Ján Duplák

О некоторых подстановках медиальной квазигруппы

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 4, 315--324

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126562

Mat. Čas. 24, 1974, No. 4, 315—324

О НЕКОТОРЫХ ПОДСТАНОВКАХ МЕДИАЛЬНОЙ КВАЗИГРУППЫ

ЯН ДУПЛЯК (JÁN DUPLÁK)

Подстановка φ множества Q называется средней регулярной подстановкой квазигруппы $Q(.)$, если существует такая подстановка φ^* что $\varphi x . y = x . \varphi^* y$ для любых $x, y \in Q$. Подстановка φ^* называется сопряженной подстановке φ. Пусть $\mathscr{G}$-группа порожденная всеми трансляциями L_a: $Q \to Q$, $x \to a . x$; R_a: $Q \to Q$, $x \to x . a$ квазигруппы $Q(.)$. Группа $\mathscr{G}$ называется группой ассоциированной с квазигруппой $Q(.)$. В [1] (стр. 24) доказывается, что все средние регулярные подстановки любой квазигруппы $Q(.)$ образуют группу (которую будем обозначать Φ), антиизоморфную группе Φ^* сопряженных подстановок φ^* для всех $\varphi \in \Phi$. Также доказывается, что Φ является подгруппой группы $\mathscr{G}$. Здесь мы покажем свойства группы, ассоциированной с любой медиальной квазигруппой, при помощи группы средних регулярных подстановок этой квазигруппы.

Символом $Q(.)$ будем обозначать медиальную квазигруппу, т. е. квазигруппу с тождеством $xy . uv = xu . yv$.

Лемма 1. *Пусть*

$$M = \{R_x R_y^{-1} : x, y \in Q\}, \quad N = \{R_z^{-1} R_t : z, t \in Q\}.$$

Тогда $\Phi = M = N$.

Доказательство. Тождество $ux . yz = uy . xz$ с помощью трансляций можно переписать в следующем виде

$$R_x u . L_y z = R_y u . L_x z,$$

откуда

$$(1) \qquad R_x R_y^{-1} u . z = u . L_x L_y^{-1} z,$$

$$R_z R_x R_y^{-1} u = R_{L_x L_y^{-1} z} u,$$

$$(2) \qquad R_z R_x R_y^{-1} = R_{L_x L_y^{-1} z},$$

$$R_x R_y^{-1} = R_z^{-1} R_{L_x L_y^{-1} z},$$

следовательно, $M \subset N$. Обратно, пусть $R_z^{-1}R_t$ — любой элемент из N. Если $x \in Q$ — любой элемент и если $z = y \cdot L_x^{-1}t$, т. е. $z = L_y L_x^{-1} t$, тогда из (2) получим

$$R_z R_x R_y^{-1} = R_{L_x L_y^{-1} L_y L_x^{-1} t} = R_t,$$

откуда $R_x R_y^{-1} = R_z^{-1} R_t$, следовательно $N \subset M$. Таким образом $N = M$. Из тождества (1) следует, что $R_x R_y^{-1}$ — средняя регулярная подстановка, следовательно, $M \subset \Phi$. Обратно, пусть $q \in \Phi$. Тогда $qx \cdot y = x \cdot q^* y$. Это равенство можно переписать с помощью трансляций в виде $R_y q x = R_{q^* y} x$, т. е. $R_y q = R_{q^* y}$, откуда $q = R_y^{-1} R_{q^* y}$, следовательно, $q \in N = M$, итак, $\Phi \subset M$. Таким образом, $\Phi = M = N$.

Следствие 1. *Для любых a, b, $c \in Q$ существует $d \in Q$ так, что*

$$R_a^{-\delta} R_b^{\delta} R_c^{\delta} = R_d^{\delta},$$

где $\delta = \pm 1$.

Действительно, согласно лемме 1, существуют e, f, g, $h \in Q$ так, что

$$R_a^{-1} R_b R_c = R_e R_f^{-1} R_c = R_e R_g R_h^{-1}$$

и ввиду (2) находим $R_e R_g R_h^{-1} = R_d$.

Следствие 2. *Пусть c — фиксированный элемент из Q. Тогда*

(3) $$\Phi = \{R_x R_c^{-1} : x \in Q\} = \{R_c R_x^{-1} : x \in Q\}.$$

Символом G_R (G_L) будем обозначать подгруппу группы $\mathscr{G}$, порожденную всеми правыми (левыми) трансляциями квазигруппы $Q(.)$.

Лемма 2. *Пусть N-множество всех натуральных чисел и пусть*

$$P = \{R_{a_1}^{\delta} \ldots R_{a_n}^{\delta} : \delta = \pm 1,\ n \in N,\ a_1, \ldots, a_n \in Q\}.$$

тогда $G_R = P \cup \Phi$.

Доказательство. Пусть

$$B = \{R_a^{\delta} : a \in Q,\ \delta = \pm 1\},$$

т. е. B — базис группы G_R. Инклюзия $P \cup \Phi \subset G_R$ является очевидной. Если ψ (любой элемент из G_R) является произведением n подстановок базиса B, то число n называется длиной элемента ψ. Инклюзию

(4) $$G_R \subset P \cup \Phi$$

будем доказывать индуктивно, ведя индукцию по длине элементов из G_R. Утверждение (3) очевидно для $n = 1$, $n = 2$. Пусть ψ из G_R имеет длину $n + 1$, $n \geq 2$. Тогда выполняется по крайней мере одно из равенств

$$\psi = \lambda R_a^{-1},\ \psi = \lambda R_a,\ \psi = R_a\lambda,\ \psi = R_a^{-1}\lambda,$$

где λ является элементом длины n, и по индуктивному предположению $\lambda \in G_R \cap (P \cup \Phi)$. Пусть

$$\psi = \lambda R_a,\ \lambda = R_{a_1}^{-1} \ldots R_{a_n}^{-1}.$$

Согласно лемме 1 существуют такие элементы $b_1, b_2, b_3, b_4 \in Q$, что

$$R_{a_n}^{-1}R_a = R_{b_1}R_{b_4}^{-1},\ R_{a_{n-1}}^{-1}R_{b_1} = R_{b_2}R_{b_3}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\lambda R_a = R_{a_1}^{-1} \ldots R_{a_{n-1}}^{-1}R_{a_n}^{-1}R_a = R_{a_1}^{-1} \ldots R_{a_{n-1}}^{-1}R_{b_1}R_{b_4}^{-1} =$$

$$= R_{a_1}^{-1} \ldots R_{a_{n-2}}^{-1}R_{b_2}R_{b_3}^{-1}R_{b_4}^{-1} = R_{a_1}^{-1} \ldots R_{a_{n-2}}^{-1}(R_{b_4}R_{b_3}R_{b_2}^{-1})^{-1},$$

откуда ввиду (2) получим

$$\lambda R_a = R_{a_1}^{-1} \ldots R_{a_{n-2}}^{-1}R_t^{-1},$$

т. е. $\psi \in P \cup \Phi$. Аналогично показывается, что $\psi \in P \cup \Phi$, если $\psi = \lambda R_a^{-1}$ или $\psi = R_a^{-1}\lambda$, или $\psi = R_a\lambda$. Таким образом, $G_R \subset P \cup \Phi$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $R = \{R_a : a \in Q\}$. Тогда, для любой медиальной квазигруппы выполняется одно и только одно из равенств*

$$R \cap \Phi = 0,\quad R = \Phi.$$

Доказательство. Пусть $R \cap \Phi \neq 0$. Тогда существуют $a, b, c \in Q$ так, что $R_a^{-1}R_b = R_c$, откуда $R_b = R_aR_c$, т. е. $1 = R_aR_cR_b^{-1}$. Ввиду (2) имеем $1 = R_{L_cL_b^{-1}a}$, следовательно, $L_cL_b^{-1}a = e$ — правая единица квазигруппы $Q(.)$. Пусть $R_iR_j^{-1} \in \Phi$ — любой элемент. В силу (3), существует $k \in Q$ так, что $R_iR_j^{-1} = R_kR_e^{-1} = R_k$, следовательно $R_iR_j^{-1} \in R$, итак, $\Phi \subset R$. Обратно, $R_d = R_dR_e^{-1} \in \Phi$, откуда $R \subset \Phi$. Таким образом $R = \Phi$.

Следствие. *Медиальная квазигруппа обладает правой единицей тогда и только тогда, когда $R = \Phi$.*

Условимся обозначать символом $\langle M \rangle$ группу, порожденную множеством M.

Теорема 1. *Φ является нормальной подгруппой группы G_R. Если $Q(.)$ не обладает правой единицей, тогда фактор-группа G_R/Φ изоморфна группе $\langle R_a \rangle$.*

Доказательство. Сначала докажем, что Φ является нормальной подгруппой группы G_R. Для этого достаточно показать, что для любых $R_a \in G_R$ и $q \in \Phi$, $R_aqR_a^{-1}$ является элементом группы Φ. Действительно, пусть $q = R_x^{-1}R_y$ — любой элемент из Φ. Тогда для любого $a \in Q$ верны равенства

$$R_a q R_a^{-1} = (R_a R_x^{-1})(R_y R_a^{-1}) = q_1 q_2,$$

где $q_1 = R_a R_x^{-1}$, $q_2 = R_y R_a^{-1}$ являются элементами из Φ. Так как Φ является группой, то $R_a q R_a^{-1} \in \Phi$, следовательно, Φ является нормальной подгруппой группы G_R. Теперь покажем вторую часть теоремы. Пусть $a, b, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in Q$ любые элементы и пусть $\delta = \pm 1$. Тогда существуют такие $c_2, \ldots, c_n \in Q$ что

$$R_{a_1}^{\delta} R_{b_1}^{-\delta} R_{b_2}^{\delta} = R_{c_2}^{\delta}, \ldots, R_{a_n}^{\delta} R_{c_n}^{-\delta} R_b^{\delta} = R_c^{\delta},$$

откуда

$$R_{a_n}^{\delta} R_a^{-\delta} \ldots R_{a_1}^{\delta} R_{b_1}^{-\delta} \ldots R_{b_n}^{-\delta} R_a^{\delta} R_b =$$

$$= R_{a_n}^{\delta} R_{c_n}^{-\delta} R_a^{\delta} R_b^{-\delta} = (R_{a_n}^{\delta} R_{c_n}^{-\delta}) R_a^{\delta} R_b^{-\delta} = R_c^{\delta} R_d^{-\delta}.$$

Следовательно пересечение смежных классов $R_a^{\delta} \ldots R_{a_n}^{\delta}\Phi$, $R_{b_1}^{\delta} \ldots R_b^{\delta}\Phi$ не пусто. Таким образом, эти смежные классы совпадают. Очевидно, все смежные классы группы G_R по подгруппе Φ следующие:

$$\ldots, R_a^{-n}\Phi, \ldots, R_a^{-1}\Phi, \Phi, R_a\Phi, \ldots, R_a^n\Phi, \ldots$$

где a любой фиксированный элемент из Q. Легко убедиться, что отображение ζ:

$$G_R/\Phi \to \langle R_a \rangle, \; R_a^n\Phi \to R_a^n$$

является изоморфизмом групп G_R/Φ, $\langle R_a \rangle$.

Лемма 4. *Пусть*

$$M^* = \{L_x L_y^{-1} : x, y \in Q\}, \quad N^* = \{L_z^{-1} L_t : z, t \in Q\}.$$

тогда $\Phi^* = M^* = N^*$.

Доказательство. Из равенства (1) очевидно вытекает $M^* \subset \Phi^*$. Обратно, пусть φ^* — подстановка сопряженная подстановке $R_a R_b^{-1}$, т. е. $R_a R_b^{-1} x \cdot y = x \cdot \varphi^* y$. Пусть $R_b^{-1} x = t$, $L_b z = y$, тогда

$$R_a t \cdot L_b z = R_b t \cdot \varphi^* L_b z, \; ta \cdot bz = tb \cdot \varphi^* L_b z,$$

откуда ввиду медиальности имеем

$$tb \cdot az = tb \cdot \varphi^* bz,$$

и после сокращения $az = \varphi^* bz$, т. е.

$$L_a z = \varphi^* L_b z, \; L_a L_b^{-1} = \varphi^* L_b L_b^{-1} y, \; L_a L_b^{-1} y = \varphi^* y,$$

следовательно, $\varphi^* = L_a L_b^{-1}$ и $\varphi^* \in M^*$. Таким образом, $M^* = \Phi^*$. Доказательство соотношения $M^* = N^*$ аналогично доказательству соотношения $M = N$ из леммы 1.

Напомним, что также верны утверждения, которые получим из предыдущих лемм и теоремы 1, если заменим правые трансляции левыми трансляциями, правый элемент левым единичным элементом, группу Φ группой Φ^* и наоборот. Итак, очевидно, верна следующая теорема:

Теорема 2. *Если в медиальной квазигруппе* $Q(.)$, *которая не обладает правой (левой) единицей, верно равенство* $R_a^n = 1$ $(L_a^n = 1)$ *для некоторого* $a \in Q$, *тогда равенство* $R_x^n = 1$ $(L_x^n = 1)$ *верно для каждого* $x \in Q$.

Следствие. *Если в любой транзитивной дистрибутивной квазигруппе верно равенство* $R_a^n = 1$ *для некоторого* a, *тогда верно равенство* $R_x^n = 1$ *для каждого* x.

Лемма 5. $\Phi = \Phi^*$.

Доказательство. В силу теоремы Тойода ([1], стр. 33) изотоп

$$(+) = (.)^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, 1)}$$

т. е.

$$x + y = R_a^{-1}x \,.\, L_b^{-1}y, \tag{5}$$

квазигруппы $Q(.)$ является абелевой группой (с единицей ba) которая обладает коммутирующими автоморфизмами φ, ψ так, что операция $(.)$ имеет вид

$$x \,.\, y = \varphi x + \psi y + k, \tag{6}$$

где k — определенный элемент множества Q. Пусть по определению

$$L_c^* x = c + x, \quad R_c^* x = x + c,$$

для некоторого $c \in Q$. Тогда ввиду (5)

$$L_c^* x = c + x = R_a^{-1}c \,.\, L_b^{-1}x = L_{R_a^{-1}c} L_b^{-1} x,$$

$$R_c^* x = x + c = R_a^{-1}x \,.\, L_b^{-1}c = R_{L_b^{-1}c} R_a^{-1} x,$$

откуда

$$L_c^* = L_{R_a^{-1}c} L_b^{-1}, \quad R_c^* = R_{L_b^{-1}c} R_a^{-1}.$$

Очевидно, что

$$\{L_c^* : c \in Q\} = \{L_{R_a c}\, L_b^{-1} : c \in Q\} = \Phi^*,$$

$$\{R_c^* : c \in Q\} = \{R_{L_b^{-1}c}\, R_a^{-1} : c \in Q\} = \Phi.$$

Учитывая, что группа $Q(+)$ — абелева, имеем $L_c^* = R_c^*$ для каждого $c \in Q$, следовательно, $\Phi = \Phi^*$.

Следствие. *Группы $Q(+)$, Φ изоморфны. Отображение $Q \to \Phi$, $x \to L_x^*$ является их изоморфизмом.*

Лемма 6. *Пусть e — единица группы $Q(+)$, определенной тождеством* (5), *и пусть c, d — правая и соответственно левая локальные единицы элемента e в квазигруппе $Q(.)$. Тогда равенство* (6) *можно переписать в следующем виде:*

$$x \,.\, y = R_c x + L_d y + (e \,.\, e). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть отображение $I : Q \to Q$ такое, что $x = Ix + e$. Очевидно, что I-автоморфизм группы $Q(+)$. Из (6) имеем

$$x \,.\, \psi^{-1}I(e \,.\, e) = \varphi x + \psi[\psi^{-1}I(e \,.\, e)] + (e \,.\, e)$$

$$= \varphi x + I(e \,.\, e) + (e \,.\, e) = \varphi x,$$

следовательно, $R\psi^{-1}I(e \,.\, e) = \varphi$. Аналогично находим равенство $L\varphi^{-1}I \,.\, (e \,.\, e) = \psi$. Пусть $\psi^{-1}I(e \,.\, e) = c$, т. е. $I(e \,.\, e) = \psi c$. Тогда $e \,.\, c = \varphi e + \psi c + (e \,.\, e) = \psi c + (e \,.\, e) = I(e \,.\, e) + (e \,.\, e) = e$, следовательно, c правая единица элемента e в квазигруппе $Q(.)$. Аналогично показывается, что $\varphi^{-1}I(e \,.\, e) = d$ — левая единица элемента e в квазигруппе $Q(.)$. Лемма доказана.

Из леммы 6 следуют интересные свойства медиальных квазигрупп, которые сформулируем в следующих теоремах.

Учитывая, что $\varphi\psi = \psi\varphi$, имеем $R_c L_d = L_d R_c$, следовательно, в $Q(.)$ существуют по крайней мере два элемента c, d так, что для любого $x \in Q$ выполняется ассоциативный закон $dx \,.\, c = d \,.\, xc$.

Если $p \in Q$ — эластичный элемент (т. е. для любого $x \in Q$ верно равенство $px \,.\, p = p \,.\, xp$) тогда правая и левая локальные единицы элемента p совпадают. Действительно, пусть e_p — правая локальная единица элемента p. Тогда $p \,.\, p = pe_p \,.\, p = p \,.\, e_p p$, следовательно, $p = e_p p$, итак, e_p — левая единица элемента p. Верно и обратное утверждение. Пусть e — правая и левая локальная единица элемента p. Тогда e, p — эластичные элементы. Действительно, в силу леммы 6 имеем

$$x \,.\, y = R_e x + L_e y + (e \,.\, e),$$

следовательно, $R_e L_e = L_e R_e$ откуда $ex \,.\, e = e \,.\, xe$, т. е. e — эластичный элемент. Очевидно, что из $pe = ep = p$ следует $pa \,.\, p = pa \,.\, ep = pe \,.\, ap = p \,.\, ap$ для любого $a \in Q$, итак, p — эластичный элемент. Таким образом мы пришли к следующей теореме:

Теорема 3. *В медиальной квазигруппе выполняется эластичный закон, т. е. верно тождество $xy \cdot x = x \cdot yx$ тогда и только тогда, когда правая и левая локальные единицы любого элемента из Q совпадают.*

Теорема 4. *Если медиальная квазигруппа $Q(.)$ эластична т. е. в $Q(.)$ выполняется эластичный закон, тогда любой ее централизатор является нормальной коммутативной подквазигруппой этой квазигруппы.*

Доказательство. Напомним, что совокупность всех элементов квазигруппы, коммутирующих с данным элементом h, называется централизатором элемента h и обозначается через Z_h. Приступим теперь к доказательству теоремы, предполагая, что θ — бинарное отношение на множестве Q, определенное следующим образом

$$a\theta b \Leftrightarrow ab = ba.$$

В силу (6) $a\theta b$, если $\varphi(b - a) = \psi(b - a)$ и обратно. Пусть $a\theta b$, $b\theta c$, тогда

$$\varphi(c - a) = \varphi(c - b + b - a) = \varphi(c - b) +$$

$$+ \varphi(b - a) = \psi(c - b) + \psi(b - a) = \psi(c - b + b - a) =$$

$$= \psi(c - a),$$

следовательно, $a\theta c$. Таким образом, θ является эквивалентностью. Пусть $a\theta b$, тогда ввиду медиальности $Q(.)$, из равенства $cc \cdot ab = cc \cdot ba$, следует $ca \cdot cb = cb \cdot ca$, следовательно, $ca\theta cb$. Очевидно, верно и обратное утверждение. Аналогично доказывается, что из $a\theta b$ следует $ac\theta bc$ и обратно. Таким образом, отношение θ является нормальной конгруэнцией. Пусть K_h — класс конгруэнции элемента h. В силу леммы 4,1 из [1], стр. 57, K_h — подквазигруппа квазигруппы $Q(.)$ и, используя следствие 1 леммы 4,1 [1], класс K_h — нормальная подквазигруппа квазигруппы $Q(.)$.

Следствие. *Любая идемпотентная медиальная квазигруппа (т. е. любая транзитивная дистрибутивная квазигруппа — см. теорему 8.3 [1], стр. 139) является фактор - квазигруппой некоторой эластичной медиальной квазигруппы по ее нормальной коммутативной подквазигруппе.*

Доказательство. Очевидно, что фактор-квазигруппа $Q(.) Z_k$, где Z_l — некоторый централизатор квазигруппы $Q(.)$, является идемпотентной квазигруппой. Обратно, пусть в идемпотентной медиальной квазигруппе $a\theta b$, если $a = b$. Очевидно, θ нормальная конгруэнция и ее класс K_h $\{h\}$ нормальная коммутативная подквазигруппа. Следовательно, $Q(.)/K_h \cong Q(.)$.

Теорема 5. *Φ — нормальная подгруппа группы $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Пусть $\zeta_n \dots \zeta_2\zeta_1\Phi$ — любой левый смежный класс группы $\mathcal{G}$ по подгруппе Φ, где $\zeta_i \in R \cup L$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Учитывая, что смежный класс может быть представлен любым своим элементом, можем предполагать, что $\zeta_i \in \{R_c, L_d\}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, что из $R_cL_d = L_dR_c$ и теорем 1,2 следует

$$\zeta_n \dots \zeta_1\Phi = \Phi\zeta_n \dots \zeta_1.$$

Таким образом, Φ — нормальная подгруппа группы $\mathcal{G}$.

Из предыдущих утверждений непосредственно вытекает следующая

Теорема 6. *Если медиальная квазигруппа*

а) *обладает правой и не обладает левой единицей, тогда $\mathcal{G}/\Phi \cong L_a$ для любого $a \in Q$,*

б) *обладает левой и не обладает правой единицей, тогда $\mathcal{G}/\Phi \cong R_a$ для любого $a \in Q$.*

в) *обладает левой и правой единицей, тогда $\mathcal{G} = \Phi$ и $Q(.)$ — абелева группа,*

г) *не обладает левой ни правой единицей, тогда $\mathcal{G}/\Phi \simeq L_a, R_a$ для любого $a \in Q$.*

Пример 1. Пусть $Q(.)$ медиальная квазигруппа определенная следующей таблицей Кэли:

.	0	1	2	3	4
0	0	2	4	1	3
1	4	1	3	0	2
2	3	0	2	4	1
3	2	4	1	3	0
4	1	3	0	2	4

В этой квазигруппе $L_i^4 = 1$, $R_i^2 = 1$ для каждого $i = 0, 1, 2, 3, 4$, следовательно, $G_R/\Phi \cong Z_2(+)$, $G_L/\Phi \cong Z_4(+)$. Итак,

$$G_R = R_0\Phi \cup \Phi,\ G_L = \Phi \cup L_0\Phi \cup L_0^2\Phi \cup L_0^3\Phi.$$

Очевидно, что $\Phi \cong Z_5(+)$, следовательно, G_R, G_L имеет ранг 10, соответственно 20. Так как $Z_5(.)$ не имеет правой ни левой единицы, $G/\Phi \simeq \cong Z_4 \cong V_2(+) \times Z_2(+)$.

Пример 2. Пусть $Q(.)$ — медиальная квазигруппа, определенная следующей таблицей Кэли:

.	0	1	2	3	4
0	0	2	4	1	3
1	1	3	0	2	4
2	2	4	1	3	0
3	3	0	2	4	1
4	4	1	3	0	2

Видим, что 0 правая единица этой квазигруппы и что левой единицы эта квазигруппа не имеет. Следовательно, $G_R = \Phi \cong Z_5(+)$. Так как L_0^4 1, $G_L\,\Phi \cong Z_4(+) \cong \mathscr{G}/\Phi, \mathscr{G} = L_0\Phi \cup L_0^2\Phi \cup L_0^3\Phi$.

Пример 3. Пусть $Z_{15}(.)$ — эластичная медиальная квазигруппа определенная следующей таблицей Кэли:

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e
0	5	7	9	6	8	0	2	4	1	3	a	c	f	b	d
1	9	6	8	5	7	4	1	3	0	2	e	b	d	a	c
2	8	5	7	9	6	3	0	2	4	1	d	a	c	e	b
3	7	9	6	8	5	2	4	1	3	0	c	e	b	d	a
4	6	8	5	7	9	1	3	0	2	4	b	d	a	c	e
5	0	2	4	1	3	a	c	e	b	d	5	7	9	6	8
6	4	1	3	0	2	e	b	d	a	c	9	6	8	5	7
7	3	0	2	4	1	d	a	c	e	b	8	5	7	9	6
8	2	4	1	3	0	c	e	b	d	a	7	9	6	8	9
9	1	3	0	2	4	b	d	a	c	e	6	8	5	7	5
a	a	c	e	b	d	5	7	9	6	8	0	2	4	1	3
b	e	b	d	a	c	9	6	8	5	7	4	1	3	0	2
c	d	a	c	e	b	8	5	7	9	6	3	0	2	4	1
d	c	e	b	d	a	7	9	6	8	5	2	4	1	3	0
e	b	d	a	c	e	6	8	5	7	9	1	3	0	2	4

Пусть Z_0 централизатор элемента 0. Очевидно, что все централизаторы квазигруппы $Q(.)$ следующие:

$$Z_0 = \{0, 5, a\},\ Z_1 = \{6, 1, b\},\ Z_2 = \{2, 7, c\},$$

$$Z_3 = \{3, 8, d\},\ Z_4 = \{4, 9, e\}.$$

Фактор квазигруппа $Z_{15}/Z_0(.)$ задана следующей таблицей

$\cdot$	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_0	Z_0	Z_2	Z_4	Z_1	Z_3
Z_1	Z_4	Z_1	Z_3	Z_0	Z_2
Z_2	Z_3	Z_0	Z_2	Z_4	Z_1
Z_3	Z_2	Z_4	Z_1	Z_3	Z_0
Z_4	Z_1	Z_3	Z_0	Z_2	Z_4

является идемпотентной медиальной квазигруппой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] БЕЛОУСОВ, В. Д.: Основы теории квазигрупп и луп. Москва 1967.

Поступило 11. 11. 1972

Katedra matematiky
Pedagogickej fakulty Univerzity P. J. Šafárika
Leninovo námestie 6
080 01 Prešov