Svatoslav Staněk

Eine Bemerkung zur Lösung der Operatorgleichung $P(y) = 0$

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 4, 270--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126553

[redacted]

BEMER

[redacted]

[redacted]

positiven inversen Operator Λ^{-1} besitzt und für jedes Element $\Delta y \in \mathscr{L} \cap \mathscr{P}$ die Ungleichung

$$P(y + \Delta y) - P(y) \geqq \Lambda(\Delta y) \tag{2}$$

erfüllt.

5. Jede wachsende (fallende) Folge $\{y_n\}$, der Elemente aus $\langle y_0, z_0\rangle$, für welche die Relationen $y_n - y_{n+1} \leqq \Gamma^{-1}P(y_n) \leqq O$ $(y_n - y_{n+1} \geqq \Gamma^{-1}P(y_n) \geqq O)$ gelten, konvergiert in $\langle y_0, z_0\rangle$. Dann besitzt die Operatorgleichung

$$P(y) = O \tag{3}$$

eine einzige Lösung ξ in $\langle y_0, z_0\rangle$.

Wenn wir die Elemente der Folgen $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ durch den Algoritmus

$$y_{n+1} = y_n - [\Gamma^1_{(y_n, z_n)}]^{-1}P(y_n) \tag{4'}$$
$$z_{n+1} = z_n - [\Gamma^2_{(y_n, z_n)}]^{-1}P(z_n) \tag{4''}$$

definieren, dann haben wir $y_n \nearrow \xi$, $z_n \searrow \xi$.

Beweis. Wir teilen den Beweis unseres Satzes in drei Teile.

I. Die Folgen $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ seien durch den Algoritmus (4) definiert. Wir beweisen durch Induktion, dass für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Relationen $y_n, z_n \in \langle y_0, z_0\rangle$, $P(y_n) \leqq O \leqq P(z_n)$, $y_{n-1} \leqq y_n \leqq z_n \leqq z_{n-1}$ gelten (dabei setzen wir $y_{-1} = y_0$, $z_{-1} = z_0$).

Wir beweisen nun die Gültigkeit der angeführten Relationen für $n = s + 1$, indem wir ihre Gültigkeit für $n = 0, 1, \ldots, s$ voraussetzen. Nach (4) ist

$$\begin{aligned} y_{s+1} &= y_s - [\Gamma^1_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(y_s) \\ z_{s+1} &= z_s - [\Gamma^2_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(z_s). \end{aligned} \tag{5}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung $P(y_s) \leqq O \leqq P(z_s)$ und aus der Positivität der Operatoren $[\Gamma^i_{(y_s, z_s)}]^{-1}$, $i = 1, 2$ (die aus der Voraussetzung 2 folgt), bekommen wir

$$[\Gamma^1_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(y_s) \leqq O, \quad [\Gamma^2_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(z_s) \geqq O. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt $y_{s+1} \geqq y_s$, $z_{s+1} \leqq z_s$. Setzen wir jetzt in die Ungleichung (1′) ((1″)) $a = y_s$, $b = \alpha = z_s$, $(b = z_s$, $a = \alpha = y_s)$ ein:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{(y_s, z_s)}(z_s - y_s) &\geqq P(z_s) - P(y_s) \\ \Gamma^2_{(y_s, z_s)}(z_s - y_s) &\geqq P(z_s) - P(y_s). \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt den positiven Operator $[\Gamma^1_{(y_s, z_s)}]^{-1}$ resp. $[\Gamma^2_{(y_s, z_s)}]^{-1}$ auf beiden Seiten der letzten Ungleichungen anwenden, bekommen wir mittels (4) und (6)

$$\begin{aligned} z_s - y_s &\geqq [\Gamma^1_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(z_s) - [\Gamma^1_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(y_s) = [\Gamma^1_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(z_s) + y_{s+1} - y_s \\ z_s - y_s &\geqq [\Gamma^2_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(z_s) - [\Gamma^2_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(y_s) = -z_{s+1} + z_s - [\Gamma^2_{(y_s, z_s)}]^{-1}P(y_s) \end{aligned}$$

[redacted] Lösung [redacted]
Ungleich[redacted]

[redacted]

$$\Lambda^{-1}(\Delta\bar{s}) = \int_{x_0}^{x} e^{Q(x-t)}\Delta\bar{s}(t)\mathrm{d}t \qquad \Delta\bar{s} \in \mathscr{X}$$

Bei der numerischen Lösung der Operatorgleichung (3) auf $\langle y_0, z_0\rangle$ können wir natürlich die Behauptung des Satzes 1 benutzen, indem wir y_n resp. z_n für die angenäherte Lösung von (3) nehmen. Wichtig ist dabei die Frage, wie gross die Differenz zwischen der Lösung ξ der Operatorgleichung (3) und y_n resp. z_n ist. Um diese Frage zu beantworten, werden wir von $\mathscr{X}$ noch eine weitere Eigenschaft verlangen (ausser den Eigenschaften a)—c)) und zwar
d) $\mathscr{X}$ ist ein normierter Raum und die Norm $\|.\|$ ist halbmonoton in $\mathscr{X}$, d. h. venn $O \leqq y \leqq z$, dann $\|y\| \leqq \|z\|$.

Satz 2. Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt und $\mathscr{X}$ besitze noch die Eigenschaft d). Weiter seien $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ zwei Folgen von Elementen aus $\langle y_0, z_0\rangle$, die durch den Algoritmus (4) definiert sind. Für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ sei die Ungleichung

$$(8) \qquad \|z_n - [\Gamma^2_{(y_n, z_n)}]^{-1}P(z_n) - y_n + [\Gamma^1_{(y_n, z_n)}]^{-1}P(y_n)\| \leqq S \,.\, \|z_n - y_n\|^k$$

erfüllt, wo $S \geqq 0$, $k > 1$ geeignete Konstanten sind. Dann gilt

$$\|z_n - \xi\| \leqq S^{\frac{k^n-1}{k-1}} \,.\, \|z_0 - y_0\|^{k^n}$$

$$\|y_n - \xi\| \leqq S^{\frac{k^n-1}{k-1}} \,.\, \|z_0 - y_0\|^{k^n}$$

wo ξ die Lösung der Operatorgleichung (3) auf $\langle y_0, z_0\rangle$ bedeutet.

B e w e i s. Aus (4) und (8) folgt sofort die Abschätzung

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \leqq S \,.\, \|z_n - y_n\|^k .$$

Es ist also

$$\|z_1 - y_1\| \leqq S \,.\, \|z_0 - y_0\|^k$$
$$\|z_2 - y_2\| \leqq S \,.\, \|z_1 - y_1\|^k \leqq S^{1+k} \,.\, \|z_0 - y_0\|^{k^2}$$

und allgemein

$$\|z_n - y_n\| \leqq S \,.\, \|z_{n-1} - y_{n-1}\|^k \leqq S^{1+k+\ldots+k^{n-1}} \,.\, \|z_0 - y_0\|^{k^n} = S^{\frac{k^n-1}{k-1}} \,.\, \|z_0 - y_0\|^{k^n} .$$

Die Behauptung des Satzes folgt sofort aus der letzten Ungleichung und aus den Ungleichungen

$$\|z_n - \xi\| \leqq \|z_n - y_n\|$$
$$\|y_n - \xi\| \leqq \|z_n - y_n\| .$$

Definition. Wir sagen, dass ein Raum mit den Eigenschaften a)—d) des Types f ist, wenn folgendes gilt:

1. Die Elemente von $\mathscr{X}$ sind Funktionen $x = x(t)$ einer reellen Veränderlichen $t \in \langle a, b\rangle$ $(b > a)$.

[redacted]