в области

$$D = \{(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) : 0 \leqslant t < +\infty,\ |x_i| + |y_i| < +\infty\ (i = 1, \ldots, m)\}$$

и удовлетворяет локальным условиям Каратеодори, т. е. измерима по t, непрерывна по $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ и

$$f^*(t, r) =$$
$$= \sup\,\{|f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)| : |x_i| + |y_i| \leqslant r\ (i = 1, \ldots, m)\} \in L(0, a)$$

для любых $r \in (0, +\infty)$ и $a \in (0, +\infty)$, а функции $\tau_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывны в промежутке $[0, +\infty)$,

$$\tau_i(t) \leqslant t \text{ при } t \in [0, +\infty) \text{ и } \lim_{t \to +\infty} \tau_i(t) = +\infty\ (i = 1, \ldots, m)\,. \tag{2}$$

Пусть

$$t_0 \in [0, +\infty) \text{ и } \tau_{i0} = \inf\,\{\tau_i(t) : t \geqslant t_0\}\,, \tag{3}$$
$$\tau_0 = \min\,\{\tau_{i0} : (i = 1, \ldots, m)\}\,.$$

Скажем, что непрерывно дифференцируемая в $[\tau_0, +\infty)$ функция $u(t)$ является решением уравнения (1) в промежутке $[t_0, +\infty)$, если она абсолютно непрерывна вместе с $u'(t)$ на каждом конечном отрезке промежутка $[t_0, +\infty]$ и при почти всех $t \in [t_0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению (1).

Функцию $u(t)$ назовем правильным решением уравнения (1), если она является решением этого уравнения на некотором промежутке $[t_0, +\infty)$ и $u(t) \not\equiv 0$ при $t \in [a, +\infty)$ для любого $a \in [t_0, +\infty)$.

Правильное решение $u(t)$ уравнения (1) назовем колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей сходящуюся к $+\infty$, а в противном случае — неколеблющимся.

Ниже через D_c обозначается множество

$$(4)\quad D_c = \left\{(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) : 0 \leqslant t < +\infty, \frac{1}{C} \leqslant x_i \operatorname{sign} x_1 \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant c\tau_i(t), |y_i| \leqslant c \ (i = 1, \ldots, m)\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть для любого* $c \in (0, +\infty)$ *найдется такая функция* $\varphi_c(t, x_1, \ldots, x_m)$, *определенная в области* $0 \leqslant t < +\infty$, $|x_i| < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$ *и удовлетворяющая локальным условиям Каратеодори, что*

$$(5)\qquad 0 \leqslant \varphi_c(t, x_1, \ldots, x_m) \leqslant \varphi_c(t, y_1, \ldots, y_m)$$

при

$$t \geqslant 0, x_1x_i \geqslant 0, x_iy_i \geqslant 0 \text{ и } |x_i| \leqslant |y_i| \ (i = 1, \ldots, m),$$

на множестве D_c *соблюдается неравенство*

$$(6)\qquad f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \operatorname{sign} x_1 \geqslant \varphi_c(t, x_1, \ldots, x_m)$$

и при любом $t_0 \in [0, +\infty)$ *имеем*

$$(7)\qquad \sup \{\varrho_j(t_0; t^*) : t^* > t_0\} = +\infty \ (j = 0, 1),$$

где $\varrho_j(t; t^*)$ — *верхнее решение задачи*

$$(8)\qquad \frac{d\varrho}{dt} = -\varphi_c(t, (-1)^j\tau_1(t)\varrho, \ldots, (-1)^j\tau_m(t)\varrho), \ \varrho(t^*) = 0.$$

Тогда все правильные решения уравнения (1) *колеблющиеся.*

Доказательство. Прежде всего, докажем, что из условия (7) вытекают следующие соотношения

$$(9)\qquad \int_0^{+\infty} \varphi_c(t, c_0\tau_1(t), \ldots, c_0\tau_m(t))\, dt = +\infty \text{ для любого } c_0 \neq 0,$$

и

$$(10)\quad \int_t^{+\infty} \varphi_c(s, c_1, \ldots, c_m)\, ds > 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, c_1c_i > 0 \ (i = 1, \ldots, m).$$

Предположим, что для некоторого $c_0 \neq 0$ условие (9) нарушается. Подберем $t_0 \in [0, +\infty)$ таким образом, чтобы $\tau_i(t) > 0$ при $t \geqslant t_0$ $(i = 1, \ldots, m)$ и

$$(11) \qquad \int_{t_0}^{+\infty} \varphi_c(t, c_0\tau_1(t), \ldots, c_0\tau_m(t))\, \mathrm{d}t < |c_0|.$$

Пусть $t^* > t_0$ и $j = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} c_0)$. Ясно, что в малой окрестности точки t^* соблюдается неравенство $\varrho_j(t; t^*) < |c_0|$. Покажем, что это неравенство соблюдается на всем отрезке $[t_0, t^*]$. В самом деле, в противном случае найдется такое $t_1 \in [t_0, t^*)$, что $\varrho_j(t_1; t^*) = |c_0|$ и $\varrho_j(t; t^*) < |c_0|$ при $t \in (t_1, t^*]$. Поэтому, ввиду (5) и (11) получим противоречие —

$$|c_0| = \varrho_j(t_1; t^*) = \int_{t_0}^{t^*} \varphi_c(s, (-1)^j\tau_1(s)\varrho_j(s; t^*), \ldots, (-1)^j\tau_m(s)\varrho_j(s; t^*))\, \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{+\infty} \varphi_c(s, c_0\tau_1(s), \ldots, c_0\tau_m(s))\, \mathrm{d}s < |c_0|.$$

Следовательно, $\varrho_j(t_0; t^*) < |c_0|$ при $t^* > t_0$, что противоречит условию (7). Полученное противоречие доказывает справедливость условия (9).

Предположим теперь, что для некоторых t_0 и c_i $(i = 1, \ldots, m)$, где $t_0 \in [0, +\infty)$ и $c_1c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, соблюдается условие

$$(12) \qquad \int_{t_0}^{+\infty} \varphi_c(t, c_1, \ldots, c_m)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Согласно (2), без ограничения общности можем считать, что $\tau_i(t) > 0$ при $t \geqslant t_0$ $(i = 1, \ldots, m)$. В силу (7), для достаточно большого t^* будем иметь $\varrho_j(t_0; t^*) > 0$ $(i = 0, 1)$. Пусть $j = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} c_1)$ и t_1 — точная верхняя грань множества тех $t \in [t_0, t^*)$, для которых $\varrho_j(t; t^*) > 0$. Ясно, что $\varrho_j(t; t^*) = 0$ при $t \in [t_1; t^*]$. Поэтому $0 \leqslant \varrho_j(t; t^*)\tau_i(t) \leqslant |c_i|$ $(i = 1, \ldots, m)$ при $t \in [t_1 - \varepsilon, t^*]$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое число. Согласно (5) и (12), из (8) имеем

$$\varrho_j(t; t^*) = \int_{t}^{t^*} \varphi_c(s, (-1)^j\tau_1(s)\varrho_j(s; t^*), \ldots, (-1)^j\tau_m(s)\varrho_j(s; t^*))\, \mathrm{d}s = 0$$

$$\text{при } t \in [t_1 - \varepsilon, t^*],$$

что противоречит определению t_1. Тем самым справедливость условия (10) доказана.

Поскольку условия (5) и (6) соблюдаются для любого $c \in (0, +\infty)$, очевидно, что

(13) $$f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \operatorname{sign} x_1 \geqslant 0$$

$$\text{при } t \geqslant 0,\ x_1 x_i \geqslant 0\ |y_i| < +\infty\ (i = 1, \ldots, m).$$

Допустим теперь, что уравнение (1) имеет неколеблющееся решение $u(t)$. Тогда согласно (2), (10) и (13), будем иметь

(14) $$u'(t)u(t) > 0,\ u''(t) \operatorname{sign} u(t) \leqslant 0 \text{ при } t \geqslant t_0,$$

и

(15) $$(t, u(\tau_1(t)), \ldots, u(\tau_m(t)), u'(\tau_1(t)), \ldots, u'(\tau_m(t))) \in D_c \text{ при } t \geqslant t_0,$$

где c и t_0 — достаточно большие положительные числа.

Рассмотрим функцию $v(t) = t|u'(t)| - |u(t)|$. Согласно (14), имеем

$$v'(t) = tu''(t) \operatorname{sign} u(t) \leqslant 0 \text{ при } t \geqslant t_0.$$

Поэтому либо

(16) $$t|u'(t)| - |u(t)| \geqslant 0 \text{ при } t \geqslant t_0,$$

либо найдется такое число $\bar{t} \geqslant t_0$, что

(17) $$t|u'(t)| - |u(t)| < 0 \text{ при } t \geqslant \bar{t}.$$

Пусть соблюдается условие (16). Тогда

$$u(t) \operatorname{sign} u(t) \geqslant \mu_1 t \text{ при } t \geqslant t_0, \text{ где } \mu_1 = \frac{|u(t_0)|}{t_0} > 0.$$

Отсюда, ввиду (2), вытекает, что

(18) $$u(\tau_i(t)) \operatorname{sign} u(\tau_1(t)) \geqslant \mu_1 \tau_i(t) > 0\ (i = 1, \ldots, m) \text{ при } t \geqslant t_1,$$

где $t_1 \geqslant t_0$ достаточно большое число.

В силу (5), (6), (14), (15) и (18), из равенства

$$\int_{t_1}^{t} f(s, u(\tau_1(s)), \ldots, u(\tau_m(s)), u'(\tau_1(s)), \ldots, u'(\tau_m(s)))\, \mathrm{d}s = u'(t_1) - u'(t)$$

получим

$$\int_{+\infty}^{t_1} \varphi_c(s, (-1)^j \mu_1 \tau_1(s), \ldots, (-1)^j \mu_1 \tau_m(s))\, \mathrm{d}s < +\infty, j = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} u(t_0)),$$

что противоречит условию (9).

Допустим теперь, что соблюдается условие (17). Пусть $j = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} u(t_0))$ и $t^* > \bar{t}$. Согласно (14), ясно, что в достаточно малой левой окрестности точки t^* соблюдается неравенство $|u'(t)| > \varrho_j(t;\, t^*)$. Докажем, что это неравенство соблюдается на всем отрезке $[\bar{t},\, t^*]$.

В самом деле, в противном случае найдется такое число $t_1 \in [\bar{t},\, t^*)$ что $||u'(t)| > \varrho_j(t;\, t^*)$ при $t \in (t_1,\, t^*]$ и $|u'(t_1)| = \varrho_j(t_1;\, t^*)$. Но это невозможно, поскольку, ввиду (5), (6), (13), (14) и (17), имеем

$$0 = |u'(t_1)| - \varrho_j(t_1\,;\, t^*) = |u'(t^*)| +$$

$$+ \int_{t_1}^{t^*} [|f(s,\, u(\tau_1(s)),\, \ldots,\, u(\tau_m(s)),\, u'(\tau,\, (s)),\, \ldots,\, u'(\tau_m(s)))| -$$

$$- \varphi_c(s,\, (-1)^j \tau_1(s) \varrho_j(s\,;\, t^*),\, \ldots,\, (-1)^j \tau_m(s) \varrho_j(s\,;\, t^*))]\, \mathrm{d}s >$$

$$> \int_{t_1}^{t^*} [\varphi_c(s,\, \tau_1(s) u'(s),\, \ldots,\, \tau_m(s) u'(s)) -$$

$$- \varphi_c(s,\, (-1)^j \tau_1(s) \varrho_j(s\,;\, t^*),\, \ldots,\, (-1)^j \tau_m(s) \varrho_j(s\,;\, t^*))]\, \mathrm{d}s \geqslant 0\ .$$

Следовательно, $\varrho_j(\bar{t}\,;\, t^*) < |u'\,(\bar{t})|$ при $t^* > \bar{t}$, а это противоречит условию (7). Теорема доказана.

Частным случаем доказанной теоремы является одна теорема Д. В. Изюмовой о колеблемости решений уравнения $u'' + f(t,\, u) = 0$ (см. [2], теорема 1.3).

Следствие 1. *Пусть в области D соблюдается неравенство*

$$f(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_m,\, y_1,\, \ldots,\, y_m)\, \mathrm{sign}\, x_1 \geqslant g(y_1,\, \ldots,\, y_m) \sum_{i=1}^{m} a_i(t) |x_i|^{\sigma_i}, \tag{19}$$

где $0 < \sigma_i < 1$ $(i = 1,\, \ldots,\, m)$, функция $g(y_1,\, \ldots,\, y_m)$ непрерывна и положительна в области $|y_i| < +\infty$ $(i = 1,\, \ldots,\, m)$, функции $a_i(t)$ $(i = 1,\, \ldots,\, m)$ неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0,\, +\infty)$. *Тогда для колеблемости всех правильных решений уравнения* (1) *достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^{+\infty} a_i(t)\ |\tau_i(t)|^{\sigma_i}\, \mathrm{d}t = +\infty\ . \tag{20}$$

Доказательство. Ввиду (20), без ограничения общности, можем читать, что

$$\int_0^{+\infty} a_1(t)\ |\tau_1(t)|^{\sigma_1}\, \mathrm{d}t = +\infty\ . \tag{21}$$

Пусть C — произвольное положительное число. Положим

$$\eta_c = \min\,\{g(y_1, \ldots, y_m) : |y_i| \leqslant C \ (i = 1, \ldots, m)\}$$

и

$$\varphi_c(t, x_1, \ldots, x_m) = \eta_c a_1(t)\,|x_1|^{\sigma_1}\,.$$

Тогда, как это ясно из (19), на множестве D_c соблюдается неравенство (6). Поэтому согласно теореме 1, для доказательства следствия достаточно показать, что

(22) $$\sup\,\{\varrho(t_0; t^*) : t^* > t_0\} = +\infty \quad \text{для любого} \quad t_0 \in [0, +\infty),$$

где $\varrho(t\,; t^*)$ — верхнее решение задачи

(23) $$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\eta_c a_1(t)\,|\tau_1(t)|^{\sigma_1}\,|\varrho|^{\sigma_1}, \quad \varrho(t^*) = 0\,.$$

Легко видеть, что

$$\varrho(t\,; t^*) = \{(1 - \sigma_1)\eta_c \int\limits_t^{t^*} a_1(s)\,|\tau_1(s)|^{\sigma_1}\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{1-\sigma_1}}.$$

Отсюда, ввиду (21), непосредственно вытекает справедливость условия (22). Следствие доказано.

Следствие 2. *Если в области D соблюдается условие*

(24) $$f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)\,\mathrm{sign}\,x_1 \geqslant g(y_1, \ldots, y_m) \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,|x_i|\,,$$

где функция $g(y_1, \ldots, y_m)$ непрерывна и положительна в области $|y_i| < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$, а функции $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$. *Тогда для колеблемости всех правильных решений уравнения* (1) *достаточно, чтобы*

(25) $$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{+\infty} a_i(t)\,|\tau_i(t)|^{1-\varepsilon}\,\mathrm{d}t = +\infty\,,$$

где $\varepsilon > 0$ сколько угодно малое число.

Доказательство. Ввиду (25), без ограничения общности можем считать, что соблюдается условие (21), где

(26) $$\sigma_1 = 1 - \varepsilon\,.$$

Согласно (24) и (26), очевидно, что при любом $c \in (0, +\infty)$ на множестве D_c соблюдается неравенство (5), где

$$\varphi_c(t, x_1, \ldots, x_m) = \eta_c a_1(t)\, |x_1|^{\sigma_1},$$

$$\eta_c = c^{-\varepsilon} \min \{g(y_1, \ldots, y_m) : |y_i| \leqslant c \ (i = 1, \ldots, m)\} .$$

Но как было показано выше, если соблюдается условие (21), то верхнее решение $\varrho(t\,;\, t^*)$ задачи (23) удовлетворяет условию (22). Поэтому из теоремы 1 непосредственно вытекает справедливость следствия 2.

Теорема 2. *Пусть в области D соблюдается условие*

$$(27)\qquad g_1(y_1, \ldots, y_m) \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\, |x_i|^{\sigma_i} \leqslant f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \operatorname{sign} x_1 \leqslant$$

$$\leqslant g_2(y_1, \ldots, y_m) \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\, |x_i|^{\sigma_i},$$

где $0 < \sigma_i < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, функции $g_k(y_1, \ldots, y_m)$ $(k = 1,2)$ непрерывны и положительны в области $|y_i| < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$, а функции $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке промежутка $[0, +\infty)$. Тогда для колеблемости всех правильных решений уравнения (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (20).

Доказательство. Достаточность следует из следствия 1 теоремы 1. Докажем необходимость. Предположим, что условие (20) нарушается.

Подберем $t_0 > 0$ таким образом, чтобы

$$(28)\qquad \tau_0 > 0 \ \text{и}\ \eta \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{+\infty} a_i(t)\, |\tau_i(t)|^{\sigma_i}\, dt \leqslant \frac{1}{4},$$

где $\eta = \max \{g_2(y_1, \ldots, y_m) : |y_i| \leqslant 1 \ (i = 1, \ldots, m)\}$ и τ_0 определено равенством (3) число.

Для уравнения (1) рассмотрим начальную задачу

$$(29)\qquad u(t) = \frac{t}{2},\ u'(t) = \frac{1}{2} \ \text{при}\ t \in [\tau_0, t_0] .$$

Очевидно, что в достаточно малой правой окрестности точки t_0 соблюдается неравенство

$$(30)\qquad \frac{t}{4} < u(t) < t, \quad |u'(t)| < 1 .$$

Покажем, что это неравенство соблюдается на всем промежутке $[t_0, +\infty)$.

Допустим противное. Пусть найдется такое число $t_1 > t_0$, что при

$t \in [t_0, t_1)$ соблюдаются неравенства (30), а при $t = t_1$ какое-нибудь из этих неравенств нарушается.

Из равенства

$$u'(t) = \frac{1}{2} - \int_{t_0}^{t} f(s, u(\tau_1(s)), \ldots, u(\tau_m(s)), u'(\tau_1(s)), \ldots, u'(\tau_m(s)))\, ds,$$

согласно (27), (28) и (29), находим

$$\frac{1}{4} \leqslant u'(t) < 1 \text{ при } t \in [t_0, t_1] .$$

После интегрирования этого неравенства, ввиду (29), получим

$$\frac{t}{4} < u(t) < t \text{ при } t \in [t_0, t_1],$$

что противоречит принятому выше предположению. Полученное противоречие доказывает, что неравенство (30) соблюдается на $[t_0, +\infty)$.

Следовательно, если нарушается условие (20), уравнение (I) имеет неколеблющееся правильное решение. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно получается такое

Следствие. *Пусть* $0 < \sigma_i < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, *функции* $b_i(y_1, \ldots, y_m)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *положительны и непрерывны в области* $|y_i| < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$, *а функции* $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *неотрицательны и суммируемы на каждом конечнот отрезке промежутка* $[0, +\infty)$. *Тогда для колеблемости всех правильных ретений уравнения*

$$u''(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(t) b_i(u'(\tau_1(t)), \ldots, u'(\tau_m(t)))\, |u(\tau_i(t))|^{\sigma_i} \operatorname{sign} u(\tau_1(t)) = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось условие (20).

Частными случаями этого предложения являются хорошо известная теорема Ш. Белогореца [1] и теорема О. М. Одарича [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] BELOHOREC, Š.: Oscilatorické riešenia istej nelineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu. Mat.-fyz. časop., *11*, 1961, 250—255.

[2] ИЗЮМОВА, Д. В.: Об условиях колеблемости и неколеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второво порядка. Дифференциальные уравнения 2, № *12*, 1966, 1572—1586.

[3] ОДАРИЧ, О. М.: Про асимптотичну поведінку розв'язків нелінійного диференціального рівняння другого порядку із запізненням. Доповіді АН УРСР, А, № *8*, 1968, 712—716.

Поступило 31. 12. 1970

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета
Тбилиси

A NOTE ON THE OSCILLATION OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT

Roman Koplatadze, Tbilisi

Summary

The question of the oscillation of solutions of differential equations (1) is considered, where the function $f(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ is defined in the domain

$$D = \{(t, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) : 0 \leqq t < +\infty,\ |x_i| + |y_i| < +\infty\ (i = 1, \ldots, m)\}$$

and satisfies the local conditions of Caratheodory and the functions $\tau_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ are continuous in $[0, +\infty)$ and satisfy the conditions (2).

The solution $u(t)$ of equation (1) is called regular if it is defined in some interval $[t_0, \infty)$ and is not uniformly equal to zero for a large t.

The regular solution $u(t)$ of equation (1) is called oscillatory if it has the sequence of zeros convergent $t_0 + \infty$.

The following theorems are proved.

Theorem 1. Suppose for any $c \in (0, +\infty)$ we can find such a function $\varphi_c(t, x_1, \ldots, x_m)$ satisfying the local conditions of Caratheodory and conditions (5) that on the set (4) the inequality (6) is fulfilled and let the condition (7) be satisfied, where $\varrho_j(t; t^*)$ is the upper solution of problem (8). Then all the regular solutions of equation (1) are oscillatory.

Theorem 2. Let in the domain D the condition (27) be fulfilled, where $0 < \sigma_i < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, the functions $g_k(y_1, \ldots, y_m)$ $(k = 1, 2)$ are continuous and positive in the domain $|y_i| < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$ and the functions $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ are non-negative and summable on every finite segment of the interval $[0, +\infty)$. Then for the oscillation of all regular solutions of equation ( ) it is necessary and sufficient that the condition (20) be fulfilled.