Matematický časopis

Jozef Moravčík

Über gewisse Klassen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung ($n >= 3$) des Geschlechtes 3

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 1, 29--49

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126797`

Matematický časopis 22 (1972), No. 1

ÜBER GEWISSE KLASSEN LINEARER GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG ($n \geqq 3$) DES GESCHLECHTES 3

JOZEF MORAVČÍK, Žilina

In der Arbeit [6] hat Z. Hustý einen Begriff des Geschlechtes der linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung (im weiteren kurz: die Dgl.) n — ter Ordnung eingeführt. In dieser Abhandlung werden wir uns mit Fragen der Äquivalenz zweier Dglen, einer Faktorisation, der oszillatorischen und asymptotischen Eigenschaften gewisser Klassen der Dglen n — ter Ordnung ($n \geqq 3$) des Geschlechtes 3 beschäftigen. Die Dglen werden wir in der halbkanonischen Form erörtern.

1. Definition 1. *Wir sagen, dass die Dgl. n — ter Ordnung*

$$y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} a_i(x) y^{(n-i)} = 0, \tag{1}$$

$$y^{(s)} = \frac{d^s y}{dx^s}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \; y^{(0)} = y, \; a_i(x) \in C_{n-i}(I_1), \quad i = 2, \ldots, n,$$

des Geschlechtes 3 im Intervall I_1 ist, wenn sie sich in diesem Intervall in einer perturbierten Form

$$I_n(y; a_2) + \vartheta_n(x) y = 0 \tag{a}$$

ausdrücken lässt, wobei $I_n(y; a_2) = 0$ eine Dgl. n — ter Ordnung aus der Klasse C (vgl. [10]) im Intervall I_1 ist, die auch als eine iterierte Dgl. n — ter Ordnung (vgl. [3]) bezeichnet wird, und $\vartheta_n(x)$ die Fundamentalinvariante der Dimension n (vgl. [5]) der Dgl. (1) ist.

Es seien die Dgl. (1) in der perturbierten Form (a) und eine Dgl.

$$v^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i(\xi) v^{(n-i)} = 0, \tag{2}$$

$$v^{(s)} = \frac{d^s v}{d\xi^s}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, v^{(0)} = v, A_i(\xi) \in C_{n-i}(I_2), i = 2, \ldots, n$$

in einer perturbierten Form

$$(A) \qquad I_n(v; A_2) + \Theta_n(\xi)v = 0$$

gegeben, wobei $\Theta_n(\xi)$ die Fundamentalinvariante der Dimension n der Dgl. (2) im Intervall I_2 ist.

Definition 2. *Wir sagen, dass die Dgl.* (A) *im Intervall* $I_{2\xi} \subset I_2$ *der Dgl.* (a) *im Intervall* $I_{1x} \subset I_1$ *äquivalent ist, wenn folgendes gilt:*

1) *Es existieren Funktionen* $\xi(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$, $t(x) \in C_n(I_{1x})$ *derart, dass* $\xi(I_{1x}) = I_{2\xi}$, $\xi', (x)t(x) \neq 0$ *in* I_{1x} *ist.*

2) *Wenn* $v(\xi)$ *eine Lösung der Dgl.* (A) *in* $I_{2\xi}$ *ist, dann ist die zusammengesetzte Funktion* $y(x) = t(x)v[\xi(x)]$ *eine Lösung der Dgl.* (a) *im Intervall* I_{1x}.

Das geordnete Paar der Funktionen $[\xi(x), t(x)]$ werden wir den *Träger der Äquivalenz* der Dgl. (A) in $I_{2\xi}$ und der Dgl. (a) in I_{1x} nennen. Diese Äquivalenz werden wir $(A)I_{2\xi} \sim (a)I_{1x}\{\xi(x)\}$ bezeichnen, denn im Falle von Dglen ohne rechte Seite — wie aus der Arbeit [9, Teil I.] bekannt, ist die zweite Komponente $t(x)$ des Trägers der Äquivalenz bis auf die Multiplikationskonstante eindeutig durch die erste Komponente bestimmt: $t(x) = c|\xi'(x)|^{(1-n)/2}$, wobei $c \neq 0$ eine Konstante ist.

Aus den Resultaten der Arbeit [5, Teil III.] folgt, dass

$$(3) \qquad (A)I_{2\xi} \sim (a)I_{1x}\ \{\xi(x)\}$$

dann und nur dann gilt, wenn $\xi(x)$ in I_{1x} das System nichtlinearer Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \{\xi, x\} + \frac{3}{n+1} A_2(\xi)\xi'^2 = \frac{3}{n+1} a_2(x),$$

$$(5) \qquad \Theta_n(\xi)\xi'^n = \vartheta_n(x)$$

erfüllt, wobei $\{\xi, x\} = \frac{1}{2}\xi''' : \xi' - \frac{3}{4}\xi''^2 : \xi'^2$ die sog. Schwarzsche Ableitung der Funktion $\xi(x)$ im Punkte x ist (vgl. [5], Satz 3,3).

Unmittelbar aus den Eigenschaften der ersten Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz und aus der Gleichung (5) folgt der

Hilfssatz 1. *Es gelte* (3) *und* $\Theta_n(\xi) \in C_r(I_{2\xi})$, *wobei* r *irgendeine natürliche Zahl ist. Wenn* $\xi(x) \in C_{r+1}(I_{1x})$ *ist, dann besitzt die Funktion* $\vartheta_n(x)$ *in* I_{1x} *die gleiche Struktur der Nullstellen wie die Funktion* $\Theta_n(\xi)$ *im Intervall* $I_{2\xi}$. *Wenn* $r \geqq n + 1$ *und* $\xi(x) \notin C_{r+1}(I_{1x})$ *ist, dann besitzt die Funktion* $\vartheta_n(x)$ *in* I_{1x} *die fastgleiche Struktur der Nullstellen wie die Funktion* $\Theta_n(\xi)$ *in* $I_{2\xi}$.

Wenn n gerade ist, dann gilt ausserdem: $\operatorname{sgn} \Theta_n(\xi) = \operatorname{sgn} \vartheta_n(x)$ *für* $\xi = \xi(x)$, $x \in I_{1x}$.

Beweis des Hilfssatzes ist ähnlich wie der Beweis des Hilfssatzes 1,2 der Arbeit [8], von welchen er eine Verallgemeinerung darstellt. Begriffe der gleichen bzw. der fastgleichen Struktur der Nullstellen zweier Funktionen auf entsprechenden Intervallen verstehen wir so, wie sie in der Arbeit [8] eingeführt worden waren:

Definition 3. *Wir sagen, dass die Funktion $f_1(x)$ im Intervall I_{1x} eine fastgleiche Struktur (eine gleiche Struktur) der Nullstellen wie die Funktion $f_2(\xi)$ im Intervall $I_{2\xi}$ hat, wenn eine schlichte Abbildung $\xi(x)$ des Intervalls I_{1x} auf $I_{2\xi}$ existiert, welche in jedem Punkte $x \in I_{1x}$ die Ableitung $\xi'(x) \neq 0$ besitzt und die Menge der Nullstellen der Funktion $f_1(x)$ in I_{1x} auf die Menge der Nullstellen der Funktion $f_2(\xi)$ in $I_{2\xi}$ (mit der Erhaltung der Vielfachheit jeder Nullstelle) abbildet.*

Unter der Voraussetzung, dass $\vartheta_n(x) \in C_2(I_1)$, $\vartheta_n(x) \neq 0$ für alle $x \in I_1$ ist, kann man in I_1 eine Funktion $b_n(x)$ durch die Beziehung

$$b_n(x) = \frac{\dfrac{3}{n+1}\, a_2(x) - \left[\dfrac{1}{2n}\, \dfrac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]' + \left[\dfrac{1}{2n}\, \dfrac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]^2}{[\vartheta_n(x)]^{2/n}} \tag{6}$$

definieren.

Es gilt dieser

Satz 1. *Es gelte* (3) *und es sei* $I_{2\xi} \subset I_2$, $I_{1x} \subset I_1$, $\vartheta_n(x) \neq 0$ *in* I_{1x}, $\vartheta_n(x) \in C_n(I_{1x})$. *Dann ist* $\Theta_n(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$, $\Theta_n(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$ *und folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

1) *Die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz ist eine beliebige im Intervall I_{1x} definierte Lösung des Systems der Differentialgleichungen* (4) *und*

$$\xi'(x) = [\vartheta_n(x) : \Theta_n(\xi)]^{1/n}. \tag{7}$$

2) *Die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz ist eine beliebige im Intervall I_{1x} definierte Lösung des Systems der Funktionalgleichungen, das aus den Gleichungen* (7) *und*

$$B_n[\xi(x)] = b_n(x), \quad x \in I_{1x}, \tag{8}$$

besteht, wobei

$$B_n(\xi) = \frac{\dfrac{3}{n+1} A_2(\xi) - \left[\dfrac{1}{2n} \dfrac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{\cdot} + \left[\dfrac{1}{2n} \dfrac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\right]^2}{[\Theta_n(\xi)]^{2/n}}, \quad \cdot = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$$

ist.

Beweis. Wenn $\vartheta_n(x) \neq 0$ in I_{1x} ist und (3) gilt, dann folgt aus dem Hilfssatz 1, dass $\Theta_n(\xi) \neq 0$ in $I_{2\xi}$ ist. Wenn ausserdem $\vartheta_n(x) \in C_n(I_{1x})$ ist, dann folgt aus der Gleichung (5), die bekanntlich $\xi(x)$ in I_{1x} erfüllen muss, dass $\Theta_n(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$ ist. Aus der Gleichung (5) ist es ebenfalls klar, dass beim geraden n für alle $x \in I_{1x}$ eine Identität

$$\operatorname{sgn} \Theta_n[\xi(x)] = \operatorname{sgn} \vartheta_n(x)$$

gilt und darum ist es möglich, diese Gleichung unter den angeführten Voraussetzungen in der Form (7) zu schreiben.

Es sei nun $\xi(x)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (7) in I_{1x}. Durch zweifache Differentiation erhalten wir stufenweise:

$$\xi''(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{1/n} \frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)} - \frac{1}{n}\frac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{2/n},$$

$$\xi'''(x) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{1/n}\left[\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]^2 - \frac{3}{n^2}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{2/n}\frac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)} +$$

$$+ \frac{1}{n}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{1/n}\left[\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]' + \frac{2}{n^2}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{3/n}\left[\frac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\right]^2 - \frac{1}{n}\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{3/n}\left[\frac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{\cdot}.$$

Wenn wir diese Resultate in die Gleichung (4) einsetzen, erhalten wir nach einer einfachen Umformung die Beziehung

$$\left[\frac{\vartheta_n(x)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{2/n}\left\{\frac{3}{n+1}A_2(\xi) - \left[\frac{1}{2n}\frac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\right]^{\cdot} + \left[\frac{1}{2n}\frac{\dot{\Theta}_n(\xi)}{\Theta_n(\xi)}\right]^2\right\} = \frac{3}{n+1}a_2(x) -$$

$$- \left[\frac{1}{2n}\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]' + \left[\frac{1}{2n}\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]^2,$$

daraus ist ersichtlich, dass $\xi(x)$ in I_{1x} die Gleichung (4) dann und nur dann erfüllt, wenn (8) für alle $x \in I_{1x}$ gillt. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Bemerkung 1. Aus der Behauptung des Satzes 1 ist offenbar, dass sich bei der Punktabbildung

$$\text{(9)} \qquad \xi = \xi(x), \qquad y = t(x)v,$$

welche die Form der Gleichung (a) erhält, weder die Form noch der Wert der durch die Beziehung (6) definierten Funktion $b_n(x)$ ändern. Darum werden wir die Funktion $b_n(x)$ *die absolute Invariante der Dgl.* (a) nennen.

Aus dem Satz 3,3 der Arbeit [5, Teil III.], aus dem Hilfssatz 1 und aus dem Satz 1 erhalten wir gleich diese Behauptung:

Satz 1'. *Wenn* $\vartheta_n(x) \neq 0$ *in* I_{1x} *ist,* $\vartheta_n(x) \in C_n(I_{1x})$, *gilt* (3) *dann und nur dann, wenn* $\Theta_n(\xi) \neq 0$ *in* $I_{2\xi}$ *ist,* $\Theta_n(\xi) \in C_n(I_{2\xi})$, *bei einem geraden* n *ist auch* $\operatorname{sgn} \Theta_n[\xi(x)] = \operatorname{sgn} \vartheta_n(x)$ *und* $\xi(x)$ *ist eine beliebige Lösung des Systems der Funktionalgleichungen* (7), (8) *im Intervall* I_{1x}.

Bemerkung 2. Die Spezialfälle der Dglen des Geschlechtes 3 sind die Dgl. der dritten Ordnung

$$\text{(10)} \qquad y''' + 4A(x)y' + [2A'(x) + \vartheta_3(x)]y = 0$$

und die selbstadjungierte Dgl. der vierten Ordnung

$$\text{(11)} \qquad y^{(4)} + 10A(x)y'' + 10A'(x)y' + \{3[A''(x) + 3A^2(x)] + \vartheta_4(x)\}y = 0,$$

welche in der Arbeit [8] untersucht wurden, die erste in der Form

$$(\overline{10}) \qquad y''' + 2a(x)y' + [a'(x) + b(x)]y = 0.$$

Aus der Beziehung (6) erhalten wir für die absoluten Invarianten $b_3(x)$, $\bar{b}_3(x)$, bzw. $b_4(x)$ der Dglen (10), ($\overline{10}$), bzw. (11):

$$b_3(x) = \left\{ A(x) - \left[\frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)}\right]' + \left[\frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)}\right]^2 \right\} : [\vartheta_3(x)]^{2/3},$$

$$\bar{b}_3(x) = \frac{1}{2}\left\{ a(x) - \left[\frac{1}{3}\,\frac{b'(x)}{b(x)}\right]' + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\,\frac{b'(x)}{b(x)}\right]^2 \right\} : [b(x)]^{2/3} = \frac{1}{2}B(x),$$

wobei $B(x)$ die für die Dgl. ($\overline{10}$) in der Arbeit [8] abgeleitete absolute Invariante ist und

$$b_4(x) = \left\{ A(x) - \left[\frac{1}{8}\,\frac{\vartheta_4'(x)}{\vartheta_4(x)}\right]' + \left[\frac{1}{8}\,\frac{\vartheta_4'(x)}{\vartheta_4(x)}\right]^2 \right\} : |\vartheta_4(x)|^{1/2} = \Omega(x),$$

wobei $\Omega(x)$ die in der Arbeit [8] abgeleitete sog. absolute Invariante der vierten Art ist.

2. Beschäftigen wir uns jetzt mit der Frage, wann die Dgl. (a) im gewissen Intervall $I \subset I_1$ einer Dgl.

$$(k) \qquad I_n(v;\ k) + lv = 0, \qquad v = v(\xi):$$

wo $l \neq 0$, k Konstanten sind, im gewissen Intervall äquivalent ist.

Die Dgl. (k), für die $l = 0$ ist, ist eine iterierte Dgl. n — ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welcher nur eine iterierte Dgl. n — ter Ordnung, d. h. eine Dgl. n — ter Ordnung aus der Klasse C in einem geeigneten Intervall äquivalent sein kann. Mit den iterierten Dglen n — ter Ordnung haben sich Z. Hustý in einigen Arbeiten (siehe z. B. [3]) und V. Šeda in den Arbeiten [9, T. II.] und [10]) ausführlich beschäftigt.

Weil für die Dgl. (k) die absolute Invariante $B_n(\xi) \equiv \dfrac{3k}{(n+1)l^{2/n}} = K$ ist, wobei K eine Konstante ist, werden im Intervall I in die Klasse der Dgl. n — ter Ordnung des Geschlechtes 3, die eine Dgl. mit konstanten Koeffizienten enthält, die und nur die Dglen gehören, deren absolute Invariante identisch gleich einer Konstante ist. Darum ist es natürlich, die folgende Definition einzuführen.

Definition 4. *Wir werden sagen, dass die Dgl.* (a) *der Ordnung* $n = 2m - 1$ $[n = 2m)$, $m \geqq 2$, *zur Klasse* K_{2m-1} K^{I}_{2m}, $K^{\mathrm{II}}_{2m}]$ *im Intervall* I *gehört, wenn in* I *folgendes gilt*: $\vartheta_n(x) \neq 0$ $[\vartheta_n(x) > 0, \vartheta_n(x) < 0]$ $\vartheta_n(x) \in C_n(I)$, $b_n(x) \equiv K$, *wobei* K *eine Konstante ist.*

Es ist offensichtlich, dass im beliebigen Intervall I zur Klasse K_{2m-1}, K^{I}_{2m}, bzw. K^{II}_{2m} alle die Dglen der Form (k) mit konstanten Koeffizienten gehören, für welche: $k = \frac{1}{3}(n+1)Kl^{2/n}$, gilt wobei in der obenerwähnten Ordnung $l \neq 0$, $l > 0$, bzw. $l < 0$ ist. Darum ist es am geeignetsten als die Repräsentanten der einzelnen Klassen der Dglen in der obenangeführten Ordnung folgende Dglen zu wählen:

$$(K) \qquad I_{2m-1}\left(v; \frac{2m}{3} K\right) + v = 0,$$

$$(K^{\mathrm{I}}) \qquad I_{2m}\left(v; \frac{2m+1}{3} K\right) + v = 0, \quad \text{bzw.}$$

$$(K^{\mathrm{II}}) \qquad I_{2m}\left(v; \frac{2m+1}{3} K\right) - v = 0.$$

Auf Grund des Obenangeführten folgt aus dem Satz 1′ umgehend der.

Satz 2. *Die Dgl.* (a) *der Ordnung* $n = 2m - 1$ $[n = 2m]$ *gehört dann und* *nur dann zur Klasse* $K_{2m-1}\,[K^{\mathrm{I}}_{2m}, K^{\mathrm{II}}_{2m}]$ *im Intervall* $I = (a, b)$, $-\infty \leqq a < < b \leqq \infty$ *wenn:*

$$(K)I_0 \sim (a)I\ \{\xi(x)\}[(K^{\mathrm{I}})I_0 \sim (a)I\ \{\xi(x)\}, \quad (K^{\mathrm{II}})I_0 \sim (a)I\ \{\xi(x)\}],$$

gilt, wobei

$$(12) \qquad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt[n]{\vartheta_n(t)}\, \mathrm{d}t + c\, [\xi(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt[n]{|\vartheta_n(t)|}\, \mathrm{d}t + c], \quad x_0 \in I,$$

$$(13) \qquad t(x) = c_1 |\vartheta_n(x)|^{(1-n)/2n},$$

wobei $c_1 \neq 0$, c *Konstanten sind,*

$$(14) \qquad I_0 \equiv (\alpha, \beta), \quad bzw. \quad I_0 \equiv (\beta, \alpha),$$

wobei $\alpha = \xi(a)$, $\beta \equiv \xi(b)$ *ist.*

Bemerkung 3. In der Behauptung des Satzes 2 und auch im weiteren verstehen wir unter dem Symbol $\xi(a)$ bzw. $\xi(b)$ im Falle, dass a bzw. b eine uneigene Zahl ist, den Grenzwert in dieser Zahl, welcher ersichtlich immer, ob endlich oder unendlich existiert.

Der Satz 2 hat zwei Folgerungen:

Folgerung 1. *Die Dgl.* (a) *gehört dann und nur dann, zur Klasse* K_{2m-1}, K^{I}_{2m}, *bzw.* K^{II}_{2m} *im Intervall* I *wenn sie in diesem Intervall folgende Form*

$$(15) \quad I_n\left(y; \frac{n+1}{3}\left\{K[\vartheta_n(x)]^{2/n} + \left[\frac{1}{2n}\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]' - \left[\frac{1}{2n}\frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)}\right]^2\right\}\right) + \vartheta_n(x) y = 0$$

hat.

Bemerkung 4. Wenn man in die Dgl. (15) $\vartheta_n(x) = l[f(x)]^{n(\nu-1)}$, wobei $l \neq 0$, $\nu \neq 1$ Konstanten sind, $f(x) \in C_n(I)$, $f(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist, einsetzt, erhält man die Dgl.

$$I_n\left(y; \frac{n+1}{3}\left\{Kl^{2/n}[f(x)]^{2(\nu-1)} + \frac{(1-\nu^2)[f'(x)]^2 + 2(\nu-1)f''(x)}{4[f(x)]^2}\right\}\right) + $$
$$+ l\,[f(x)]^{n(\nu-1)} y = 0,$$

die sich durch die Transformation der Form (9), wo

$$\xi(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t)]^{\nu-1}\, \mathrm{d}t, \quad x_0 \in I, \quad t(x) = [f(x)]^{(\nu-1)(1-n)/2}$$

sind, auf die Dgl. (k) mit konstanten Koeffizienten, wobei $k = \dfrac{n+1}{3} K$ ist, übertragen lässt.

Folgerung 2. *Die Dgl.* (a) *gehört dann und nur dann zur Klasse* K_{2m-1} $[K_{2m}^{\mathrm{I}}, K_{2m}^{\mathrm{II}}]$ *im Intervall* I, *wenn sie in diesem Intervall ein Fundamentalsystem der Lösungen der Form*

$$y_i(x) = t(x)v_i[\xi(x)], \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

hat, wobei die Funktionen $v_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *ein Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl.* $(K)[(K^{\mathrm{I}}), (K^{\mathrm{II}})]$ *im Intervall* I_0 *bilden und* $\xi(x)$, $t(x)$, *bzw.* I_0 *durch die Beziehungen* (12), (13), *bzw.* (14) *bestimmt sind.*

3. In der Abhandlung [9] beschäftigt sich V. Šeda auch mit dem Studium von Beziehungen linearer Differentialoperatoren, die den äquivalenten Dglen zugehören. Wenn man die linke Seite der Dgl. (a) $L(D)y$ bezeichnet, wo $L(D)$ der betreffende lineare Differentialoperator n — ter Ordnung, $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist und $L(D_\xi)v$, $D_\xi = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$ die linke Seite der Dgl. (K), (K^{I}), bzw. (K^{II}) ist, kann man auf Grund der Resultate der Arbeit [9, Teil I.] folgende Behauptung beweisen.

Satz 3. *Die Dgl.* (a) *gehört dann und nur dann zur Klasse* $K_{2m-1}[K_{2m}^{\mathrm{I}}, K_{2m}^{\mathrm{II}}]$ *im Intervall* I, *wenn eine Faktorisierung*

$$\frac{1}{|\vartheta_n(x)|} L(D)y = \prod_{j=n}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|}} D - r_j + \frac{n-1}{2n} \frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)\sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|}} \right) y \tag{16}$$

in I *gilt, wo* r_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ *Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Dgl.* $(K)[(K^{\mathrm{I}}), (K^{\mathrm{II}})]$ *sind.*

Den Beweis geben wir für den Fall der Klasse K_{2m-1}, in den anderen zwei Fällen geht man analogisch vor.

Es gehöre die Dgl. (a) im Intervall I zur Klasse K_{2m-1}. Dann gilt nach dem Satz 2: $(K)I_0 \sim (a)I\{\xi(x)\}$, wobei $\xi(x)$, $t(x)$ und I_0 durch die Beziehungen (12)—(14) bestimmt sind. Weil für den der Dgl. (K) angehörigen Operator in I_0 eine symbolische Faktorisierung $L(D_\xi)v = \prod\limits_{j=n}^{1}(D_\xi - r_j)v$ gilt, wo r_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Dgl. (K) sind, gibt es nach dem Satz 9 der Arbeit [9, Teil I.] eine Faktorisierung des Operators

$$\frac{1}{|\vartheta_n(x)|} L(D)y = \prod_{j=n}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|}} D - f_j(x) \right) y, \tag{17}$$

wobei $L(D)y$ die linke Seite der Dgl. (a) ist, und zwar eine solche, dass

$$(18) \qquad (\dot{v}(\xi) - r_j v(\xi) = 0) I_0 \sim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|}} y' - f_j(x) y = 0 \right) I\{\xi(x)\},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

gilt, d. h. wenn $v(\xi)$ eine Lösung der Dgl. $\dot{v} - r_j v = 0$ in I_0 ist, dann ist $y(x) = c_1 |\vartheta_n(x)|^{(1-n)/2n} v(\int_{x_0}^{x} \sqrt[n]{|\vartheta_n(t)|} \mathrm{d}t + c)$, wobei $c_1 \neq 0$, c Konstanten sind, eine Lösung der Dgl. $\frac{1}{\sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|}} y' - f_j(x) y = 0$ im Intervall I. Daraus erhalten wir nach der Einsetzung statt des y und nach dem Vergleich: $f_j(x) = r_j - \frac{n-1}{2n} \frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x) \sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Nach der Einsetzung dieses Resultats in die Beziehung (17) erhalten wir die Faktorisierung (16).

Es gelte umgekehrt die Faktorisierung (16). Dann gilt für die durch die Beziehung (12) bestimmte Funktion $\xi(x)$ die Relation (18) und nach dem Satz 10 der Arbeit [9, Teil I.] gilt $(K) I_0 \sim (a) I\{\xi(x)\}$, was gemäss dem Satz 2 bedeutet, dass die Dgl. (a) im Intervall I zur Klasse K_{2m-1} gehört.

Bemerkung 5. Die Behauptung des Satzes 3 folgt ebenfalls aus dem Satz 3 der Arbeit [1], wenn wir uns dessen bewusst werden, dass die Dgl (a) aus der Klasse $K_{2m-1}[K_{2m}^{\mathrm{I}}, K_{2m}^{\mathrm{II}}]$ im Intervall I sich in diesem Intervall durch die Transformation der Form (9), wo $\xi(x)$, $t(x)$ durch die Beziehungen (12), (13) bestimmt sind, in die Gleichung (K) $[(K^{\mathrm{I}}), (K^{\mathrm{II}})]$ im Intervall I_0, der durch die Beziehung 14 bestimmt ist, transformiert.

Aus dem gleichen Beweisgrund gilt unmittelbar aus dem Satz 1 der Arbeit [1] der

Satz 4. *Die Dgl.* (a) *gehört dann und nur dann, im Intervall* I *zur Klasse* K_{2m-1} $[K_{2m}^{\mathrm{I}}, K_{2m}^{\mathrm{II}}]$ *wenn in* I *die Faktorisierung*

$$L(D)y = \prod_{j=n}^{1} \left[D - r_j \sqrt[n]{|\vartheta_n(x)|} + \frac{n - 2j + 1}{2n} \frac{\vartheta_n'(x)}{\vartheta_n(x)} \right] y$$

gilt, wobei $L(D)y$ *der der linken Seite der Dgl.* (a) *angehörige Differentialausdruck ist,* r_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ *sind Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Dgl.* $(K)[(K^{\mathrm{I}}), (K^{\mathrm{II}})]$.

4. Beschäftigen wir uns jetzt mit der Erörterung von oszillatorischen und

einigen asymptotischen Eigenschaften der Dglen n — ter Ordnung des Geschlechtes 3, die zu irgendeiner aus der Klassen K_{2m-1}, K_{2m}^{I}, K_{2m}^{II} im Intervall $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ gehören. Unter der Lösung der Dgl. werden wir nur eine nichttriviale Lösung verstehen. Die Lösung $y(x)$ werden wir *oszillatorisch* im Intervall I nennen, wenn sie in diesem Intervall eine unendliche Zahl von Nullstellen besitzt. Die Lösung, die in I höchstens eine endliche Zahl von Nullstellen hat, werden wir *nichtoszillatorisch* in I nennen und eine solche nichtoszillatorische Lösung der Dgl. n — ter Ordnung, die im Intervall I höchstens $n - 1$ Nullstellen einbegriffen der Vielfachheit hat, werden wir *diskonjugiert* in I nennen. Die Dgl. n — ter ($n \geqq 3$) Ordnung bezeichnen wir *diskonjugiert* [*nichtoszillatorisch, streng oszillatorisch*] im Intervall I. wenn alle ihre Lösungen in diesem Intervall diskonjugiert [nichtoszillatorisch, oszillatorisch] sind. Eine solche Dgl. n — ter Ordnung, die im Intervall I sowohl oszillatorische als auch nichtoszillatorische Lösungen hat, werden wir *oszillatorisch* im Intervall I nennen.

Bemerken wir, dass die begleitende Dgl. (sieh [3], [6], [9], [10]) der iterierten Dgl. n — ter Ordnung

$$I_n\left(v; \frac{n+1}{3} K\right) = 0 \tag{19}$$

die Dgl.

$$\ddot{v} + Kv = 0 \tag{20}$$

ist und erörtern wir zunächst den oszillatorischen Charakter der Lösungen der Dglen (K), (K^{I}) und (K^{II}) im Intervall $I_0^+ = (\alpha, \infty)$, $\alpha \geqq -\infty$, bzw. im Intervall $I_0^- = (-\infty, \beta)$, $\beta \leqq \infty$.

Es gilt:

Hilfssatz 2. *Es seien $m \geqq 2$ eine natürliche und $K \geqq 0$ eine reelle Zahl. Dann besteht:*

a) *Die Dgl. (K) ist in I_0^+ und in I_0^- oszillatorisch, wobei jede ihre Lösung, die wenigstens eine Nullstelle im Intervall I_0^+ besitzt, in diesem Intervall oszillatorisch ist.*

b) *Die Dgl. (K^{I}) ist im Intervall I_0^+ und im Intervall I_0^- streng oszillatorisch.*

Beweis. a) Für $K > 0$, ist die Dgl. (20) offenbar oszillatorisch im Intervall I_0^+ und im Intervall I_0^-. Gemäss Satz 3, Teil b) der Arbeit [4] ist dann im Intervall I_0^+ jede Lösung der Dgl. (K) oszillatorisch, welche in diesem Intervall zumindest eine Nullstelle hat.

Das kann offensichtlich nur dann sein, wenn die charakteristische Gleichung der Dgl. (K) eine einzige reelle Nullstelle besitzt, die negativ ist. Daraus folgt gleich, dass die Dgl. (K) im Intervall I_0^- ein Fundamentalsystem der

Lösungen hat, das aus $n - 1$ oszillatorischen Lösungen und aus einer einzigen nichtoszillatorischen Lösung besteht, d. i. die Dgl. (K) ist auch im Intervall I_0^- oszillatorisch.

b) Für die Dgl. (K^{I}) folgt im Falle $K > 0$ die Behauptung des Hilfssatzes aus dem Satz 3, Teil a) der Arbeit [4] für das Intervall I_0^+ und aus der Bemerkung 8 hinter diesem Satz für das Intervall I_0^-.

Im Falle $K = 0$ folgt die Behauptung der beiden Teile des Hilfssatzes aus der Tafel 1 der Arbeit [2], S. 226, die die Verteilung der Typen der Lösungen der binomischen Dgl. n — ter Ordnung $y^{(n)} = ky$ mit dem konstanten Koeffizienten gibt.

Hilfssatz 3. *Es seien $m \geqq 2$ eine natürliche und $K < 0$ eine reelle Zahl. Es seien $M_1 > 0$ das minimale und $M_2 \geqq M_1$ das maximale von den lokalen Maximen der Funktion*

$$f_n(r) = - r(r-1) \ldots (r-n+1) \tag{21}$$

im Intervall $\langle 0, n \rangle$, wo $n = 2m - 1$, bzw. $n = 2m$ eine natürliche Zahl ist. Dann besteht:

a) *Wenn $K \leqq -\frac{1}{4}M_1^{-2/(2m-1)}$ ist, ist die Dgl. (K) im Intervall I_0^+ $[I_0^-]$ diskonjugiert und die Menge aller ihrer Lösungen in diesem Intervall enthält einen m — dimensionalen ($(m-1)$ — dimensionalen) $[(m-1)$ — dimensionalen (m — dimensionalen)$]$ linearen Unterraum der Lösungen, die gegen Null für $\xi \to \infty$ $[\xi \to -\infty]$ streben, wenn m eine ungerade (gerade) Zahl und $K < -\frac{1}{4} M_1^{-2/(2m-1)}$ ist.*

b) *Wenn $K > -\frac{1}{4}M_1^{-2/(2m-1)}$ ist, ist die Dgl. (K) im Intervall I_0^+ $[I_0^-]$ oszillatorisch, wobei für $K > -\frac{1}{4}M_2^{-2/(2m-1)}$ jede ihrer Lösungen in diesem Intervall entweder oszillatorisch ist oder monoton zu Null konvergiert [entweder oszillatorisch oder unbegrenzt ist].*

c) *Wenn $K \leqq -\frac{1}{4}M_1^{-1/m}$ ist, ist die Dgl. (K^{I}) im Intervall I_0^+ $[I_0^-]$ diskonjugiert wobei im Falle $K < -\frac{1}{4}M_1^{-1/m}$ die Menge aller ihrer Lösungen in diesem Intervall einen m — dimensionalen linearen Unterraum der Lösungen enthält, die gegen Null für $\xi \to \infty$ $[\xi \to -\infty]$ streben.*

d) *Wenn $K > -\frac{1}{4}M_2^{-1/m}$ ist, ist die Dgl. (K^{I}) in beiden betrachteten Intervallen streng oszillatorisch.*

e) *Wenn $M_1 < M_2$ und $-\frac{1}{4}M_1^{-1/m} < K \leqq -\frac{1}{4}M_2^{-1/m}$ ist, ist die Dgl. (K^{I}) in den beiden betrachteten Intervallen oszillatorisch.*

Beweis. Erwägen wir die Dgl.

$$I_n\left(v; \frac{n+1}{3} K\right) + v = 0, \tag{22}$$

aus der man die Dgl. $(K)[(K^{\mathrm{I}})]$ für $n = 2m - 1$ $[n = 2m]$ erhält.

Durch eine einfache Berechnung überzeugen wir uns leicht, dass die absolute Invariante der Dgl.

$$z^{(n)} + \frac{1}{2^n(-K)^{n/2}\zeta^n} z = 0, \quad \zeta \in (0, \infty) \tag{23}$$

identisch gleich K ist, was nach der Definition 4 bedeutet, dass die Dgl. (23) auf jedem Teilintervall des Intervalls $(0, \infty)$ zur Klasse K_{2m-1} für $n = 2m - 1$ und zur Klasse K^{I}_{2m} für $n = 2m$ gehört. Darum gilt nach dem Satz 2 und nach dem Satz 1 der Arbeit [9, Teil I.]:

$$(23) \quad (\zeta_0, \infty) \sim (22) I_0^+\{\exp(2\sqrt{-K\xi})\}, \quad \text{wobei } \zeta_0 = \lim_{\xi \to \alpha+} \exp(2\sqrt{-K\xi}) \text{ ist,}$$

$$(23) \quad (0, \zeta_1) \sim (22) I_0^- \{\exp(2\sqrt{-K\xi})\}, \quad \text{wobei } \zeta_1 = \lim_{\xi \to \beta-} \exp(2\sqrt{-K\xi}) \text{ ist.}$$

Die charakteristische Gleichung der Dgl. (23) hat offensichtlich die Form

$$-f_n(r) + \frac{1}{2^n(-K)^{n/2}} = 0 \tag{24}$$

und man sieht leicht, dass folgendes gilt:

Wenn $2^{-n}(-K)^{-n/2} \leqq M_1$ ist, d. i. $K \leqq -\frac{1}{4}M_1^{-2/n}$ ist, sind alle Wurzeln der Gleichung (24) reell und dabei positiv für $n = 2m$ und im Falle $n = 2m - 1$ hat (24) eine einzige negative Wurzel und $n - 1$ positive Wurzeln

Wenn $2^{-n}(-K)^{-n/2} > M_2$ ist, d. i. $K > -\frac{1}{4}M_2^{-2/n}$ ist, hat die Gleichung (24) für $n = 2m$ keine reelle Wurzel und für $n = 2m - 1$ eine einzige reelle Wurzel, die negativ ist.

Wenn $M_1 < M_2$ und $M_1 < 2^{-n}(-K)^{-n/2} < M_2$ ist, d. i. $-\frac{1}{4}M^{-2/n} < K \leqq -\frac{1}{4}M_2^{-2/n}$, hat die Gleichung (24) einerseits reelle anderseits nichtreelle komplex konjugierte Wurzeln.

Aus den fundamentalen Eigenschaften der Äquivalenz der Dglen folgt, dass Funktionen

$$v_i(\xi) = \exp[(1-n)\sqrt{-K\xi}] z_i[\exp(2\sqrt{-K\xi})], \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{25}$$

ein Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl. (22) im Intervall $I_0^+[I_0^-]$ bilden, wenn $z_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ein Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl. (23) im Intervall $[(\zeta_0, \infty)\ (0, \zeta_1)]$ bedeuten.

Daraus folgen die Behauptungen des Hilfssatzes, wenn wir uns ausserdem (durch eine einfache Berechnung) überzeugen, dass der Graph der Funktion (21) für $n = 2m$ symmetrisch nach der Geraden $r = \frac{2m-1}{2}$ und für $n =$

$= 2m - 1$ symmetrisch nach dem Zentrum $[m - 1; 0]$ ist, was bedeutet, dass im Falle, wenn alle Wurzeln der Gleichung (24) reell und einfach sind, d. i. wenn $K < -\frac{1}{4}M_1^{-2/n}$ ist, gibt es für $n = 4p$, $4p + 1$, $4p + 2$, wobei $p \geqq 1$ eine natürliche Zahl ist, gerade $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ aus diesen Wurzeln, wo $[c]$ den ganzen Teil der Zahl c bedeutet, die kleiner als $\frac{n-1}{2}$ sind und die übrigen Wurzeln sind grösser als $\frac{n-1}{2}$. Im Falle $n = 4p - 1$, $p \geqq 1$, gibt es $2p - 1$ Wurzeln, die kleiner als $2p - 1$ sind, die übrigen Wurzeln sind grösser als diese Zahl.

Bemerkung 6. Man stellt leicht fest, dass für $n = 3$ $M_1 = M_2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ und für $n = 4$ $M_1 = M_2 = 1$ ist. Für $n \geqq 5$ gillt trotzdem — wie V. A. Kondratjev in der Arbeit [7] anführt — schon $M_1 < M_2$. Die Skizzen von Graphen der Funktion (21) für $n = 3, 4, 5, 6$ sind auf den Abbildungen 1—4.

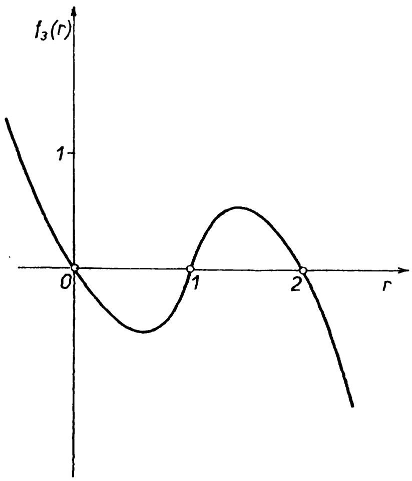

Abb. 1

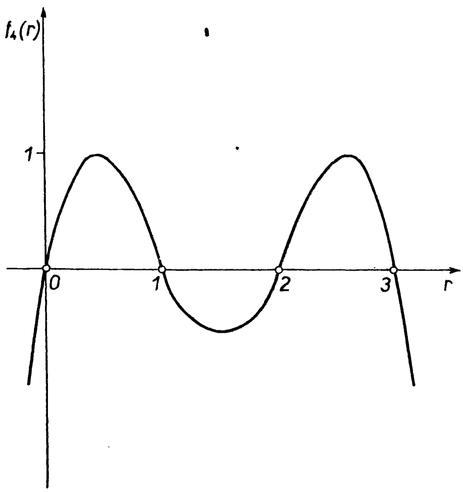

Abb. 2

Hilfssatz 4. *Es seien $m \geqq 2$ eine natürliche und $K \geqq 0$ eine reelle Zahl. Die Dgl. (K^{II}) ist im Intervall $I_0^+(I_0^-)$ dann und nur dann streng oszillatorisch, wenn $K > [(2m - 1)(2m - 3) \ldots 3.1]^{-2/m}$ ist.*

Wenn $0 \leqq K \leqq [(2m - 1)(2m - 3) \ldots 3.1]^{-2/m}$ ist, dann ist die Dgl. (K^{II}) im Intervall $I_0^+[I_0^-]$ oszillatorisch und hat ein Fundamentalsystem der Lösungen, *das aus $2m - 2$ oszillatorischen und zwei nichtoszillatorischen Lösungen besteht, wobei eine nichtoszillatorische Lösung für $\xi \to \infty[\xi \to -\infty]$ zu $\pm\infty$ divergiert, die andere gegen Null strebt (oder konstant ist).*

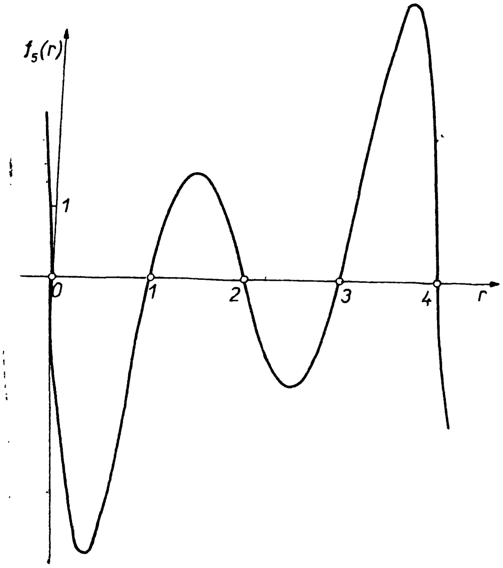

Abb. 3

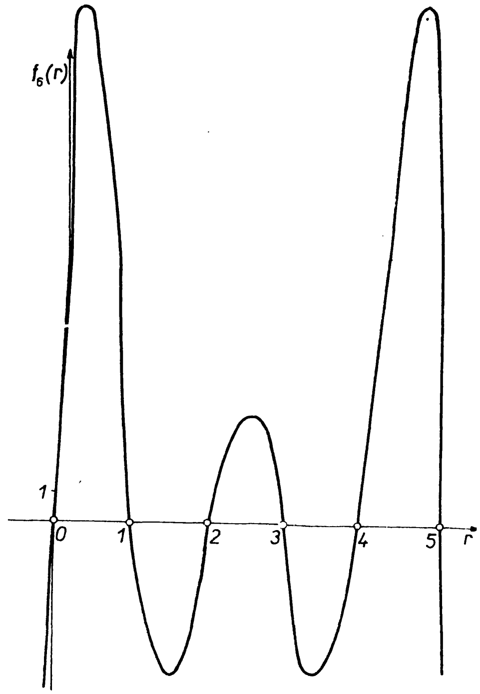

Abb. 4

Beweis. Im Falle $K > 0$ ist die Dgl. (20) oszillatorisch in $I_0^+(I_0^-)$. Offenbar gilt: $(u'' + u = 0)(-\infty, \infty) \sim (20)(-\infty, \infty)\{\sqrt{K}\xi\}$, wobei $u = u(x)$ ist. Wie man in der Arbeit [10] zeigt, ist die Dgl. $u'' + u = 0$ die begleitende Dgl. der iterierten Dgl. $2m$ — ter Ordnung

$$(26) \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} + (2m-1)^2\right]\left[\frac{d^2}{dx^2} + (2m-3)^2\right] \dots \left[\frac{d^2}{dx^2} + 3^2\right]\left[\frac{d^2}{dx^2} + 1^2\right] u = 0$$

und nach dem Satz 6 der Arbeit [9, Teil II.] ist die Dgl. (26) im Intervall $(-\infty, \infty)$ äquivalent einer iterierten Dgl. $2m$ — ter Ordnung

$$cK^{(2m-1)/4}\left[\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+(2m-1)^2\right]\left[\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+(2m-3)^2\right]\dots\left[\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+\right.$$

$$\left.+\,3^2\right]\left[\frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+1^2\right]v=0,$$

$c \neq 0$ ist eine Konstante, im Intervall $(-\infty, \infty)$. Die begleitende Dgl. der letzten Dgl. ist die Dgl. (20). Wenn man speziell $c = K^{(2m+1)/4}$ wählt, erhält man die Dgl. (19) in der Form

$$\text{(19')}\qquad \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+(2m-1)^2K\right]\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+(2m-3)^2K\right]\dots\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+3^2K\right]\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}+\right.$$

$$\left.+\,1^2K\right]v=0.$$

Die charakteristische Gleichung der Dgl. (K^{II}) lässt sich darum in der Form

$$[r^2+(2m-1)^2K][r^2+(2m-3)^2K]\dots[r^2+3^2K][r^2+1^2K]-1=0$$

schreiben, aus der ersichtlich ist, dass sie ungleich Null ist und dabei positiv nur Koeffizienten bei den geraden Potenzen r hat, woraus nach dem Descarts satz über die Anzahl der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichung folgt, dass sie höchstens entweder zwei verschiedene einfache reelle Wurzeln (davon eine positiv, die andere negativ) oder eine zweifache reelle Wurzel (Null) dann und nur dann haben kann, wenn für ihr absolutes Glied

$$[(2m-1)(2m-3)\dots 3.1]^2K^m-1 \leqq 0$$

gilt, d. i. $0 < K \leqq [(2m-1)(2m-3)\dots 3.1]^{-2/m}$. Im Falle $K > [(2m-$ $-1)(2m-3)\dots 3.1]^{2/m}$ hat die charakteristische Gleichung der Dgl. (K^{II}) offensichtlich nur komplex konjugierte nichtreelle Wurzeln.

Im Falle $K = 0$ folgt die Behauptung des Hilfssatzes wieder aus der Tafel 1 auf Seite 226 der Arbeit [2].

Hilfssatz 5. *Es seien $m \geqq 2$ eine natürliche und $K < 0$ eine reelle Zahl. Es seien $\mu_2 < 0$ das maximale und $\mu_1 \leqq \mu_2$ das minimale aus den lokalen Minimen der Funktion*

$$\text{(21)}\qquad f_{2m}(r) = -r(r-1)\dots(r-2m+1)$$

im Intervall $\langle 0,2m\rangle$. Dann besteht:

a) *Wenn $K \leqq -\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m}$, ist die Dgl. ($K^{\mathrm{II}}$) im Intervall $I_0^+[I_0^-]$ diskonjugiert, wobei im Falle $K < -\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m}$ die Menge aller ihrer Lösungen in diesem Inter-*

vall einen m — dimensionalen linearen Unterraum der Lösungen, die gegen Null für $\xi \to \infty[\xi \to -\infty]$ streben, enthält.

b) *Wenn $K > -\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m}$, ist die Dgl. (K^{II}) im Intervall $I_0^+[I_0^-]$ oszillatorisch und im Falle $K > -\frac{1}{4}|\mu_1|^{-1/m}$ hat sie in diesem Intervall ein Fundamentalsystem der Lösungen, das aus $2m - 2$ oszillatorischen und zwei nichtoszillatorischen Lösungen besteht, wobei für $\xi \to \infty$ $[\xi \to -\infty]$ eine nichtoszillatorische Lösung gegen Null strebt, die andere zu $\pm\infty$ divergiert.*

Beweis. Die Dgl.

$$z^{(2m)} - \frac{1}{4^m(-K)^m\zeta^{2m}} z = 0, \qquad \zeta \in (0, \infty) \tag{27}$$

gehört offenbar zur Klasse K_{2m}^{II} in jedem Teilintervall des Intervalls $(0, \infty)$ und es zeigt sich durch den analogischen Weg wie im Hilfssatz 3, dass es gilt:

$$(27)\ (\zeta_0, \infty) \sim (K^{\mathrm{II}})I_0^+\{\exp 2\sqrt{-K\,\xi}\}, (27)\ (0, \zeta_1) \sim (K^{\mathrm{II}})I_0^-\{\exp(2\sqrt{-K\xi})\}.$$

Die charakteristische Gleichung der Dgl. (27) ist offensichtlich die Gleichung

$$f_{2m}(r) + 4^{-m}(-K)^{-m} = 0.$$

Weil das Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl. (K^{II}) im Intervall $I_0^+[I_0^-]$ wieder durch die Beziehung (25) bestimmt ist, wobei $n = 2m$ ist und $z_i(\zeta)$, $i = 1, 2, \ldots, 2m$ ein Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl. (27) im Intervall $(\zeta_0, \infty)[(0, \zeta_1)]$ bilden, erhält man die Behauptung des Hilfssatzes 5 durch die analogischen Betrachtungen wie die Behauptung des Hilfssatzes 3.

Bemerkung 7. Wieder stellt man leicht fest, dass für $n = 4$ $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{9}{16}$ ist. Für die geraden $n \geqq 8$ ist dagegen schon $\mu_1 < \mu_2$ (sieh wieder [7]).

Bemerkung 8. Aus der Behauptung des Satzes 2 folgt offenbar, dass der oszillatorische Charakter der Lösungen der Dgl. (a), die zur Klasse K_{2m-1}, K_{2m}^{I}, bzw. K_{2m}^{II}, gehört, in einem überwiegenden Masse davon abhängig sein wird, ob das Integral

$$\int_a^\infty |\vartheta_n(t)|^{1/n}\, dt \tag{28}$$

konvergiert oder divergiert. Im Falle der Konvergenz dieses Integrals bildet nämlich die erste Komponente $\xi(x)$ des Trägers der Äquivalenz das Interval $I = (a, \infty)$ auf das Intervall (α, β) einer endlichen Länge ab, auf dem jede Dgl. aus den Dglen (K), (K^{I}), (K^{II}) höchstens eine endliche Anzahl von Nullstellen hat. In diesem Falle ist es also die Dgl. (a), die zur beliebigen aus den vorstehenden Klassen im Intervall I gehört, nichtoszillatorisch in diesem Intervall, aber sie muss nicht in I diskonjugiert sein, wie ein folgendes einfaches Beispiel der Dgl. der dritten Ordnung zeigt. Die Dgl.

$$y''' + \frac{16^3}{x^6} y = 0 \tag{29}$$

gehört im Intervall $I = (1, \infty)$, wie man leicht feststellt, zur Klasse $K_3 = 0$. Es gilt doch: $(\dddot{v} + v = 0)\ (-8; 8) \sim (29)I \left\{-\frac{16}{x} + 8\right\}$ und die allgemeine Lösung der Dgl. (29) ist im Intervall I die Funktion $y(x) = C_1 x^2 \exp \frac{16}{x} +$

$$+ x^2 \exp\left(-\frac{8}{x}\right)\left[C_2 \cos\left(\sqrt{3}\,\frac{4x-8}{x}\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{3}\,\frac{4x-8}{x}\right)\right].$$

Man stellt leicht fest, dass z. B. die partikuläre Lösung

$$y(x) = x^2 \exp\left(-\frac{8}{x}\right) \sin\left(\sqrt{3}\,\frac{4x-8}{x}\right)$$

im Intervall I fünf Wurzeln hat.

Umgekehrt kann die Dgl. (a), die zu irgendeiner aus den vorstehenden Klassen auf dem begrenzten Intervall (a, b) gehört, in diesem Intervall oszillatorisch bzw. streng oszillatorisch sein, wenn das Integral $\int_a^b |\vartheta_n(t)|^{1/n}\, dt$ divergiert.

Es seien $0 < M_1 \leqq M_2$ das minimale, bzw. das maximale aus den lokalen Maximen der Funktion (21) für $n = 2m - 1$ [$n = 2m$] im Intervall $\langle 0; 2m - 1\rangle$ [$\langle 0; 2m\rangle$]. Aus der Folgerung 2 des Satzes 2, aus den Hilfssätzen 2 und 3 und aus der Bemerkung 8 folgen unmittelbar diese Behauptungen:

Satz 5. *Wenn die Dgl.* (a) *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ *zur Klasse* K_{2m-1} *gehört, dann besteht:*

a) *für* $K \leqq -\frac{1}{4}M_1^{-2/(2m-1)}$ *ist sie in* I *diskonjugiert*;

b) *für* $K > -\frac{1}{4}M_1^{-2/(2m-1)}$ *und das Integral* (28) *konvergiert, ist sie in* I *nichtoszillatorisch*;

c) *wenn das Integral* (28) *divergiert und* $K > -\frac{1}{4}M_1^{-2/(2m-1)}$ *ist, ist sie in* I *oszillatorisch, wobei sie im Falle* $K > -\frac{1}{4}M_2^{-2/(2m-1)}$ *und* $\vartheta_{2m-1}(x) > 0$ *in* I, *in* I *eine einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) Lösung ohne Nullstellen hat und im Falle* $K > -\frac{1}{4}M_2^{-2/(2m-1)}$ *und* $\vartheta_{2m-1}(x) < 0$ *die Menge ihrer oszillatorischen Lösungen im Intervall* I *ein* $2(m - 1)$ — *parametrisches System bildet.*

Satz 6. *Wenn die Dgl.* (a) *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ *zur Klasse* K_{2m}^{I} *gehört, dann besteht*:

a) *wenn* $K \leqq -\frac{1}{4}M_1^{-1/m}$, *ist sie in* I *diskonjugiert*;

b) *wenn das Integral* (28) *konvergiert und* $K > -\frac{1}{4}M_1^{-1/m}$, *ist sie in* I *nichtoszillatorisch*;

c) *wenn das Integral* (28) *divergiert und* $-\frac{1}{4}M_1^{-1/m} < K \leqq -\frac{1}{4}M_2^{-1/m}$, *ist sie in* I *oszillatorisch*;

d) *wenn das Integral* (28) *divergiert und* $K > -\frac{1}{4}M_2^{-1/m}$, *ist sie in* I *streng oszillatorisch.*

Bemerkung 9. Mit Rücksicht auf die Bemerkung 6 ist der Satz 5 eine Verallgemeinerung des für die Dgl. $(\overline{10})$ in der Arbeit [8] bewiesenen Satzes 1, 4 und der Satz 6 eine Verallgemeinerung des ersten Teils des für die Dgl. (11) in der Arbeit [8] bewiesenen Satzes 2, 6.

Es seien $\mu_1 \leqq \mu_2 < 0$ in der angegebenen Ordnung das minimale, bzw. das maximale aus den lokalen Minimen der Funktion (21) für $n = 2m$ im Intervall $\langle 0; 2m \rangle$. Aus der Folgerung 2 des Satzes 2, aus den Hilfssätzen 4 und 5 und aus der Bemerkung 8 folgt unmittelbar der

Satz 7. *Wenn die Dgl.* (a) *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$, *zur Klasse* K_{2m}^{II} *gehört, dann besteht*:

a) *wenn* $K \leqq -\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m}$, *ist sie in* I *diskonjugiert*;

b) *wenn das Integral* (28) *konvergiert und* $K > -\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m}$, *ist sie in* I *nichtoszillatorisch*;

c) *wenn das Integral* (28) *divergiert und* $K > [(2m-1)(2m-3)\ldots 3.1]^{-2/m}$, *ist sie in* I *streng oszillatorisch*;

d) *wenn das Integral* (28) *divergiert und* $-\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m} < K \leqq [(2m-1)(2m-3)\ldots 3.1]^{-2/m}$, *ist sie in* I *oszillatorisch, wobei im Falle, wenn* $-\frac{1}{4}|\mu_1|^{-1/m} < K$ *ist, sie in* I *ein Fundamentalsystem der Lösungen hat, das aus* $2(m-1)$ *oszillatorischen und zwei nichtoszillatorischen Lösungen besteht.*

Bemerkung 10. Mit Rücksicht auf die Bemerkung 7 ist der Satz 7 eine Verallgemeinerung des zweiten Teils des für die Dgl. (11) in der Arbeit [8] bewiesenen Satzes 2,6.

In der Abhandlung [8] wurden auch einige asymptotische Eigenschaften der Lösungen der zur Klasse K_{2m-1} für $m = 2$ gehörigen Dglen erörtert. Davon sprechen die Sätze 1,6 und 1,7 der zitierten Arbeit, die sich für den allgemeinen Fall durch folgende Weise erweitern lassen:

Satz 8. *Die Dgl.* (a) *gehöre zur Klasse* K_{2m-1} *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ *und es divergiere das Integral* (28). *Die Funktion* $\vartheta_{2m-1}(x)$ *sei begrenzt im Intervall* I *und* $\lim\limits_{x\to\infty} \vartheta_{2m-1}(x)$ *sei (wenn sie existiert) verschieden von Null. Dann besteht*:

a) *Wenn* $K > -\frac{1}{4}M_2^{-2/(2m-1)}$ *und* $\vartheta_{2m-1}(x) > 0$ $[\vartheta_{2m-1}(x) < 0]$ *ist, strebt ihre einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) Lösung ohne Nullstellen gegen Null für* $x \to \infty$ *[ist jede ihre nichtoszillatorische Lösung unbegrenzt in* I*].*

b) *Wenn* $K < -\frac{1}{4}M_1^{-2/(2m-1)}$ *und* $\vartheta_{2m-1}(x) > 0$ $[\vartheta_{2m-1}(x) < 0]$ *ist, enthält die Menge aller ihrer Lösungen in diesem Intervall einen* m *— dimensionalen ((*$m-1$*) — dimensionalen) [(*$m-1$*) — dimensionalen (*m *— dimensionalen)] linearen Unterraum der Lösungen, die gegen Null für* $x \to \infty$ *streben, wenn* m *eine ungerade (gerade) Zahl ist.*

Wenn ausser den vorher angeführten Voraussetzungen im Intervall I *alle Ableitungen* $\vartheta_{2m-1}^{(j)}(x)$, $1 \leqq j \leqq k \leqq 2m-1$ *begrenzt sind, dann konvergieren mit jeder nichtoszillatorischen Lösung der Dgl. (a), welche für* $x \to \infty$ *zu Null konvergiert, auch alle Ableitungen dieser Lösung bis an die k-te Ordnung inklusive zu Null.*

Beweis. Nach der Folgerung 2 des Satzes 2 hat das Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl. (a), die zur Klasse K_{2m-1} im Intervall I gehört, die Form

$$(30) \qquad y_i(x) = |\vartheta_{2m-1}(x)|^{-(m-1)/(2m-1)} v_i\Big(\int_{x_0}^{x} [\vartheta_{2m-1}(t)]^{1/(2m-1)}\, dt + c\Big),$$

c — eine Konstante, $i = 1, 2, \ldots, 2m-1$, wo $v_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, 2m-1$ ein Fundamentalsystem der Lösungen der Dgl. (K) im Intervall $I_0^+[I_0^-]$, das durch die Beziehung (14) bestimmt ist, bilden, wenn $\vartheta_{2m-1}(x) > 0$ $[\vartheta_{2m-1}(x)$ das durch die Beziehung (14) bestimmt ist, bilden, wenn $\vartheta_{2m-1}(x) > 0$ $[\vartheta_{2m-1}(x) < 0]$ ist. Die Behauptungen a) und b) des Satzes 8 folgen unmittelbar aus den Hilfssätzen 2 und 3.

Die gegen Null für $x \to \infty$ strebende nichtoszillatorische Lösung der Dgl. (a), die zur Klasse K_{2m-1} im Intervall I eghört, lässt sich im Falle $\vartheta_{2m-1}(x) > 0$ $[\vartheta_{2m-1}(x) < 0]$ als eine lineare Kombination der Lösungen des Fundamentalsystems (30), für die $v_i(\xi) = \exp(r_i\xi)$ ist, wobei r_i eine negative [positive] Wurzel der charakteristischen Gleichung der Dgl. (K) ist, schreiben. Für die Lösung

$$y(x) = [\vartheta_{2m-1}(x)]^{-(m-1)/(2m-1)} \exp\Big(r\int_{x_0}^{x} [\vartheta_{2m-1}(t)]^{1/(2m-1)}\, dt\Big)$$

gilt

$$y^{(j)}(x) = [\vartheta_{2m-1}(x)]^{-[(1+2j)m-1-j]/(2m-1)} \Phi[\vartheta_{2m-1}(x), \vartheta'_{2m-1}(x), \ldots,$$
$$\vartheta_{2m-1}^{(j)}(x)] \exp\Big(r\int_{x_0}^{x} [\vartheta_{2m-1}(t)]^{1/(2m-1)}\, dt\Big),$$

$j = 1, 2, \ldots, k$, wo $\Phi[\vartheta_{2m-1}(x), \vartheta'_{2m-1}(x), \ldots, \vartheta_{2m-1}^{(j)}(x)]$ ein Polynom der Veränderlichen $[\vartheta_{2m-1}(x)]^{1/(2m-1)}$, $\vartheta'_{2m-1}(x), \ldots, \vartheta_{2m-1}^{(j)}(x)$ ist, wie man leicht durch die mathematische Induktion zeigt. Daraus folgt schon unmittelbar der letzte Teil der Behauptung des Satzes.

Von einigen asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der Dgl. (a) die zur Klasse K^{I}_{2m}, bzw. K^{II}_{2m} im Intervall I gehört, sagt der

Satz 9. *Es gehöre die Dgl.* (a) *zur Klasse* K^{I}_{2m} [K^{II}_{2m}] *im Intervall* $I = (a, \infty)$, $a \geqq -\infty$ *und es divergiere das Integral* (28). *Es sei die Funktion* $\vartheta_{2m}(x)$ *in* I *begrenzt und* $\lim\limits_{x \to \infty} \vartheta_{2m}(x)$ *(wenn sie existiert) verschieden von Null. Dann besteht:*

a) *Wenn* $K < -\frac{1}{4}M_1^{-1/m}$ [$K < -\frac{1}{4}|\mu_2|^{-1/m}$] *ist, enthält die Menge aller ihrer Lösungen im Intervall* I *einen* m — *dimensionalen linearen Unterraum der Lösungen, die gegen Null für* $x \to \infty$ *streben.*

b) *Wenn* $-\frac{1}{4}|\mu_1|^{-1/m} < K < [(2m-1)(2m-3)\ldots 3.1]^{-2/m}$ *ist, hat die Dgl.* (a), *die zur Klasse* K^{II}_{2m} *im Intervall* I *gehört, eine einzige (bis auf die lineare Abhängigkeit) Lösung ohne Nullstellen, die gegen Null für* $x \to \infty$ *strebt und jede weitere nichtoszillatorische Lösung dieser Dgl. ist in* I *unbegrenzt.*

Wenn ausser den vorstehenden Voraussetzungen auch alle Ableitungen $\vartheta^{(j)}_{2m}(x)$, $1 \leqq j \leqq k \leqq 2m$ *im Intervall* I *begrenzt sind, dann streben alle Ableitungen bis an die* k*-te Ordnung inklusive jeder nichtoszillatorischen Lösung der Dgl.* (a), *die gegen Null für* $x \to \infty$ *strebt, auch gegen Null für* $x \to \infty$.

Beweis. Die ersten zwei Behauptungen des Satzes gehen wieder aus der Folgerung 2 des Satzes 2 und aus den Hilfssätzen 2, 3, 4, 5 hervor. Der letzte Teil der Behauptungen des Satzes wird analogischer Weise wie beim Satz 8 bewiesen.

LITERATUR

[1] БЕРКОВИЧ, Л.М.: О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами. II. Изв. высших учеб. заведений, Математика, 1967, 3—14.

[2] GRENSTED, P. E. W.: Some solutions of a nonlinear differential equation of high order. Quart. Appl. Math., *24,* 1966, 225—238.

[3] HUSTÝ, Z.: Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, 1964, No 449, 23—56.

[4] ГУСТЫ, З.: Некоторые колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения n-того порядка ($n \geqq 3$). Чехосл. матем. ж., *14*(89), 1964,27—36.

[5] HUSTÝ, Z.: Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. I. Teil, Czechosl. Math. J., *15* (90), 1965, 479—502; II. Teil, Czechosl. Math. J., *16* (91), 1966, 1—13; III. Teil, Czechosl. Math. J., *16* (91), 1966, 161—180.

[6] HUSTÝ, Z.: Perturbierte homogene lineare Differentialgleichungen. Časop. pěstov. mat., *91,* 1966, 154—166.

[7] КОНДРАТЬЕВ, В. А.: О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ Тр Моск. матем. общества, *10*, 1961, 419—436.

[8] MORAVČÍK, J.: Über die Äquivalenz linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung ($n = 3,4$). Mat. časop., 19, 1969, 17—42.

[9] ŠEDA, V.: Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. I. Teil, Časop. pěstov. mat., *90*, 1965, 385—412; II. Teil, Časop. pěstov. mat., *92*, 1967, 418—433.

[10] ŠEDA, V.: On a class of linear differential equations of order n, $n \geqq 3$. Časop. pěstov. mat., *92*, 1967, 247—259.

Eingegangen am 30. 1. 1970

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Fakulty strojno-elektrotechnickej Vysokej školy dopravnej
Žilina