Pavel Bartoš; Štefan Znám

O symetrických a cyklických priemeroch kladných čísel

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 3, 291--298

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126615`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 3, 1966

O SYMETRICKÝCH A CYKLICKÝCH PRIEMEROCH KLADNÝCH ČÍSEL

PAVEL BARTOŠ, ŠTEFAN ZNÁM, Bratislava

I

V našom článku zavedieme tri nové druhy priemerov kladných čísel a pohovoríme o ich vzťahu k aritmetickému a geometrickému priemeru.

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ sú kladné reálne čísla; nech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, kde α_i sú nezáporné čísla, z ktorých aspoň dve sú nenulové a splňujú vzťah

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{1}$$

V ďalšom budeme vždy predpokladať, že α splňuje vzťah (1).

V matematickej literatúre sa používajú nasledujúce druhy priemerov kladných čísel:

$G = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$ — geometrický priemer,

$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ — aritmetický priemer,

$G\alpha = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$ — geometrický priemer s váhou α,

$A\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ — aritmetický priemer s váhou α.

Zrejme G je špeciálnym prípadom G_α a A je špeciálnym prípadom A_α pri
$\alpha = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

V našich úvahách budeme často používať nasledujúcu lemu (pozri [1], strana 17, veta 9.):

Lema. *Pre ľubovoľné α je*

$$G_\alpha \leqq A_\alpha .$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa navzájom rovnajú a_i pre všetky tie i, pre ktoré $\alpha_i \neq 0$.

Lemu vyslovíme aj v inej forme (v ktorej ju budeme najviac používať):

Nech b_i sú kladné a β_i nezáporné čísla, pričom $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ splňuje vzťah (1); *potom*

$$b_1^{\beta_1} . b_2^{\beta_2} \ldots b_m^{\beta_m} \leqq \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m . \tag{2}$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa navzájom rovnajú b_i pre všetky tie i, pre ktoré $\beta_i \neq 0$.

V knihe [1], na strane 44 je zavedený iný druh priemeru kladných čísel:

$$A_{1\alpha} = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \ldots a_{i_n}^{\alpha_n} ,$$

kde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ prebieha všetky permutácie čísel $1, 2, \ldots, n$. $A_{1\alpha}$ sa nazýva symetrický aritmetický priemer s váhou α. V [1] na strane 45 je ukázané, že $A_{1\alpha}$ je zovšeobecnením priemerov A a G.

Teraz si zavedieme nový druh priemeru kladných čísel:

$$G_{1\alpha} = \prod_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (\alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \ldots + \alpha_n a_{i_n})^{\frac{1}{n!}},$$

kde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ prebieha všetky permutácie čísel $1, 2, \ldots, n$. $G_{1\alpha}$ budeme nazývať symetrickým geometrickým priemerom s váhou α.

Zavedenie tohto nového pojmu má toto odôvodnenie:

a) $G_{1\alpha}$ má vlastnosti duálne vlastnostiam $A_{1\alpha}$.

b) $G_{1\alpha}$ je v podstate zovšeobecnením G a A. Skutočne, ak položíme $\alpha = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, potom $G_{1\alpha} = A$, ak zase položíme $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$, potom $G_{1\alpha} = G$.

Nasledujúca veta porovnáva $G_{1\alpha}$ a $A_{1\alpha}$ s aritmetickým a geometrickým priemerom.

Veta I. *Ak $A, A_{1\alpha}, G, G_{1\alpha}$ majú predošlý význam, potom pre ľubovoľné α, pre ktoré aspoň dve z čísel α_i sú rôzne od nuly, platí*

$$G \leqq G_{1\alpha} \leqq A , \quad G \leqq A_{1\alpha} \leqq A . \tag{3}$$

Pri $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nastane vo vzťahoch (3) všade rovnosť. Rovnosť ďalej nastane medzi $G_{1\alpha}$ a A a medzi G a $A_{1\alpha}$ vtedy, keď $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Ináč platí všade ostrá nerovnosť.

Poznámka I. Vzťah $G \leqq A_{1\alpha} \leqq A$ je známy; uvádzame ho len preto, aby sme mohli poukázať na duálnosť.

Dôkaz vety I. a) Najskôr dokážeme vzťahy (3′)

$G \leqq G_{1\alpha},\ A_{1\alpha} \leqq A$.

Na základe lemy platí

$$a_{i_1}^{\alpha_1} \cdot a_{i_2}^{\alpha_2} \ldots a_{i_n}^{\alpha_n} \leqq \alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \ldots + \alpha_n a_{i_n} \tag{4}$$

pre ľubovoľnú permutáciu $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, pričom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď sa rovnajú všetky tie a_i, pre ktoré $\alpha_i \neq 0$. Znásobením respektíve sčítaním týchto nerovností pre všetky permutácie čísel $1, 2, \ldots, n$, dostaneme:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{(n-1)!\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \leqq (G_{1\alpha})^{n!} \quad \text{resp.} \quad n!\, A_{1\alpha} \leqq (n-1)! \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Z tohto už ľahko dostaneme nerovnosti (3′) odmocnením, resp. delením výrazom $n!$. Rovnosť tu nastane zrejme len vtedy, keď v (4) nastane rovnosť pre všetky permutácie $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Pretože existujú aspoň dve nenulové α_i, rovnosť v (4) nastane len vtedy, keď sa všetky a_i navzájom rovnajú (pozri lemu).

b) Teraz dokážeme vzťahy (5) $G_{1\alpha} \leqq A$, $G \leqq A_{1\alpha}$. Položme v leme $m = n!$, $b_j = \alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \ldots + \alpha_n a_{j_n}$, resp. $b_j = a_{j_1}^{\alpha_1} \cdot a_{j_2}^{\alpha_2} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n}$, [kde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ prebieha všetky permutácie čísel $1, 2, \ldots, n$], $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n!} = \dfrac{1}{n!}$.

Potom dostaneme:

$$\prod_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \ldots + \alpha_n a_{j_n})^{\frac{1}{n!}} \leqq \frac{1}{n!} \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \ldots + \alpha_n a_{j_n}), \tag{6}$$

resp.

$$\prod_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (a_{j_1}^{\alpha_1} \cdot a_{j_2}^{\alpha_2} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n})^{\frac{1}{n!}} \leqq \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{j_1}^{\alpha_1} \cdot a_{j_2}^{\alpha_2} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n} .$$

Ľahko sa presvedčíme o platnosti týchto rovností:

$$\sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \ldots + \alpha_n a_{j_n}) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{7}$$

$$\prod_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{j_1}^{\alpha_1} \cdot a_{j_2}^{\alpha_2} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{(n-1)!\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{(n-1)!} .$$

Z týchto rovností a z nerovnosti (6) dostaneme:

$$G_{1\alpha} \leqq \frac{1}{n!}(n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad \text{resp.} \quad G = (\Pi a_i^{(n-1)!})^{\frac{1}{n!}} \leqq A_{1\alpha},$$

a tým je dôkaz nerovností (5) ukončený.

Ešte musíme ukázať, kedy nastane rovnosť. Všetky b_j sú rôzne od nuly, a preto na základe lemy a na základe analogických úvah ako v prvej časti dôkazu, rovnosť nastane práve vtedy, keď pre všetky permutácie $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ platí:

$$\alpha_1 a_{j_1} + \alpha_2 a_{j_2} + \ldots + \alpha_n a_{j_n} = konšt., \tag{8}$$

resp.

$$a_{j_1}^{\alpha_1} \,.\, a_{j_2}^{\alpha_2} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n} = konšt.$$

Dokážme teraz, že rovnosť nastane práve vtedy, keď buď všetky a_i sa navzájom rovnajú, alebo všetky α_i sa navzájom rovnajú. Budeme dokazovať nepriamo:

Predpokladajme, že existujú také indexy p, r, s, t, že platí $a_p \neq a_r$ a $\alpha_s \neq \alpha_t$. Zoberme takú permutáciu $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, aby sa na ľavej strane výrazu (8) vyskytovali členy $\alpha_s a_p$ (resp. $a_p^{\alpha_s}$) a $\alpha_t a_r$ (resp. $a_r^{\alpha_t}$). Taká permutácia zrejme existuje. Vymeňme v tejto permutácii medzi sebou čísla p a r (pričom zvyšné čísla ostanú nezmenené). Na základe (8) týmto dvom permutáciám zodpovedajúce výrazy sa navzájom rovnajú, a preto platí:

$$\alpha_s a_p + \alpha_t a_r = \alpha_s a_r + \alpha_t a_p, \quad \text{resp.} \quad a_p^{\alpha_s} \,.\, a_r^{\alpha_t} = a_r^{\alpha_s} \,.\, a_p^{\alpha_t}.$$

Po úprave dostaneme:

$$(\alpha_s - \alpha_t)(a_p - a_r) = 0, \quad \text{resp.} \quad a_p^{\alpha_s - \alpha_t} = a_r^{\alpha_s - \alpha_t}.$$

To je ale spor s tým, že $\alpha_s \neq \alpha_t$ a $a_p \neq a_r$. Tým je dôkaz vety 1 ukončený.

II

V tejto časti práce zavedieme dva nové druhy priemerov, ktorých vlastnosti sú analogické vlastnostiam $G_{1\alpha}$ a $A_{1\alpha}$. Označme

$$G_{2\alpha} = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_1 a_j + \alpha_2 a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_{j+n-1})^{\frac{1}{n}},$$

$$A_{2\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^{\alpha_1} \,.\, a_{j+1}^{\alpha_2} \ldots a_{j+n-1}^{\alpha_n},$$

pričom pre $k > n$ je $a_k = a_{k-n}$; ostatné označenia používame v tom istom zmysle ako v časti I.

$G_{2\alpha}$ nazývame cyklickým geometrickým priemerom s váhou α; $A_{2\alpha}$ nazývame cyklickým aritmetickým priemerom s váhou α. Analógia $G_{2\alpha}$ s $G_{1\alpha}$ a $A_{2\alpha}$ s $A_{1\alpha}$ je zrejmá. Okrem toho $G_{2\alpha}$ a $A_{2\alpha}$ predstavujú v podstate zovšeobecnenie geometrického a aritmetického priemeru. Skutočne, ak položíme $\bar{\alpha} = (1, 0, \ldots, 0)$, resp. $\bar{\bar{\alpha}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, potom dostaneme: $G_{2\bar{\alpha}} = G$, $G_{2\bar{\bar{\alpha}}} = A$, $A_{2\bar{\alpha}} = A$, $A_{2\bar{\bar{\alpha}}} = G$.

Veta II. *Pre ľubovoľné α, pre ktoré aspoň dve α_i sú rôzne od nuly, platí:*

$$G \leqq A_{2\alpha} \leqq A, \quad G \leqq G_{2\alpha} \leqq A.$$

V prípade $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ platí všade znamienko rovnosti. Medzi $A_{2\alpha}$ a A a medzi G a $G_{2\alpha}$ platí rovnosť len v tomto prípade.

Dôkaz. a) Dokážeme najskôr nerovnosti $G \leqq G_{2\alpha}$ a $A_{2\alpha} \leqq A$. Na základe lemy pre ľubovoľné $i = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$a_i^{\alpha_1} \cdot a_{i+1}^{\alpha_2} \ldots a_{i+n-1}^{\alpha_n} \leqq \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_{i+1} + \ldots + \alpha_n a_{i+n-1}.$$

Keď znásobíme, resp. sčítame všetky takéto nerovnosti pre $i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \leqq G_{2\alpha}^n, \quad \text{resp.} \quad nA_{2\alpha} \leqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Z tohto dostaneme dokazované nerovnosti odmocnením, resp. delením číslom n. Na základe podobných úvah ako vo vete I a na základe lemy usúdime, že rovnosť nastane práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

b) Teraz dokážeme nerovnosti (9) $G_{2\alpha} \leqq A$, $G \leqq A_{2\alpha}$.

V leme položme $m = n$, (10) $b_i = \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_{i+1} + \ldots + \alpha_n a_{i+n-1}$,

resp. $b_i = a_i^{\alpha_1} \cdot a_{i+1}^{\alpha_2} \ldots a_{i+n-1}^{\alpha_n}$,

$$\beta_i = \frac{1}{n} \quad \text{pre všetky} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dostaneme:

$$G_{2\alpha} \leqq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad \text{resp.} \quad G = \prod_{i=1}^{n} (a_i^{\alpha_1} \cdot a_{i+1}^{\alpha_2} \ldots a_{i+n-1}^{\alpha_n})^{\frac{1}{n}} \leqq A_{2\alpha}.$$

Zrejme pri $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nastáva rovnosť. Tým je veta dokázaná.

Poznámka II. Z vety II vyplýva, že podmienka $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ je postačujúca k tomu, aby vo vzťahu (9) nastala rovnosť. Nasledujúci príklad ukazuje, že táto podmienka nie je nutná.

Položme
$$\alpha = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right),$$
$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 2, \quad \text{resp.} \quad a_1' = 1, a_2' = 2, a_3' = 2, a_4' = 1.$$
V prvom prípade platí:
$$G_{2\alpha} = \frac{\sqrt[4]{12^4}}{6} = 2 = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 2) = A.$$
V druhom prípade:
$$A_{2\alpha} = \frac{1}{4} \, 4 \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} = G.$$

Nepodarilo sa nám určiť všeobecnú nutnú podmienku toho, aby nastala rovnosť. Nasledujúca veta rieši len špeciálny prípad problému; uvádzame ju z toho dôvodu, že ju budeme v tretej časti práce používať.

Veta III. *Keď $\{a_i\}$ je rýdzo monotónna postupnosť, potom vo vzťahoch* (9) *platí znamienko rovnosti vtedy a len vtedy, keď*

(11) $$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n \left(= \frac{1}{n}\right).$$

Dôkaz. Ľahko sa presvedčíme o tom, že (11) je postačujúca podmienka k platnosti $G_{2\alpha} = A$ a $G = A_{2\alpha}$.

Z dôkazu vety II (pozri časť b) a z lemy vyplýva: ak vo vzťahoch (9) nastane rovnosť, potom pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ musí platiť:

(12) $$\alpha_i a_1 + \alpha_{i+1} a_2 + \ldots + \alpha_{i+n-1} a_n = \alpha_{i+1} a_1 + \alpha_{i+2} a_2 + \ldots + \alpha_{i+n} a_n.$$

resp.
$$a_1^{\alpha_i} a_2^{\alpha_{i+1}} \ldots a_n^{\alpha_{i+n-1}} = a_1^{\alpha_{i+1}} a_2^{\alpha_{i+2}} \ldots a_n^{\alpha_{i+n}},$$

kde $\alpha_k = \alpha_{k-n}$, pre $k > n$. Výrazy vo vzťahu (12) dostaneme z výrazov (10) cyklickou zámenou poradia sčítancov resp. činiteľov. Po úprave dostaneme z (12) rovnosť:

(13) $$(a_1 - a_2)(\alpha_i - \alpha_{i+1}) + (a_2 - a_3)(\alpha_i - \alpha_{i+2}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)(\alpha_i - \alpha_{i-n+1}) = 0,$$

resp.
$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(\alpha_i - \alpha_{i+1})} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(\alpha_i - \alpha_{i+2})} \ldots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{(\alpha_i - \alpha_{i+n-1})} = 1.$$

Nech $\alpha_i = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k$; potom $\alpha_i - \alpha_k \geqq 0$ pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Postupnosť $\{a_i\}$ je rýdzo monotónna, preto výrazy $(a_k - a_{k+1})$ sú buď všetky kladné, buď všetky záporné $\left(\text{výrazy } \dfrac{a_k}{a_{k+1}} \text{ sú buď všetky menšie ako jedna, buď všetky väčšie ako jedna}\right)$. Teda rovnosti (13) môžu byť splnené len vtedy, keď $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Tým je dôkaz vety ukončený.

III

V tejto časti ukážeme niekoľko aplikácií vzťahov uvedených v časti II.

Veta IV. *Pre každé prirodzené číslo $n > 2$ platí:*

$$\frac{2^{2n}}{n+1} < \binom{2n}{n} < \frac{(2n+2)^n}{(n+1)!}. \tag{14}$$

Dôkaz. Položme $a_i = i$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$; $\alpha_j = 0$ pre $j = 3, 4, \ldots, n$. Na základe nerovnosti $G \leqq G_{2\alpha} \leqq A$ (veta II) a na základe vety III dostaneme:

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\frac{1+2}{2} \cdot \frac{2+3}{2} \cdots \frac{n+n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} < \frac{n(n+1)}{2n}.$$

Po úprave máme:

$$2^n < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \cdot (n+1)}{n!} < \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Keď stredný výraz upravíme a celú nerovnosť vydelíme výrazom $n+1$, dostaneme:

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-1) \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n \cdot n!} < \frac{(n+1)^{n-1}}{n!},$$

čiže

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{(2n!)}{(n!)^2 \cdot 2^n} < \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}.$$

Keď celú nerovnosť vynásobíme 2^n, dostaneme (14).

Veta V. *Nech prirodzené číslo $n \geqq 2$; nech a je kladné reálne číslo. Potom*

$$\left(\frac{n+a}{a}\right)^n < \binom{\frac{n(n+1)}{2a} + n}{n} < \frac{1}{n!}\left(\frac{(n+1)(n+a)}{2a}\right)^n. \tag{15}$$

Dôkaz. Položme $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \frac{1}{n+a}$, $\alpha_n = \frac{a+1}{n+a}$, $a_i = i$. Na základe nerovnosti $G \leqq G_{2\alpha} \leqq A$ (veta II) a na základe vety III máme:

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\frac{1+2+\ldots+n+an}{n+a} \cdot \frac{2+3+\ldots+n+1+a}{n+a} \cdots \frac{n+1+2+\ldots+(n-1)+(n-1)a}{n+a}} <$$

$$< \frac{n(n+1)}{2n}.$$

Po umocnení a vynásobení výrazom $(n+a)^n$ dostaneme:

$$(n+a)^n \cdot n! < \left[\binom{n+1}{2} + an\right] \cdot \left[\binom{n+1}{2} + a\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\binom{n+1}{2} + 2a\right] \ldots \left[\binom{n+1}{2} + (n-1)a\right] < \left(\frac{(n+1)(n+a)}{2}\right)^n.$$

Keď celú nerovnosť vydelíme $a^n \cdot n!$, dostaneme (15).

Dôsledok. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geqq 2$ a pre ľubovoľné kladné reálne číslo b platí:*

$$\left(\frac{n+1+2b}{n+1}\right)^n < \binom{n+b}{n} < \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1+2b}{2}\right)^n. \tag{16}$$

Dôkaz. Ak položíme $a = \frac{n(n+1)}{2b}$ a dosadíme do (15), dostaneme nerovnosť (16).

LITERATÚRA

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.

Došlo 4. 9. 1965.

Katedra matematiky Chemickotechnologickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej, Bratislava

ON SYMMETRIC AND CYCLIC MEANS OF POSITIVE INTEGERS

Pavel Bartoš, Štefan Znám

Summary

Three new kinds of means ($G_1\alpha$, $A_2\alpha$, $G_2\alpha$) are introduced and the relation between them and the known kinds of means is shown.