MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 1-1963

ОБОБЩЕННЫЕ ИДЕАЛЫ В ПОЛУГРУППАХ

РЕНАТА ГРМОВА (Renáta Hrmová), Братислава

Поводом к написанию настоящей работы послужила работа [4] Ш. Шварца, в которой доказана теорема: Пусть S — вполне простая полугруппа, H — простая подполугруппа, содержащая все идемпотенты полугруппы S. Тогда каждые два множества HaH, HbH $(a, b \in S)$ либо не пересекаются либо совпадают, а полугруппу S можно представить как теоретико-множественное объединение непересекающихся классов в виде $S = H \cup HaH \cup HbH \cup \ldots$

При решении некоторых вопросов, вытекающих из этой работы, в частности вопроса о том, является ли для существования разложения указанного вида необходимым, чтобы простая подполугруппа содержала все идемпотенты из S, мне казалось удобным ввести понятие H-идеала, определение которого дается в разделе 1. Понятие H-идеала может оказаться полезным и при изучении полугрупп в общем случае.

Понятие H-идеала в явном виде до сих пор в литературе не появилось, за исключением опубликованной недавно работы [6] А. Д. Уоллеса (A. D. Wallace), в которой автор приводит (под другим названием) некоторые свойства H-идеалов для частного случая компактных полугрупп.

В разделе 1 настоящей работы дается определение основных понятий. В разделе 2 дано при весьма общих предположениях описание всех минимальных (левых, правых, двусторонних) H-идеалов данной полугруппы. Раздел 3 посвящен левым (правым, двусторонним) H-цоколям данной полугруппы. Это понятие аналогично одноименному понятию теории колец. В разделе 4 приведены некоторые применения результатов настоящей работы к группам и вполне простым полугруппам.

1.

Определение. *Пусть A, B — два непустых подмножества полугруппы S. Подмножество $A \subset S$ мы будем называть левым B-идеалом, если имеет место $BA \subset A$; правым B-идеалом, если имеет место $AB \subset A$; двусторонним B-идеалом, если одновременно имеет место $BA \subset A$, $AB \subset A$.*

Приведем несколько примеров B-идеалов.

Пример 1,1. Пусть B — произвольное подмножество полугруппы S. Тогда каждый идеал полугруппы S (S-идеал) является B-идеалом.

Пример 1,2. Пусть H — подполугруппа полугруппы S. Пусть B — произвольное подмножество в H. Тогда H — двусторонний B-идеал.

Пример 1,3. Пусть H — подполугруппа полугруппы S, a — произвольный элемент в S, B — произвольное подмножество полугруппы H. Тогда множество Ha является левым B-идеалом, множество aH — правым B-идеалом, множество HaH — двусторонним B-идеалом. Множество $Ha \cup a$ также является левым B-идеалом, а множество $aH \cup a$ — правым B-идеалом.

Пример 1,4. Если S содержит нуль, то последний является двусторонним B-идеалом для каждого подмножества B полугруппы S.

Пример 1,5. Каждое собственное подмножество группы с единицей E является ее собственным двусторонним E-идеалом.

Пример 1,6. Пусть S — группа, H — ее подгруппа. Тогда всякий класс Ha является левым H-идеалом и всякий класс HaH — двустороним H-идеалом группы S.

Очевидно, справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть B_1, B_2 — два произвольных подмножества полугруппы S, L_1 — левый B_1-идеал, L_2 — левый B_2-идеал, R_2 — правый B_2-идеал.*

а) *Если $B_1 \cap B_2 = B \neq 0$, то $L_1 \cup L_2$ является левым B-идеалом;*

б) *если $B_1 \cap B_2 = B \neq 0$, то либо $L_1 \cap L_2 = 0$, либо $L_1 \cap L_2$ является левым B-идеалом;*

в) *$L_1 L_2$ является левым B_1-идеалом;*

г) *$L_1 R_2$ является левым B_1-идеалом и в то же время правым B_2-идеалом;*

д) *если $B_1 \cap B_2 = B \neq 0$, то $L_1 R_2$ является двусторонним B-идеалом.*

Заметим, что абзацы а), б), в) в лемме 1 можно аналогичным образом формулировать для правых и двусторонних B-идеалов. Из утверждения в) леммы 1 следует, в частности, что произвольная степень правого (левого, двустороннего) B-идеала опять же является правым (левым, двусторонним) B-идеалом.

Из следующей теоремы вытекает, что можно ограничиться изучением таких B-идеалов, для которых B является подполугруппой полугруппы S.

Теорема 1. *Всякий левый (правый, двусторонний) B-идеал A полугруппы S является одновременно левым (правым, двусторонним) H-идеалом, где H — некоторая подполугруппа полугруппы S.*

Доказательство. Пусть A — левый B-идеал. Тогда имеет место $BA \subset A$, $B^2A \subset BA \subset A, \ldots, B^nA \subset A, \ldots$. Значит, $(B \cup B^2 \cup B^3 \cup \ldots) A \subset A$. Очевидно, множество $B \cup B^2 \cup B^3 \cup \ldots \cup B^n \cup \ldots$ является подполугруппой полугруппы S. Следовательно, A — левый H-идеал полугруппы S. Аналогично может быть доказано утверждение для правого и двустороннего B-идеала.

Договор. В дальнейшем символ H будет обозначать исключительно подполугруппу полугруппы S.

Примечание. Поскольку H-идеалы, лежащие в H, являются идеалами полугруппы в обычном смысле, то мы в дальнейшем, так как это не может привести к недоразумениям, будем говорить о них только как о идеалах подполугруппы H.

2. Минимальные Н-идеалы

В этом разделе мы введем некоторые понятия, аналогичные понятиям из теории идеалов и приведем некоторые соотношения, вытекающие из них. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству, приведенному в книге [1] или [2].

Определение. *Минимальным левым (правым, двусторонним) H-идеалом полугруппы S мы будем называть левый (правый, двусторонний) H-идеал полугруппы S, не содержащий в качестве собственного подмножества никакого левого (правого, двустороннего) H-идеала полугруппы S.*

Из определения следует, что если S содержит нуль, то последний является минимальным левым, правым и двусторонним H-идеалом для каждого $H \subset S$.

Известно, что подполугруппа H содержит по крайней мере один минимальный двусторонний H-идеал. Следующий пример показывает, что в случае $H \subsetneqq S$ полугруппа S может содержать несколько минимальных двусторонних H-идеалов.

Пример 2,1. Пусть S — мультипликативная полугруппа классов остатков по модулю 12, элементы которой мы обозначим с помощью чисел $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 11\}$. Выберем $H = \{1, 5, 7, 11\}$. Легко убедиться, что эта полугруппа имеет в точности шесть минимальных двусторонних H-идеалов, а именно: $N_1 = \{1, 5, 7, 11\}$, $N_2 = \{4, 8\}$, $N_3 = \{2, 10\}$, $N_4 = \{3, 9\}$, $N_5 = \{6\}$, $N_6 = \{0\}$.

Из приведенного примера видно также, что в полугруппе, содержащей нуль, нуль не обязательно является универсально-минимальным H-идеалом. Однако если подполугруппа H содержит нуль полугруппы S, то, очевидно, последний является единственным минимальным левым, правым и двусторонним H-идеалом полугруппы S. Дальнейшие рассуждения о минимальных H-идеалах дают нетривиальные результаты только для таких H-идеалов, для которых H не содержит нуля полугруппы S.

Следующая лемма является непосредственным следствием определения.

Лемма 2. Пересечение двух отличных друг от друга минимальных левых (правых, двусторонних) H-идеалов полугруппы S есть пустое множество.

Теорема 2. *Пусть S — полугруппа, H — ее подполугруппа, и пусть L — произвольный левый идеал из H. Тогда для всякого минимального левого H-идеала*

L_m *полугруппы* S *(если такой существует) справедливо* $L_m = La = Ha$, *где* a — *произвольный элемент из* L_m.

Доказательство. Пусть L_m — минимальный левый H-идеал полугруппы S. Так как $L \subset H$, то для $a \in L_m$ справедливо $La \subset LL_m \subset HL_m \subset L_m$. Множество La является левым H-идеалом, поэтому вследствие минимальности имеет место $L_m = La$. В частности, если взять $L = H$, то мы получим $L_m = Ha$.

Частным случаем теоремы 2 является следующая теорема, на которую мы будем часто ссылаться.

Теорема 2а. *Если подполугруппа* H *полугруппы* S *содержит минимальный левый идеал* L_0, *то всякий минимальный левый* H-*идеал полугруппы* S *имеет вид* L_0a, *где* a — *подходящим образом выбранный элемент из* S.

Предположение теоремы 2 о том, что минимальный левый H-идеал лежит в H, существенно. Если в качестве L взять минимальный левый H-идеал, не лежащий в H, то теорема, вообще говоря, неверна. Это иллюстрируется примером 2,1. Если в качестве H взять минимальный левый H-идеал $\{2, 10\}$, то минимальный левый H-идеал $\{1, 5, 7, 11\}$ нельзя писать в виде $La = \{2, 10\}\, a$, $a \in S$.

Однако, справедлива

Теорема 3. *Пусть* L_m — *произвольный минимальный левый* H-*идеал полугруппы* S. *Тогда и множество* L_ma *есть минимальный левый* H-*идеал для каждого* $a \in S$.

Доказательство. Пусть L_ma не является минимальным левым H-идеалом. Тогда существует левый H-идеал L'_m, для которого имеет место $L'_m \subsetneqq L_ma$. Пусть M — множество тех элементов $x \in L_m$, для которых $xa \in L'_m$. Множество M, очевидно, не пусто. Так как для каждого элемента $z \in H$ имеет место $zxa \in zL'_m \subset L'_m$, то и $zx \in M$. Следовательно, множество M является левым H-идеалом, лежащим в L_m. Поэтому $M = L_m$. Далее, $L'_m \subset Ma \subset L'_m$ влечет за собой $Ma = L'_m$ и, значит, $Ma = L_ma = L'_m$, что противоречит принятому допущению.

Следствием теоремы 3 является

Теорема 3а. *Если* L_m — *минимальный левый* H-*идеал полугруппы* S, *и если* a, b — *произвольные элементы из* S, *то либо* $L_ma \cap L_mb = \emptyset$ *либо* $L_ma = L_mb$.

Следующая теорема 4 является аналогом теоремы 2 для двусторонних минимальных H-идеалов:

Теорема 4. *Пусть* L (R, N) — *произвольный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы* $H \subset S$. *Тогда для каждого минимального двустороннего* H-*идеала* N_m *полугруппы* S *(если такой существует) справедливо:* $N_m = LaR = NaN = HaH$, *где* a — *произвольным образом выбранный элемент из* N_m.

Доказательство. Пусть N_m — минимальный двусторонний H-идеал полугруппы S. Тогда для каждого $a \in N_m$ множества LaR, NaN, HaH являются двусторонними H-идеалами, содержащимися в минимальном H-идеале N_m и, следовательно, совпадают с ним.

Теорема 4а. *Пусть подполугруппа H полугруппы S содержит хотя бы один минимальный левый идеал L_0 и хотя бы один минимальный правый идеал R_0. Тогда каждый минимальный двусторонний H-идеал полугруппы S имеет вид L_0aR_0 с удобно подобранным $a \in S$.*

Следующая теорема содержит обратное утверждение.

Теорема 5. *Пусть H — подполугруппа полугруппы S. Пусть H содержит хотя бы один минимальный левый идеал L_0 и хотя бы один минимальный правый идеал R_0. Тогда множество L_0aR_0 является для каждого $a \in S$ минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Пусть A — двусторонний H-идеал полугруппы S, для которого выполняется $A \subset L_0aR_0$. Выберем произвольный элемент $x \in A$. Элемент x может быть представлен в виде $x = l_0ar_0$, где l_0, r_0 — удобно выбранные элементы соответственно из L_0 и R_0. Так как A — двусторонний H-идеал, то $L_0x = L_0(l_0ar_0) \subset HA \subset A$. Так как L_0 — минимальный левый идеал полугруппы H, то из соотношения $L_0l_0 \subset L_0L_0 \subset L_0$ вытекает соотношение $L_0l_0 = L_0$. Следовательно, $(L_0l_0)\,ar_0 = L_0ar_0 \subset A$. Умножая справа на идеал R_0, мы получим $L_0ar_0R_0 \subset AR_0 \subset A$, и поскольку также $r_0R_0 = R_0$, то $L_0aR_0 \subset A$. Таким образом, имеет место $L_0aR_0 = A$, а это и означает, что L_0aR_0 является минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S.

Примечание. Из теоремы 4 следует, что всякий минимальный двусторонний H-идеал N_m полугруппы S может быть записан в виде $N_m = HaH$ с удобно подобранным $a \in S$. Обратное утверждение неверно. Не каждое множество вида HaH обязано быть минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S.

Из теоремы 4 вытекает также следующее утверждение: Если N_0 — минимальный двусторонний идеал полугруппы H, то всякий минимальный двусторонний H-идеал полугруппы S может быть записан в виде N_0aN_0. Гораздо интереснее то, что обратное утверждение неверно, т. е. неверно, что множество N_0aN_0 является для каждого $a \in S$ минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S. Тем более не имеет места утверждение, аналогичное теореме 3, т. е. множество N_maN_m, где N_m — произвольный минимальный двусторонний H-идеал в S, не для каждого $a \in S$ является минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S. Вследствие этого не имеет места также аналог теоремы 3а, т. е. для некоторых двух элементов $a, b \in S$ может произойти случай, что двусторонние H-идеалы N_maN_m, N_mbN_m не совпадают, а также не являются непересекающимися.

В справедливости приведенных утверждений убеждает нас следующий пример.

Пример 2,2. Пусть $S = \{z, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ — полугруппа с следующей таблицей умножений:

	z	a_1	a_2	a_3	a_4
z	z	z	z	z	z
a_1	z	z	a_1	z	a_3
a_2	z	z	a_2	z	a_4
a_3	z	a_1	a_1	a_3	a_3
a_4	z	a_2	a_2	a_4	a_4

Легко убедиться, что S — простая полугруппа с нулем. Выберем $H = \{a_2, a_4\}$. Поскольку H — простая полугруппа, то $H = N_0$. Для двустороннего H-идеала $N_0 a_3 N_0$ справедливо $N_0 a_3 N_0 = \{a_2, a_4\}\, a_3 \{a_2, a_4\} = \{z, a_4\}\, \{a_2, a_4\} = \{z\} \cup \{a_2, a_4\}$. Очевидно, оба множества $\{z\}$ и $\{a_2, a_4\}$ — минимальные двусторонние H-идеалы полугруппы S. Следовательно, множество $N_0 a_3 N_0$ не является минимальным двусторонним H-идеалом, а объединением двух непересекающихся минимальных двусторонних H-идеалов. Множества $N_0 a_3 N_0$ и $N_0 z N_0$ имеют непустое пересечение ($\{z\}$) но они не совпадают.

Теоремы 4 а 5 могут быть использованы для определения всех минимальных двусторонних H-идеалов полугруппы S. Поскольку H содержит два минимальных левых идеала $L_0' = \{a_2\}$, $L_0'' = \{a_4\}$ и единственный минимальный правый идеал H, то все минимальные двусторонние H-идеалы полугруппы S получим таким образом, что в выражениях $\{a_2\}\, \xi\, \{a_2, a_4\}$, $\{a_4\}\, \eta\, \{a_2, a_4\}$ будут ξ, η пробегать через все элементы полугруппы S. Путем вычислений устанавливаем, что существуют три минимальных левых H-идеала, а именно: $\{z\}$, $\{a_2\}$, $\{a_4\}$; три минимальных правых H-идеала, а именно: $\{z\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$; и как раз два минимальных двусторонних H-идеала $\{z\}$, $\{a_2, a_4\}$.

Следующая теорема дает нам некоторую информацию о строении H-идеала вида $N_0 a N_0$.

Теорема 6. *Пусть подполугруппа H полугруппы S содержит хотя бы один минимальный левый идеал L_0, хотя бы один минимальный правый идеал R_0 и, значит, и минимальный двусторонний идеал N_0. Тогда двусторонний H-идеал $N_0 a N_0$ является для каждого $a \in S$ объединением попарно непересекающихся минимальных двусторонних H-идеалов полугруппы S.*

Доказательство. Известно, что при указанных условиях имеет место $N_0 = \bigcup_{\alpha \in A_1} L_0^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta \in A_2} R_0^{(\beta)}$, где $L_0^{(\alpha)}$ и $R_0^{(\beta)}$ пробегают через все минимальные соответственно левые и правые идеалы полугруппы H. Значит

$$N_0 a N_0 = \bigcup_{\alpha} \bigcup_{\beta} L_0^{(\alpha)} a R_0^{(\beta)}.$$

Согласно теореме 5 каждое слагаемое является минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S. Два слагаемых либо совпадают либо не пересекаются. Если опустить одинаковые слагаемые, то получится разбиение, о котором говорится в теореме 6.

Из теоремы 6 вытекает, что если для двух элементов $a, b \in S$ множества N_0aN_0, N_0bN_0 имеют непустое пересечение, то это пересечение равно объединению минимальных двусторонних H-идеалов.

3. Левий, правий и двусторонний H-цоколь

Определение. *Пусть S — полугруппа, H — ее подполугруппа. Через $\mathfrak{L}^{(H)}$ ($\mathfrak{R}^{(H)}$, $\mathfrak{N}^{(H)}$) мы будем обозначать обьединение всех минимальных левых (правых, двусторонних) H-идеалов полугруппы S. В соответствии с терминологией теории колец множества $\mathfrak{L}^{(H)}$ ($\mathfrak{R}^{(H)}$, $\mathfrak{N}^{(H)}$) мы будем называть левым (правым, двусторонним) H-цоколем данной полугруппы.*

Следующие теоремы занимаются соотношениями между множествами $\mathfrak{L}^{(H)}$, $\mathfrak{R}^{(H)}$, $\mathfrak{N}^{(H)}$.

Примечание. Проблематика этого раздела формально сходна с проблематикой § 10 работы [3]. Ввиду того, что введенное нами определение минимального H-идеала не совпадает с определением минимального идеала в названной работе, наши результаты не являются обобщением результатов работы [3].

Лемма 3. Пусть S — полугруппа, H — ее подполугруппа. Пусть H содержит минимальный левый (правый) идеал L_0 (R_0). Тогда всякий минимальный двусторонний H-идеал N полугруппы S есть объединение минимальных левых (правых) H-идеалов.

Доказательство. Пусть N — произвольный минимальный двусторонний H-идеал полугруппы S. Множество L_0N является двусторонним H-идеалом, для которого выполняется $L_0N \subset N$. Тогда из минимальности H-идеала N следует $L_0N = N$. Значит, справедливо $N = \bigcup_{a \in N} L_0a$, и согласно теореме 3 каждое слагаемое является минимальным левым H-идеалом.

В случае существования минимального правого идеала R_0 в H аналогично доказывается, что $N = \bigcup_{a \in N} aR_0$, где каждое слагаемое является минимальным правым H-идеалом.

Теорема 7. *Пусть S – полугруппа, H – ее подполугруппа. Пусть H содержит минимальный левый идеал L_0, минимальный правый идеал R_0, а значит, и минимальный двусторонний идеал. Тогда множества $\mathfrak{L}^{(H)}$ и $\mathfrak{R}^{(H)}$ являются двусторонними H-идеалами и выполняется $\mathfrak{N}^{(H)} \subset \mathfrak{L}^{(H)}$, $\mathfrak{N}^{(H)} \subset \mathfrak{R}^{(H)}$.*

Доказательство. Согласно теоремам 2 и 3 $\mathfrak{L}^{(H)} = \bigcup_{a \in S} L_0a = L_0S$. Очевидно, множество L_0S является двусторонним H-идеалом. Аналогично докажется, что и $\mathfrak{R}^{(H)}$ — двусторонний H-идеал.

Согласно теоремам 4а и 5 $\mathfrak{N}^{(H)} = \bigcup_{a \in S} L_0aR_0 = L_0SR_0$. Отсюда следует $\mathfrak{N}^{(H)} = L_0SR_0 \subset L_0SS \subset L_0S \subset \mathfrak{L}^{(H)}$, т. е. $\mathfrak{N}^{(H)} \subset \mathfrak{L}^{(H)}$. Аналогично докажется справедливость соотношения $\mathfrak{N}^{(H)} \subset \mathfrak{R}^{(H)}$.

Вообще говоря, не имеет места $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{N}^{(H)}$ ($\mathfrak{R}^{(H)} = \mathfrak{N}^{(H)}$). Мы убедимся в этом на следующем примере простой полугруппы без нуля.

Пример 3,1. Пусть $S = \{a, b, c, d\}$ — полугруппа с следующей таблицей умножений:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

Выберем $H = \{a, b\}$. Тогда всеми минимальными левыми H-идеалами будут: $\{a, b\}$, $\{c, d\}$. Множество $\{a, b\}$ является минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S, а множество $\{c, d\}$ — нет. Таким образом, полугруппа S содержит единственный минимальный двусторонний H-идеал, но два минимальных левых H-идеала, объединением которых она и является. Значит, в результате имеет место $\mathfrak{N}^{(H)} = \{a, b\} = \mathfrak{R}^{(H)}$, $\mathfrak{L}^{(H)} = S$.

Аналогично обстоит дело в примере 2,2, в котором $\mathfrak{L}^{(H)} = \{z, a_2, a_4\}$, $\mathfrak{R}^{(H)} = \{z, a_1, a_2, a_3, a_4\} = S$, $\mathfrak{N}^{(H)} = \{z, a_2, a_4\}$. Значит, $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{N}^{(H)}$, но $\mathfrak{N}^{(H)} \subsetneqq \mathfrak{R}^{(H)}$.

Лемма 4. Пусть $L\,(R)$ — левый (правый) идеал подполугруппы H в S. Тогда минимальный левый H-идеал L_m полугруппы S, содержащий элемент a, может быть записан в виде $L_m = La$, минимальный правый H-идеал R_m полугруппы S, содержащий элемент a, может быть записан в виде $R_m = aR$.

Доказательство. Пусть $a \in L_m$. Тогда $La \subset LL_m \subset HL_m \subset L_m$. Значит, ввиду минимальности $L_m = La$. Аналогично докажется утверждение для правого H-идеала.

Теорема 8. *Пусть подполугруппа H полугруппы S содержит хотя бы один минимальный левый идеал L_0 и хотя бы один минимальный правый идеал R_0. Тогда имеет место соотношение $\mathfrak{N}^{(H)} = \mathfrak{L}^{(H)} \cap \mathfrak{R}^{(H)}$.*

Доказательство. В силу теоремы 7 имеет место $\mathfrak{N}^{(H)} \subset \mathfrak{L}^{(H)} \cap \mathfrak{R}^{(H)}$. Значит, достаточно показать, что выполняется также $\mathfrak{L}^{(H)} \cap \mathfrak{R}^{(H)} \subset \mathfrak{N}^{(H)}$. Пусть для некоторого элемента $a \in S$ имеет место $a \in \mathfrak{L}^{(H)} \cap \mathfrak{R}^{(H)}$. Тогда на основании леммы 4 $a \in L_0a$, $a \in aR_0$, а значит, $a \in L_0a \cup aR_0$. Отсюда следует, что $a = l_0a$

и одновременно $a = ar_0$, где l_0, r_0 — некоторые элементы соответственно множеств L_0, R_0. Отсюда следует, далее, что $a = ar_0 = l_0ar_0 \subset L_0aR_0 \subset \mathfrak{N}^{(H)}$. Значит, $\mathfrak{N}^{(H)} = \mathfrak{L}^{(H)} \cap \mathfrak{R}^{(H)}$.

Теорема 9. *Пусть подполугруппа H полугруппы S содержит хотя бы один минимальный левый идеал L_0, хотя бы один минимальный правый идеал R_0, а значит, минимальный двусторонний идеал N_0. Тогда имеет место соотношение $\mathfrak{N}^{(H)} = N_0SN_0$.*

Доказательство. Из соотношения $\mathfrak{N}^{(H)} = L_0SR_0 \subset N_0SN_0$ вытекает $\mathfrak{N}^{(H)} \subset N_0SN_0$. С другой стороны, из теоремы 6 вытекает $N_0SN_0 \subset \mathfrak{N}^{(H)}$, так как $N_0SN_0 = \bigcup\limits_{a \in S} N_0aN_0$ является объединением некоторого числа минимальных двусторонних H-идеалов. Следовательно, выполняется $\mathfrak{N}^{(H)} = N_0SN_0$.

Возникает вопрос, при каких условиях имеет место соотношение $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$, т. е. при каких условиях $N_0SN_0 = L_0S = SR_0$. Об этом говорит теорема 10. Но сначала мы докажем лемму.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 9. Соотношение $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$ имеет место тогда и только тогда, когда каждый минимальный левый и правый H-идеал полугруппы S лежит в множестве $\mathfrak{N}^{(H)}$, т. е. когда для каждого L_m, R_m имеет место $L_m \subset N_0SN_0$, $R_m \subset N_0SN_0$.

Доказательство. 1. Пусть каждый минимальный левый и правый H-идеал лежит в множестве $\mathfrak{N}^{(H)}$. Тогда имеет место $\mathfrak{L}^{(H)} \subset \mathfrak{N}^{(H)}$, $\mathfrak{R}^{(H)} \subset \mathfrak{N}^{(H)}$. На основании теоремы 7 имеем тогда $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{N}^{(H)}$, $\mathfrak{R}^{(H)} = \mathfrak{N}^{(H)}$. Отсюда следует $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$.

2. Пусть $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$. Тогда $\mathfrak{L}^{(H)} \cap \mathfrak{R}^{(H)} = \mathfrak{N}^{(H)}$, $\mathfrak{N}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)} = \mathfrak{L}^{(H)}$, т. е. каждый минимальный левый и правый H-идеал полугруппы S лежит в $\mathfrak{N}^{(H)}$.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 9. В этом случае соотношение $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$ имеет место тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{N}^{(H)}$ является двусторонним S-идеалом.*

Доказательство. 1. Пусть имеет место соотношение $\mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$. Тогда на основании теоремы 8 имеет место $\mathfrak{N}^{(H)} = \mathfrak{L}^{(H)} = \mathfrak{R}^{(H)}$, и $\mathfrak{N}^{(H)}$ является двусторонним S-идеалом, так как $\mathfrak{L}^{(H)} = L_0S$ является правым, а множество $\mathfrak{R}^{(H)} = SR_0$ — левым S-идеалом.

2. Пусть множество $\mathfrak{N}^{(H)}$ — двусторонний S-идеал. Мы покажем, что в этом случае каждый минимальный левый и правый H-идеал полугруппы S содержится в $\mathfrak{N}^{(H)}$. Пусть L_m — произвольный минимальный левый H-идеал полугруппы S. Согласно теореме 2 имеет место $L_m = L_0a$ с удобно выбранным $a \in S$, L_0 является минимальным левым идеалом полугруппы H, для которого имеет место $L_0 \subset N_0$, значит, также $L_0a \subset N_0a$. Так как множество N_0 — минимальный двусторонний идеал полугруппы H, то для каждого $n \in N_0$ имеет место соотношение $N_0 = N_0nN_0$. Значит, $L_0a \subset N_0nN_0a$. Согласно условию

множество $\mathfrak{N}^{(H)} = N_0SN_0$ является двусторонним S-идеалом, поэтому имеет место $N_0SN_0S \subset N_0SN_0$. Значит, мы имеем $L_m = L_0a \subset N_0nN_0a \subset N_0SN_0$, т. е. каждый минимальный левый H-идеал полугруппы S содержится в множестве $\mathfrak{N}^{(H)}$. Аналогично может быть доказано, что каждый минимальный правый H-идеал полугруппы S лежит в множестве $\mathfrak{N}^{(H)}$. Следовательно, на основании леммы 5 имеет место $\mathfrak{R}^{(H)} = \mathfrak{L}^{(H)}$, что и требовалось доказать.

4.

В этом разделе мы применим полученные результаты к некоторым частным случаям полугруппы S и ее подполугруппы H.

1. *S — группа, H — ее подгруппа.*

Так как всякая подгруппа H группы S является слева (справа) простой полугруппой, то из теоремы 3 следует, что разбиение группы на левые (правые) классы вида Ha (aH) является разбиением группы на объединение минимальных левых (правых) H-идеалов, и что, следовательно, непересекаемость этих классов также является следствием минимальности этих H-идеалов. Разбиение группы S на двусторонние классы вида HaH является разбиением на минимальные двусторонние H-идеалы. (Минимальность двусторонних H-идеалов вида HaH является следствием непересекаемости классов.)

Подгруппа H группы S является нормальным делителем группы S тогда и только тогда, когда каждый минимальный левый H-идеал одновременно является и минимальным правым H-идеалом. В этом случае разбиение на минимальные левые (правые) H-идеалы и разбиение на минимальные двусторонние H-идеалы совпадают.

2. *S — вполне простая полугруппа без нуля, H — простая подполугруппа, содержащая все идемпотенты из S.*

Ш. Шварц в работе [4] доказал, что в этом случае существует разбиение полугруппы на объединение попарно непересекающихся классов вида HaH, т. е. $S = H \cup HaH \cup HbH \cup HcH \cup \ldots$; a, b, c — удобно выбранные элементы из S. Мы докажем, что это разбиение является разбиением полугруппы S на объединение минимальных двусторонних H-идеалов.

Теорема 11. *Пусть S — вполне простая полугруппа, H — простая подполугруппа, содержащая все идемпотенты из S. Тогда множество HaH является минимальным двусторонним H-идеалом для произвольного $a \in S$.*

Доказательство. Пусть T — двусторонний H-идеал, для которого имеет место $T \subset HaH$. Тогда для каждого элемента $t \in T$ имеет место

$$HtH \subset HTH \subset T \subset HaH.$$

Так как множество HtH является одним из классов приведенного выше непересекающегося разбиения полугруппы S, то необходимо выполняется $HtH = HaH$. Значит, для каждого двустороннего H-идеала $T \subset HaH$ имеет место

$T = HaH$. Из этого вытекает, что множество HaH является минимальным двусторонним H-идеалом вполне простой полугруппы S.

Примечание. Известно, что вполне простая полугруппа без нуля является объединением минимальных левых и правых идеалов. Далее, очевидно, справедливо, что непустое пересечение левого (правого) S-идеала и левого (правого) H-идеала есть левый (правый) H-идеал. Тогда отсюда и из леммы 3 следует, что разбиение вполне простой полугруппы S на объединение минимальных двусторонних H-идеалов влечет за собой ее разбиение на объединение минимальных левых и правых H-идеалов, которое является подразбиением известного разбиения полугруппы S на сумму минимальных левых и правых идеалов. Разбиение полугруппы S на минимальные левые (правые) H-идеалы ($H \subsetneq S$) не обладает тем свойством разбиения полугруппы на минимальные левые (правые) идеалы, что каждый минимальный левый и правый идеал имеют непустое пересечение. Мы можем убедиться в этом на примере 3,1, если выбрать $H = \{a, c\}$. Указанная полугруппа является объединением минимальных левых идеалов $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, а сама она является минимальным правым идеалом. Одновременно она является объединением следующих минимальных левых H-идеалов: $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}, L_3 = \{c\}, L_4 = \{d\}$ и объединением следующих двух минимальных правых H-идеалов: $R_1 = \{a, c\}$, $R_2 = \{b, d\}$. Имеет место, например, $L_4 \cap R_1 = 0$.

3. *S — вполне простая полугруппа без нуля, H — подполугруппа, содержащая хотя бы один идемпотент.*

Разбиение S на объединение минимальных левых и правых идеалов мы будем записывать в виде $S = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1} R_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_2} L_\beta$. Известно, что $R_\alpha \cap L_\beta = G_{\alpha\beta}$ является группой и разбиение $S = \bigcup\limits_{\alpha} \bigcup\limits_{\beta} G_{\alpha\beta}$ является разбиением S на объединение непересекающихся изоморфных групп.

В работе [4] было доказано, что

а) Простая подполугруппа H вполне простой полугруппы S, содержащая хотя бы один идемпотент, вполне проста.

б) $H = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1'} R'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_2'} L'_\beta = \bigcup\limits_{\alpha} \bigcup\limits_{\beta} G'_{\alpha\beta}$, где $R'_\alpha = R_\alpha \cap H$, $L'_\beta = L_\beta \cap H$ — минимальные правые (левые) идеалы полугруппы H. $G'_{\alpha\beta} = L'_\alpha \cap R'_\beta$. Λ'_1, Λ'_2 — множества тех $\alpha \in \Lambda_1$, $\beta \in \Lambda_2$, для которых $R_\alpha \cap H \neq 0$, $L_\beta \cap H \neq 0$.

в) Множество $H_1 = [\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1'} R_\alpha] \cap [\bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_2'} L_\beta] = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1'} \bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_2'} G_{\alpha\beta}$ является максимальной подполугруппой, содержащей одни и те же идемпотенты, что и H.

Теорема 12. *Пусть S — вполне простая полугруппа без нуля, H — простая подполугруппа, содержащая хотя бы один идемпотент. Тогда $\mathfrak{R}^{(H)} = H_1$, H_1 является максимальной подполугруппой полугруппы S, содержащей одни и те же идемпотенты, что и H.*

Доказательство. При принятом обозначении для каждого $a \in S$ имеет место $HaH = Ha[\bigcup_{\beta\in\Lambda_2'} L'_\beta] \subset S[\bigcup_{\beta\in\Lambda_2'} L_\beta] = \bigcup_{\beta\in\Lambda_2'} L_\beta$. Аналогично $HaH \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda_1'} R'_\alpha$. Значит, $HaH \subset [\bigcup_{\beta\in\Lambda_2'} L_\beta] \cap [\bigcup_{\alpha\in\Lambda_1'} R_\alpha] = H_1$. Отсюда следует, что $\mathfrak{N}^{(H)} = HSH \subset H_1$.

Выберем, наоборот, произвольный элемент $h_1 \in H_1$. Пусть, $h_1 \in G_{\sigma\varrho}$, и пусть $e_{\sigma\varrho}$ будет единицей группы $G_{\sigma\varrho}$. Так как $e_{\sigma\varrho}$ лежит также в H, то

$$h_1 = e_{\sigma\varrho} h_1 e_{\sigma\varrho} \in Hh_1H \subset HSH \subset \mathfrak{N}^{(H)}.$$

Значит, $\mathfrak{N}^{(H)} = H_1$.

Рассмотрим теперь H в качестве подполугруппы максимальной подполугруппы H_1. Согласно теореме 3,2 работы [4] два множества $Hh'H$, $Hh''H$ ($h' \in H_1$, $h'' \in H_1$) либо не пересекаются либо совпадают, а полугруппа H_1 может быть записана как объединение непересекающихся классов в виде

$$H_1 = H \cup Hh'H \cup Hh''H \cup \dots .$$

По теореме 11 каждое из множеств $Hh'H$, $Hh''H$, ... является минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы H_1 (а значит, и полугруппы S). В теореме 12 мы показали, что каждый H-идеал вида HaH, $a \in S$ лежит в H_1. Однако, как показывает следующий пример, если H не содержит всех идемпотентов полугруппы S, то, вообще говоря, не каждый такой двусторонний H-идеал будет минимальным двусторонним H-идеалом.

Пример 4.1. Пусть $S = \{a_1, a_2, \dots a_8\}$ — полугруппа с такой таблицей умножений:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_1	a_2	a_5	a_6	a_6	a_5
a_2	a_2	a_1	a_2	a_1	a_6	a_5	a_5	a_6
a_3	a_3	a_4	a_3	a_4	a_8	a_7	a_7	a_8
a_4	a_4	a_3	a_4	a_3	a_7	a_8	a_8	a_7
a_5	a_1	a_2	a_2	a_1	a_5	a_6	a_5	a_6
a_6	a_2	a_1	a_1	a_2	a_6	a_5	a_6	a_5
a_7	a_4	a_3	a_3	a_4	a_7	a_8	a_7	a_8
a_8	a_3	a_4	a_4	a_3	a_8	a_7	a_8	a_7

Выберем $H = \{a_1, a_3\}$. Для двустороннего H-идеала Ha_5H имеет место: $Ha_5H = \{a_1, a_3\}\, a_5\, \{a_1, a_3\} = \{a_1, a_3\} \cup \{a_2, a_4\}$. Значит, Ha_5H не является минимальным H-идеалом, а объединением двух непересекающихся минимальных H-идеалов, а именно $\{a_1, a_3\}$ и $\{a_2, a_4\}$. В этом примере $\mathfrak{N}^{(H)} = H_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

В общем случае имеет место

Теорема 13. *Пусть выполнены условия теоремы 12. Тогда для каждого $a \in S$ множество HaH является объединением минимальных двусторонних H-идеалов, лежащих в H_1. Если $a \in H_1$, то HaH является минимальным двусторонним H-идеалом полугруппы S.*

Доказательство является следствием теоремы 6 и теоремы 11.

На основании полученных результатов можно дать ответ на вопрос, является ли для существования разбиения вполне простой полугруппы на объединение классов вида HaH, приведенного в работе [4], необходимым, чтобы H содержала все идемпотенты.

Теорема 14. *Пусть S — вполне простая полугруппа, H — простая подполугруппа, содержащая хотя бы один идемпотент. Необходимым и достаточным для существования разбиения S на объединение непересекающихся классов вида $S = H \cup HaH \cup HbH \cup \ldots$ является следующее условие: H содержит все идемпотенты полугруппы S.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать необходимость этого условия.

Если H не содержит всех идемпотентов полугруппы S, то и максимальная подполугруппа H_1 не содержит всех идемпотентов полугруппы S, и, следовательно, $H_1 \neq S$. Из теоремы 12 вытекает, что каждое из множеств вида HaH для всякого $a \in S$ лежит в H_1, а значит, их объединение не может дать всей полугруппы S.

В дальнейшем мы исследуем некоторые соотношения для левого (правого) H-цоколя, снова для случая, когда S — вполне простая полугруппа без нуля и H — простая подполугруппа, содержащая хотя бы один идемпотент.

Теорема 15. *Пусть S — вполне простая полугруппа без нуля, H — подполугруппа, содержащая хотя бы один идемпотент. Тогда $\mathfrak{L}^{(H)}$ равно объединению тех минимальных правых идеалов полугруппы S, пересечение которых с H непусто.*

Доказательство. Пусть при принятом обозначении L'_β $(\beta \in \Lambda'_2)$ — фиксированный минимальный левый идеал полугруппы H. Согласно теоремам 2 и 3 имеет место $\mathfrak{L}^{(H)} = \bigcup\limits_{a \in S} L'_\beta a = L'_\beta S$, и к тому же это соотношение выполняется для каждого $\beta \in \Lambda'_2$. Таким образом, одновременно выполняется $\mathfrak{L}^{(H)} = \bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_2'} L'_\beta S$. Отсюда следует $\mathfrak{L}^{(H)} = [\bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_2'} L'_\beta] S = HS = [\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1'} R'_\alpha] S = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1'} R'_\alpha S$. Каждое множество $R'_\alpha S$ является правым идеалом полугруппы S, и поскольку $R'_\alpha S \subset R_\alpha S \subset R_\alpha$, то $R'_\alpha S$ является как раз минимальным правым идеалом R_α полугруппы S. Значит, имеет место $\mathfrak{L}^{(H)} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda_1'} R_\alpha$, что и требовалось доказать.

Примечание. Выберем, в частности, в качестве H какой-нибудь из минимальных левых идеалов полугруппы S. Обозначим его через L_0. Поскольку каждый другой минимальный левый идеал полугруппы S имеет вид $L_0 a$, $a \in S$, то имеет место $S = \bigcup\limits_{a \in S} L_0 a$. Из этого следует, что известное разбиение вполне простой полугруппы на объединение ее минимальных левых идеалов является одновременно разбиением ее на объединение минимальных левых H-идеалов: $S = L_0 \cup L_0 a \cup L_0 b \cup \ldots = H \cup Ha \cup Hb \cup \ldots$

Очевидно также, что для разбиения вполне простой полугруппы на классы вида Ha не является необходимым, чтобы H содержала все идемпотенты, как в случае разбиения полугруппы S на классы вида HaH.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Clifford A. H., Preston G. B., *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I. Math. Surveys, No. 7, Amer. Math. Society, Providence, R. I., 1961.

[2] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Физматгиз, Москва 1960.

[3] Шварц Ш., *О полугруппах, имеющих ядро*, Чехословацкий математический журнал *1 (76)*, (1951), 259—300.

[4] Schwarz Š., *Subsemigroups of simple semigroups*, Czechoslovak Math. J. *13 (88)*, (1963). (В печати.)

[5] Schwarz Š., *Homomorphisms of a completely simple semigroup onto a group*, Mat.-fyz. časopis SAV *12* (1962), 293—300.

[6] Wallace A. D., *Relative ideals in semigroups*, I. Colloqium mathematicum 9 (1962), 55—61.

Поступило 20. X. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

ON GENERALIZED IDEALS IN SEMIGROUPS

Renáta Hrmová

Summary

To solve some problems connected with the subject treated in [4] I have introduced the notion of a generalized ideal in S. This notion seems to be useful also in the study of general semigroups. An analogous notion has been introduced in the recent paper [6], where compact semigroups are treated.

Let S be a semigroup, A, B non empty subsets of S. The subset A is called a left (right; two-sided) B-ideal of S if $BA \subset A$ ($AB \subset A$; $BA \subset A$, $AB \subset A$) holds.

In section I of this paper we show that is sufficient to restrict the study of B-ideals to the case where B is a subsemigroup of S. Therefore, in the following H denotes always a subsemigroup of S.

In section II we define minimal H-ideals in S. Under the condition that H contains at least one minimal left (right) ideal, the structure of all minimal left (right, two-sided) H-ideals of S is described.

In section III the left (right, two-sided) H-socle is studied. This notion is analogous to that used in the theory of rings.

In section IV some aplications of the results obtained in I, II, III are given.