IMRICH STARÍČEK

# ROVINNÁ VLNA SVETELNÁ V NEVODIVOM PROSTREDÍ TOTÁLNE ANIZOTROPNOM

Teória elektromagnetického vlnenia v prostredí anizotropnom, vybudovaná Maxwellom a Fresnelom predpokladá, že v anizotropnom prostredí platia okrem Maxwellových rovníc medzi vektormi elektromagnetického poľa tieto vzťahy:

$$\mathfrak{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \,.\, \mathfrak{E}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}; \tag{2}$$

$\mathfrak{D}$ je vektor elektrickej indukcie, $\mathfrak{E}$ vektor elektrickej intenzity, $\mathfrak{B}$ vektor magnetickej indukcie, $\mathfrak{H}$ vektor magnetickej intenzity a $\overline{\overline{\varepsilon}}$ je symetrický tenzor dielektrický. Rozborom Maxwellových rovníc možno ukázať, že v anizotropnom prostredí v tomže smere danom jednotkovým vektorom $\mathfrak{n}$ môže rovinná vlna postupovať s dvoma rôznymi rýchlosťami.

Vo svojej predošlej práci o tomto probléme uvedenej nižšie v literatúre vyšetroval som rovinnú svetelnú vlnu v prostredí totálne anizotropnom, v ktorom platia vzťahy

$$\mathfrak{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \,.\, \mathfrak{E}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{B} = \overline{\overline{\mu}} \,.\, \mathfrak{H}, \tag{4}$$

kde $\overline{\overline{\mu}}$ je symetrický tenzor magnetickej permeability.

Vektory elektromagnetického poľa príslušné rovinnej elektromagnetickej vlne o vlnovej normále $\mathfrak{n}$, v tomto prostredí splňujú rovnice

$$\mathfrak{B} = \frac{c}{v}\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{c}{v}\, \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}, \tag{6}$$

kde $c$ je rýchlosť svetla vo vákuu a $v$ rýchlosť postupu rovinnej vlny v danom prostredí daným smerem. Rýchlosť $v$ ako funkcia smeru je pritom určená koreňmi kvadratickej rovnice, ktorú pre elektricky anizotropné prostredie odvodil už Fresnel.

Zo vzťahov (5) (6) užitím vzťahov (3) a (4) vyplýva bezprostredne rovnica, odvodená v citovanej práci:

$$\left(\frac{v^2}{c^2}\overline{\overline{\varepsilon}} + \mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1}\times\mathfrak{n}\right) . \mathfrak{E} = 0. \tag{7}$$

Keďže v svetelnej vlne $\mathfrak{E}$ nemôže byť stále rovné nule, rovnica (7) hovorí, že tretí skalár (determinant súradníc) tenzoru

$$\mathbf{T} = \frac{v^2}{c^2}\overline{\overline{\varepsilon}} + \mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1}\times\mathfrak{n}$$

je rovný nule. V citovanej práci som z tejto podmienky určil rýchlosť postupu rovinnej vlny explicitne iba pre ten prípad, že oba tenzory $\overline{\overline{\varepsilon}}$ a $\overline{\overline{\mu}}$ sú súosé (súosá anizotropia), t. j. keď platí

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\varepsilon}} &= \varepsilon_1\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \varepsilon_2\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \varepsilon_3\,\mathfrak{k}\mathfrak{k},\\ \overline{\overline{\mu}} &= \mu_1\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mu_2\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mu_3\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}.\end{aligned} \tag{8}$$

V tomto prípade rýchlosť svetla, príslušná rovinnej vlne o vlnovej normále

$$\mathfrak{n} = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\beta\,\mathfrak{j} + \cos\gamma\,\mathfrak{k},$$

je určená rovnicou

$$\begin{aligned} v^4 - v^2\left[\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_2\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\mu_2}\right) + \cos^2\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_3\mu_1}+\frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}\right) + \cos^2\gamma\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_2}+\frac{1}{\varepsilon_2\mu_1}\right)\right] + \\ + \left(\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_2\varepsilon_3}+\frac{\cos^2\beta}{\varepsilon_3\varepsilon_1}+\frac{\cos^2\gamma}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right) . \left(\frac{\cos^2\alpha}{\mu_2\mu_3}+\frac{\cos^2\beta}{\mu_3\mu_1}+\frac{\cos^2\gamma}{\mu_1\mu_2}\right) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

v ktorej miesto $\frac{v}{c}$ píšeme len $v$ ($v$ značí potom rýchlosť meranú, v jednotke rýchlosti svetla vo vakuu).

V tejto práci budeme sa zaoberať rovinnou svetelnou vlnou v prostredí totálne anizotropnom pri obecnej vzájomnej polohe tenzorov $\overline{\overline{\varepsilon}}$ a $\overline{\overline{\mu}}$.

Upravíme si najprv rovnicu (7), ktorú píšeme teraz vo tvare

$$(v^2\overline{\overline{\varepsilon}} + \mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1}\times\mathfrak{n}) . \mathfrak{E} = 0.$$

Dosadením z rovnice (3) dostávame

$$[v^2\,\mathbf{I} + (\mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1}\times\mathfrak{n})\,.\,\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}]\,.\,\mathfrak{D} = 0,$$

kde $\mathbf{I}$ je tenzor identity. Poslednú rovnicu môžeme pisať aj vo tvare

$$\{v^2\,\mathbf{I} + [(\mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1})\times\mathfrak{n}]\,.\,\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}\}\,.\,\mathfrak{D} = 0$$

a z toho trivektorovou zámenou

$$[v^2\,\mathbf{I} + (\mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1})\,.\,(\mathfrak{n}\times\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1})]\,.\,\mathfrak{D} = 0. \tag{10}$$

Keďže vo svetelnej vlne $\mathfrak{D}$ nemôže byť stále rovné nule, rovnica (10) hovorí, že tretí skalár tenzoru $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = v^2\,\mathbf{I} + (\mathfrak{n}\times\overline{\overline{\mu}}^{-1})\,.\,(\mathfrak{n}\times\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}), \tag{11}$$

rovná sa nule. Keďže však tenzor $\mathbf{T}$ vystupujúci v rovnici (7) je s tenzorom $\mathbf{U}$ vo vzťahu $\mathbf{T} = \mathbf{U}\,.\,\overline{\overline{\varepsilon}}$ a $\overline{\overline{\varepsilon}}$ je tenzor neplanárny, je táto podmienka identická s podmienkou vyjadrenou rovnicou (7).

Tretí skalár tenzoru $\mathbf{U}$ určíme v ortogonálnom súradnom systéme jednotkových vektorov $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ a $\mathfrak{x}_3$, v ktorom sú tenzory $\overline{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\overline{\mu}}$, $\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}$ a $\overline{\overline{\mu}}^{-1}$ dané v složkách

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{jk}\,\mathfrak{x}_j\,\mathfrak{x}_k, \qquad \overline{\overline{\mu}} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\mu_{jk}\,\mathfrak{x}_j\,\mathfrak{x}_k,$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}A_{jk}\,\mathfrak{x}_j\,\mathfrak{x}_k, \qquad \overline{\overline{\mu}}^{-1} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}M_{jk}\,\mathfrak{x}_j\,\mathfrak{x}_k,$$

kde $A_{jk}$ je rovné minoru prvku $\varepsilon_{kj}$ v determinante súradníc tenzoru $\overline{\overline{\varepsilon}}$,

$$A = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

delenému jeho hodnotou $A$ a podobne $M_{jk}$ je rovné minoru prvku $\mu_{kj}$ v determinante

$$M = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

delenému jeho hodnotou $M$.

Tenzory $\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}$ a $\overline{\overline{\mu}}^{-1}$ sú tiež tenzory symetrické.

Vektor vlnovej normály nech je $\mathfrak{n}$,

$$\mathfrak{n} = \sum_{j=1}^{3} n_j\,\mathfrak{x}_j.$$

Ak píšeme $\qquad \overline{\overline{\mu}}^{-1} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{M}_2 \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{M}_3 \mathfrak{x}_3,$

vektorový súčin $\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1}$ s využitím symetričnosti tenzora $\overline{\overline{\mu}}^{-1}$ môžeme písať vo tvare determinantu

$$\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{x}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \mathfrak{M}_1 & \mathfrak{M}_2 & \mathfrak{M}_3 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

kde je

$$\mathfrak{M}_k = \sum_{j=1}^{3} M_{kj} \mathfrak{x}_j \tag{15}$$

a súčiny $\mathfrak{x}_i \mathfrak{M}_k$ sú dyadické.

Rozvojom determinantu (14) dostávame najprv

$$\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1} = \sum_{l=1}^{3*} \mathfrak{x}_l \begin{vmatrix} n_{l+1}, & n_{l+2} \\ \mathfrak{M}_{l+1}, & \mathfrak{M}_{l+2} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

kde hviezdička v znaku $\overset{3*}{\Sigma}$ bude značiť, že vo výsledku treba upraviť indexy kongruentne modulo 3 (t. j., že od indexu vyššieho ako 3 odčítame celé číslo typu $3n$, kde $n = 1, 2 \ldots$ tak, aby indexom bolo vždy jedno z čísel 1, 2, 3).

Dosadením z (15) do (16) dostávame

$$\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1} = \sum_{l=1}^{3*} \sum_{j=1}^{3} \begin{vmatrix} n_{l+1}, & n_{l+2} \\ M_{l+1,j}, & M_{l+2,j} \end{vmatrix} \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_j \tag{17}$$

a podobne

$$\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1} = \sum_{i=1}^{3*} \sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} n_{i+1}, & n_{i+2} \\ A_{i+1,k}, & A_{i+2,k} \end{vmatrix} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k. \tag{18}$$

Keďže skalárny súčin tenzoru $\mathbf{A} = \sum_i \sum_k a_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k$ s tenzorom $\mathbf{B} = \sum_i \sum_k b_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_l \sum_k \sum_s a_{ls} b_{sk} \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_k,$$

skalárny súčin tenzorov (17) a (18) je daný sumáciou

$$(\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1}) \cdot (\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}) = \sum_{l=1}^{3*} \sum_{k=1}^{3*} \sum_{s=1}^{3*} \begin{vmatrix} n_{l+1}, & n_{l+2} \\ M_{l+1,s}, & M_{l+2,s} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_{s+1}, & n_{s+2} \\ A_{s+1,k}, & A_{s+2,k} \end{vmatrix} \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_k.$$

Tenzor $\mathbf{U}$ (11) možno teda písať

$$\mathbf{U} = \sum_{l=1}^{3*} \sum_{k=1}^{3*} d_{lk} \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_k + v^2 \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_i,$$

kde sme označili

$$d_{lk} = \sum_{s=1}^{3*} \begin{vmatrix} n_{l+1}, & n_{l+2} \\ M_{l+1,s}, & M_{l+2,s} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_{s+1}, & n_{s+2} \\ A_{s+1,k}, & A_{s+2,k} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Rozvedením sumácie v (19) dostávame

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{21} & M_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{21} & A_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{22} & M_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{31} & A_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ A_{11} & A_{21} \end{vmatrix} \\
d_{12} &= \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{21} & M_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{22} & A_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{22} & M_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{32} & A_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} \qquad (20) \\
d_{13} &= \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{21} & M_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{22} & M_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{33} & A_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ostatné členy $d_{ik}$ dostaneme z týchto cyklickou zámenou $1 \to 2 \to 3 \to 1$, napr.

$$
\begin{aligned}
d_{22} &= \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{32} & M_{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{32} & A_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{33} & M_{13} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{31} & M_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{22} & A_{32} \end{vmatrix} \\
& \qquad (21) \\
d_{21} &= \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{32} & M_{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{31} & A_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{33} & M_{13} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ A_{11} & A_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{31} & M_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{21} & A_{31} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Rovnicu rýchlosti svetla dostaneme, keď determinant súradníc tenzoru $\mathbf{U}$ porovnáme s nulou

$$
\begin{vmatrix} d_{11} + v^2, & d_{12}, & d_{13} \\ d_{21}, & d_{22} + v^2, & d_{23} \\ d_{31}, & d_{32}, & d_{33} + v^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (22)
$$

Teraz ukážeme, že rovnica (22) je len zdanlivo kubická, pretože jej absolútny člen je rovný nule. Absolútny člen rovnice (22) je práve rovný determinantu

$$
\begin{vmatrix} d_{11}, & d_{12}, & d_{13} \\ d_{21}, & d_{22}, & d_{23} \\ d_{31}, & d_{32}, & d_{33} \end{vmatrix}. \qquad (23)
$$

Aby sme určili jeho hodnotu, môžeme bez ujmy na obecnosti pootočiť súradný systém tak, aby jednotkový vektor $\mathfrak{x}_1$ ležal vo smere vektora $\mathfrak{n}$. Tak docielime, že $\mathfrak{n} = \mathfrak{x}_1$, t. j. $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$. Pri tomto otočení zmenia síce súradnice $A_{ik}$ a $M_{ik}$ svoje hodnoty, ale ako vidno ihneď z rovníc (20), členy $d_{11}$, $d_{12}$ a $d_{13}$ sa stanú rovné nule nezávisle na tenzoroch $\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}$ a $\overline{\overline{\mu}}^{-1}$. Pretože vtedy je prvý riadok determinantu (23) rovný nule, je aj sám determinant (23) nulový. Nulovosť determinantu $\| d_{ik} \|$ sa však otočením nemení a preto determinant (23) je v každej polohe súradného systému rovný nule a teda rovnica (22) je kvadratická pre $v^2$ a možno ju písať vo tvare

$$
\begin{aligned}
v^4 - v^2 (d_{11} + d_{22} + d_{33}) &+ d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21} + \\
&+ d_{22} d_{33} - d_{23} d_{32} + \\
&+ d_{33} d_{11} - d_{31} d_{13} = 0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Lineárny člen tejto rovnice je

$$
\begin{aligned}
d_{11} + d_{22} + d_{33} = n_1 n_1 & \left[ \begin{vmatrix} M_{22} & A_{23} \\ M_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{33} & A_{23} \\ M_{23} & A_{22} \end{vmatrix} \right] + \\
+ n_2 n_2 & \left[ \begin{vmatrix} M_{33} & A_{13} \\ M_{13} & A_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & A_{13} \\ M_{13} & A_{33} \end{vmatrix} \right] + \\
+ n_3 n_3 & \left[ \begin{vmatrix} M_{11} & A_{12} \\ M_{12} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{22} & A_{12} \\ M_{12} & A_{11} \end{vmatrix} \right] - \\
- 2 n_1 n_2 & \left[ \begin{vmatrix} M_{12} & A_{23} \\ M_{13} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{33} & A_{13} \\ M_{23} & A_{12} \end{vmatrix} \right] - \\
- 2 n_2 n_3 & \left[ \begin{vmatrix} M_{23} & A_{13} \\ M_{21} & A_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & A_{12} \\ M_{13} & A_{23} \end{vmatrix} \right] - \\
- 2 n_3 n_1 & \left[ \begin{vmatrix} M_{13} & A_{12} \\ M_{23} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{22} & A_{23} \\ M_{12} & A_{13} \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Výraz (25) je symetrický v súradniciach tenzorov $\overline{\overline{\varepsilon}}$ a $\overline{\overline{\mu}}$. Keď zavedieme tenzor vlnovej normály **N**,

$$
\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} n_i n_k \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} N_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k,
\tag{26}
$$

možno jednoduchou úpravou nahliadnuť, že člen (25) je symetrický vo všetkých troch tenzoroch **N**, $\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}$ a $\overline{\overline{\mu}}^{-1}$ a možno mu dať takýto tvar:

$$
\begin{aligned}
d_{11} + d_{22} + d_{33} = & \begin{vmatrix} N_{11} & M_{12} & A_{13} \\ N_{21} & M_{22} & A_{23} \\ N_{31} & M_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & N_{12} & M_{13} \\ A_{21} & N_{22} & M_{23} \\ A_{31} & N_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & A_{12} & N_{13} \\ M_{21} & A_{22} & N_{23} \\ M_{31} & A_{32} & N_{33} \end{vmatrix} + \\
+ & \begin{vmatrix} N_{11} & A_{12} & M_{13} \\ N_{21} & A_{22} & M_{23} \\ N_{31} & A_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & M_{12} & N_{13} \\ A_{21} & M_{22} & N_{23} \\ A_{31} & M_{32} & N_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & N_{12} & A_{13} \\ M_{21} & N_{22} & A_{23} \\ M_{31} & N_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zavedenim jednotného označenia

$$N_{ik} \overset{(1)}{=} p_{ik}, \quad M_{ik} \overset{(2)}{=} p_{ik}. \quad A_{ik} \overset{(3)}{—} p_{ik} \qquad \textbf{(27)}$$

možno napísať predošlý sůčet vo formě sumácie tak, že je

(i) U) (*)
jPll Pi2 PlS

$$dn + d_{22} + dw = \overset{(1.2,3)}{Z!} \qquad \textbf{(28)}$$

(O 0') (*)
P2L P22 P2$
(O U) <*)
j*31 Í?32 #33

kde sůčet $\underset{i,j,k}{\overset{(1.2,3)}{U}}$ znáči, že je v ňom třeba previesť postupné všetky soskupenia prvkov 1, 2, 3 v indexoch $i, j_y$ Je.

Pre určenie absolutného člena v rovnici (24)

$a = d_n$ (*22———*di2* U21 + ^22 ^33 — ^23 ^32 + ^33 «11———^31 ájs

postačí, ked sa budeme zaoberať iba prvou dvojicou členov

$$a_L — d_n d_{22} — d_{i2} d_{2l}, \qquad (29)$$

pretože dalšie dostaneme z tejto cyklickou záměnou. V $a_x$ sa rušia členy: $(á_u)$i (^22)3 s členom *íd$_{12}$)i (dti)* 9* člen (^11)2(^22)1 s členom (^12)2(^21)1 a člen (^11)3(^12)2 s členom $(á_{12})_3$ $(d_{2l})_2$ > kde (<Z$_{13k}$)$_ř$ značí Z-tý člen súčtu $d_{ift}$ v (20) a v (21). Ostatných dvanásť členov v $a_x$ vhodné upravíme, takže je

$a_\%$ = | n$ n₃ / M₂í M₃l | % wi r / ^32 M₁₂\ [ | n₂ % / A₂l A%i | • | W3 % / •^•32 ^-12 | n₂ n$ / A₂₂ A32 | % ni 11 / ^31 -^11 J | +

+ | «2 «3 / M₂₁ M_Sl | ' | % Wi Ir / -M33 ^ J [ | n₂ nₛ / A₂ₓ Asi | n_L n₂ / Ai₂ A₂₂ | n₂ n% / A₂₂ A§₂ | Wj n₂ I'] / Au A₂í 1 _ | +

+ | n₂ n₃ / M₂₂ M.ᵢ₂ | »3>i Ir / -atfii Jfeřiil [ | ^Zl A ₙ | n₂ w₃ / ^-22 A32 | n_z n_L / A%₂ Ai₂ | • | n₂%1'1 / •^21 -^31 | J | +

+ | \ n₂ n₃ / M₂ᵢ M₃₁ | w₃ Wi Iři / •M33 -ZěTial L | ^3 W! / ^•31 A ₙ | Wi % / -<M2 -^22 | n$ ni / A^2 Ai₂ | Wi n₂ I / A\i A₂₁ |

+ | n₂ n₃ / M₂S M₃₃ | % Wj Ir / ^I-MHIψAiA₂₁ | nₓ n₂ | ^2 % / ^22 A$₂ | n_Y n₂ / Ai₂ A₂₂ | ! n₂n-_A 1' / i-^21-^31 ..

| I n₂ n₃ / \M^ M₃₃ | «... ni | r / ^₃ₐJ/J [ | nₓ n₂ / ⁴ i 1^21 | I | n₃ n_ı / A?>2 A12 | n_ı n₂ / A₁₂ A₂₂ | • | «j Wi r / •^31 -^11 L

Člen v prvej hranatej zátvorke upravíme takto:

$$\begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{21} & A_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{32} & A_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ A_{22} & A_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ A_{31} & A_{11} \end{vmatrix} =$$

$$= n_3 [n_1 (A_{12} A_{32} - A_{22} A_{31}) + n_2 (A_{31} A_{12} - A_{32} A_{11}) + n_3 (A_{22} A_{11} - A_{21}^2)] =$$

$$= \frac{n_3}{A} (n_1 \varepsilon_{31} + n_2 \varepsilon_{32} + n_3 \varepsilon_{33}).$$

Po takejto úprave aj ostatných členov v hranatých zátvorkách môžeme písať

$$a_1 = \frac{1}{A} (n_1 \varepsilon_{31} + n_2 \varepsilon_{32} + n_3 \varepsilon_{33}) \,.$$

$$\cdot \left\{ n_3 \left[ \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{21} & M_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{32} & M_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{22} & M_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{31} & M_{11} \end{vmatrix} \right] + \right.$$

$$+ n_2 \left[ \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{31} & M_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{21} & M_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{33} & M_{13} \end{vmatrix} \right] +$$

$$\left. + n_1 \left[ \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{22} & M_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{33} & M_{13} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_3 & n_1 \\ M_{32} & M_{12} \end{vmatrix} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{AM} (n_1 \varepsilon_{31} + n_2 \varepsilon_{32} + n_3 \varepsilon_{33}) \,.\, [n_1 (n_1 \mu_{11} + n_2 \mu_{12} + n_3 \mu_{13}) +$$
$$+ n_2 (n_1 \mu_{21} + n_2 \mu_{22} + n_3 \mu_{23}) +$$
$$+ n_3 (n_1 \mu_{31} + n_2 \mu_{32} + n_3 \mu_{33})] \,.$$

Pretože ďalšie členy absolútneho člena $a$ dostaneme cyklickou zámenou, je

$$a = \frac{1}{AM} \begin{Bmatrix} n_1 (n_1 \mu_{11} + n_2 \mu_{12} + n_3 \mu_{13}) + \\ + n_2 (n_1 \mu_{21} + n_2 \mu_{22} + n_3 \mu_{23}) + \\ + n_3 (n_1 \mu_{31} + n_2 \mu_{32} + n_3 \mu_{33}) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 (n_1 \varepsilon_{11} + n_2 \varepsilon_{12} + n_3 \varepsilon_{13}) + \\ + n_2 (n_1 \varepsilon_{21} + n_2 \varepsilon_{22} + n_3 \varepsilon_{23}) + \\ + n_3 (n_1 \varepsilon_{31} + n_2 \varepsilon_{32} + n_3 \varepsilon_{33}) \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{AM} \left( \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} n_i n_j \varepsilon_{ij} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} n_k n_l \mu_{kl} \right). \tag{30}$$

Použitím dvojbodkového súčinu možno dať členu $a$ tvar

$$a = \frac{1}{AM} (\overline{\overline{\varepsilon}} \,..\, \mathbf{N}) \cdot (\overline{\overline{\mu}} \,..\, \mathbf{N}), \tag{31}$$

kde $\mathbf{N}$ je tenzor zavedený v (26).

Zavedením reciprokých tenzorov možno písať (31) vo tvare

$$
\begin{aligned}
a = \Bigg[ & N_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + N_{22} \begin{vmatrix} A_{33} & A_{31} \\ A_{31} & A_{11} \end{vmatrix} + N_{33} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} + \\
& + 2N_{12} \begin{vmatrix} A_{31} & A_{33} \\ A_{12} & A_{32} \end{vmatrix} + 2N_{23} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{23} & A_{13} \end{vmatrix} + 2N_{31} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{12} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix} \Bigg] . \\
. \Bigg[ & N_{11} \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} + N_{22} \begin{vmatrix} M_{33} & M_{31} \\ M_{31} & M_{11} \end{vmatrix} + N_{33} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{vmatrix} + \\
& + 2N_{12} \begin{vmatrix} M_{31} & M_{33} \\ M_{12} & M_{32} \end{vmatrix} + 2N_{23} \begin{vmatrix} M_{12} & M_{11} \\ M_{23} & M_{13} \end{vmatrix} + 2N_{31} \begin{vmatrix} M_{21} & M_{22} \\ M_{13} & M_{23} \end{vmatrix} \Bigg] ,
\end{aligned}
$$

ktorému možno dať tvar súčinu súčtov determinantov

$$
\begin{aligned}
a = & \left\{ \begin{vmatrix} N_{11} & M_{12} & M_{13} \\ N_{21} & M_{22} & M_{23} \\ N_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & N_{12} & M_{13} \\ M_{21} & N_{22} & M_{23} \\ M_{31} & N_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & N_{13} \\ M_{21} & M_{22} & N_{23} \\ M_{31} & M_{32} & N_{33} \end{vmatrix} \right\} . \\
. & \left\{ \begin{vmatrix} N_{11} & A_{12} & A_{13} \\ N_{21} & A_{22} & A_{23} \\ N_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & N_{12} & A_{13} \\ A_{21} & N_{22} & A_{23} \\ A_{31} & N_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & N_{13} \\ A_{21} & A_{22} & N_{23} \\ A_{31} & A_{32} & N_{33} \end{vmatrix} \right\} ,
\end{aligned}
$$

čo vyjadrené označením (27) dáva

$$
a = \sum_{i,j,k}^{(1,2,2)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p}_{11} & \overset{(j)}{p}_{12} & \overset{(k)}{p}_{13} \\ \overset{(i)}{p}_{21} & \overset{(j)}{p}_{22} & \overset{(k)}{p}_{23} \\ \overset{(i)}{p}_{31} & \overset{(j)}{p}_{32} & \overset{(k)}{p}_{33} \end{vmatrix} . \sum_{i,j,k}^{(1,3,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p}_{11} & \overset{(j)}{p}_{12} & \overset{(k)}{p}_{13} \\ \overset{(i)}{p}_{21} & \overset{(j)}{p}_{22} & \overset{(k)}{p}_{23} \\ \overset{(i)}{p}_{31} & \overset{(j)}{p}_{32} & \overset{(k)}{p}_{33} \end{vmatrix} . \qquad (32)
$$

Dosadením do rovnice (24) dostávame pomocou vyjadrení (28) a (32) rovnicu rýchlosti svetla v prostredí totálne anizotropnom:

$$
v^4 - v^2 \sum_{i,j,k}^{(1,2,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p}_{11} & \overset{(j)}{p}_{12} & \overset{(k)}{p}_{13} \\ \overset{(i)}{p}_{21} & \overset{(j)}{p}_{22} & \overset{(k)}{p}_{23} \\ \overset{(i)}{p}_{31} & \overset{(j)}{p}_{32} & \overset{(k)}{p}_{33} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k}^{(1,2,2)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p}_{11} & \overset{(j)}{p}_{12} & \overset{(k)}{p}_{13} \\ \overset{(i)}{p}_{21} & \overset{(j)}{p}_{22} & \overset{(k)}{p}_{23} \\ \overset{(i)}{p}_{31} & \overset{(j)}{p}_{32} & \overset{(k)}{p}_{33} \end{vmatrix} . \sum_{i,j,k}^{(1,3,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p}_{11} & \overset{(j)}{p}_{12} & \overset{(k)}{p}_{13} \\ \overset{(i)}{p}_{21} & \overset{(j)}{p}_{22} & \overset{(k)}{p}_{23} \\ \overset{(i)}{p}_{31} & \overset{(j)}{p}_{32} & \overset{(k)}{p}_{33} \end{vmatrix} = 0 ; \qquad (33)
$$

tu podľa (27) je

$$
\overset{(1)}{p}_{ik} = n_i \, n_k , \quad \overset{(2)}{p}_{ik} = M_{ik} , \quad \overset{(3)}{p}_{ik} = A_{ik} .
$$

V súčtoch $\sum\limits_{i,j,k}^{(1,2,2)}$ a $\sum\limits_{i,j,k}^{(1,3,3)}$ je treba postupne vykonať všetky od seba rozdielne soskupenia prvkov 1, 2, 2, resp. 1, 3, 3 v indexoch $i$, $j$, $k$. Tieto súčty majú preto na rozdiel od súčtu (28) po troch determinantoch, kým v súčte (28) je ich šesť.

Pre explicitné vyjadrenie rovnice rýchlosti svetla ako funkcie vlnovej normály v súradnom systéme $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$

$$\mathfrak{n} = \cos\alpha\, \mathfrak{x}_1 + \cos\beta\, \mathfrak{x}_2 + \cos\gamma\, \mathfrak{x}_3$$

je výhodné dosadiť do rovnice (24) členy (25) a (30), takže platí

$$\begin{aligned} v^4 - v^2 \big[&\cos^2\alpha\,(M_{22}A_{33} - 2\,M_{23}A_{32} + M_{33}A_{22}) + \\ &+ \cos^2\beta\,(M_{33}A_{11} - 2\,M_{31}A_{13} + M_{11}A_{33}) + \\ &+ \cos^2\gamma\,(M_{11}A_{22} - 2\,M_{12}A_{21} + M_{22}A_{11}) - \\ &- \cos\alpha\cos\beta\,(M_{12}A_{33} - M_{31}A_{23} - M_{32}A_{13} + M_{33}A_{21}) - \\ &- \cos\beta\cos\gamma\,(M_{23}A_{11} - M_{12}A_{31} - M_{13}A_{21} + M_{11}A_{32}) - \\ &- \cos\gamma\cos\alpha\,(M_{31}A_{22} - M_{23}A_{12} - M_{21}A_{32} + M_{22}A_{13})\big] + \\ &+ \frac{1}{A\,M}\,(\varepsilon_{11}\cos^2\alpha + \varepsilon_{22}\cos^2\beta + \varepsilon_{33}\cos^2\gamma + \\ &+ 2\,\varepsilon_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\,\varepsilon_{23}\cos\beta\cos\gamma + 2\,\varepsilon_{31}\cos\gamma\cos\alpha)\,. \\ &.\,(\mu_{11}\cos^2\alpha + \mu_{22}\cos^2\beta + \mu_{33}\cos^2\gamma + \\ &+ 2\,\mu_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2\,\mu_{23}\cos\beta\cos\gamma + 2\,\mu_{31}\cos\gamma\cos\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

V špeciálnom prípade súosej anizotropie, v súradnom systéme, ktorého osi ležia v osiach elipsoidov oboch tenzorov, takže tieto sú dané rovnicami (8), prechádza rovnica (34) do rovnice (9), pretože v tomto prípade $A = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ a $M = \mu_1\,\mu_2\,\mu_3$.

Pre mnohé obecné úvahy je vhodné pootočiť súradný systém tak, aby vlnová normála mala smer súradnej osi $\mathfrak{x}_1$. Potom je

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{x}_1$$

a $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$.

V tomto súradnom systéme sa rovnica (33) veľmi zjednoduší, pretože okrem $\overset{(1)}{p}_{11}$, všetky ostatné $\overset{(1)}{p}_{ik}$ sú rovné nule, takže je

$$v^4 - v^2 \left[\begin{vmatrix} M_{22} & A_{23} \\ M_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{33} & A_{23} \\ M_{23} & A_{22} \end{vmatrix}\right] + \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Pretože súčet koreňov kvadratickej rovnice je rovný jej záporne vzatému lineárnému členu a ich súčin je rovný jej absolútnemu členu, platí pre obe možné rýchlosti $v_1$ a $v_2$ vo smere $\mathfrak{n} = \mathfrak{x}_1$

$$v_1 + v_2 = \begin{vmatrix} M_{22} & A_{23} \\ M_{23} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{33} & A_{23} \\ M_{23} & A_{22} \end{vmatrix} \tag{36}$$

a

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{23} & M_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} . \tag{37}$$

## LITERATÚRA


Ilkovič D., *Vektorový počet*, Bratislava 1945.

Staríček I., *Rovinná vlna elektromagnetická v prostredí elektricky aj magneticky anizotropnom*, Bratislava 1946.

Schaefer Cl., *Einführung in die theoretische Physik*, III, 2, Berlin 1930.

## Выводы

В настоящей статье я определяю уравнение скорости света в полне анизотропной среде, в которой диэлектрическая постоянная $\overline{\overline{\varepsilon}}$ и магнитная проницаемость $\overline{\overline{\mu}}$ являются тензорами. Надвязывая на прежнюю мою работу я указываю, что если свет должен распространяться в направлении перпендикуляра волны $\mathfrak{n}$, то третий скаляр тензора $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = v^2 \mathbf{I} + \left(\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1}\right) \cdot \left(\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}\right)$$

должен равняться нулю. Из этого условия мы получаем для скорости света $v$ (измеряемую в единицах скорости света в пустоте) уравнение:

$$v^4 - v^2 \sum_{i,j,k}^{(1,2,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p_{11}} & \overset{(j)}{p_{12}} & \overset{(k)}{p_{13}} \\ \overset{(i)}{p_{21}} & \overset{(j)}{p_{22}} & \overset{(k)}{p_{23}} \\ \overset{(i)}{p_{31}} & \overset{(j)}{p_{32}} & \overset{(k)}{p_{33}} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k}^{(1,2,2)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p_{11}} & \overset{(j)}{p_{12}} & \overset{(k)}{p_{13}} \\ \overset{(i)}{p_{21}} & \overset{(j)}{p_{22}} & \overset{(k)}{p_{23}} \\ \overset{(i)}{p_{31}} & \overset{(j)}{p_{32}} & \overset{(k)}{p_{33}} \end{vmatrix} \cdot \sum_{i,j,k}^{(1,3,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p_{11}} & \overset{(j)}{p_{12}} & \overset{(k)}{p_{13}} \\ \overset{(i)}{p_{21}} & \overset{(j)}{p_{22}} & \overset{(k)}{p_{23}} \\ \overset{(i)}{p_{31}} & \overset{(j)}{p_{32}} & \overset{(k)}{p_{33}} \end{vmatrix} = 0,$$

где мы пользовались следующими обозначениями:

$$\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \, \mathfrak{x}_i$$

$$\overset{(1)}{p}_{ik} = n_i \, n_k$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} M_{ik} \, \mathfrak{x}_i \, \mathfrak{x}_k \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} A_{ik} \, \mathfrak{x}_i \, \mathfrak{x}$$

$$\overset{(2)}{p}_{ik} = M_{ik} \qquad \overset{(3)}{p}_{ik} = A_{ik}$$

Сумма $\sum\limits_{i,j,k}^{(1,2,3)}$ обозначает, что надо в ней постепенно исполнить все группировки элементов 1, 2, 3 в показателях $i, j, k$ (сумма шести слагаемых). В суммах $\sum\limits_{i,j,k}^{(1,2,2)}$ и $\sum\limits_{i,j,k}^{(1,3,3)}$ надо совершить все разные друг от друга группировки элементов 1, 2, 2 или-же 1, 3, 3 в показателях $i, j, k$ (суммы трех слагаемых).

*Résumé*

Dans ce mémoire je déduis l'équation de la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu totallement anisotrope, dans lequel la constante diélectrique ainsi bien que la perméabilité magnétique sont de caractère tensoriel. En me référant à un de mes travaux antérieurs je démontre que, si la lumière doit se propager dans la direction du vecteur d'unité $\mathfrak{n}$ normale au plan d'onde. le troisième scalaire du tenseur $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = v^2 \mathbf{I} + (\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\mu}}^{-1}) . (\mathfrak{n} \times \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}),$$

doit être égal à zéro. De cette condition j'obtiens pour la vitesse de propagation de la lumière v (rélative à celle dans le vide) l'équation

$$v^4 - v^2 \sum_{i,j,k}^{(1,2,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p_{11}} & \overset{(j)}{p_{12}} & \overset{(k)}{p_{13}} \\ \overset{(i)}{p_{21}} & \overset{(j)}{p_{22}} & \overset{(k)}{p_{23}} \\ \overset{(i)}{p_{31}} & \overset{(j)}{p_{32}} & \overset{(k)}{p_{33}} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k}^{(1,2,2)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p_{11}} & \overset{(j)}{p_{12}} & \overset{(k)}{p_{13}} \\ \overset{(i)}{p_{21}} & \overset{(j)}{p_{22}} & \overset{(k)}{p_{23}} \\ \overset{(i)}{p_{31}} & \overset{(j)}{p_{32}} & \overset{(k)}{p_{33}} \end{vmatrix} \cdot \sum_{i,j,k}^{(1,3,3)} \begin{vmatrix} \overset{(i)}{p_{11}} & \overset{(j)}{p_{12}} & \overset{(k)}{p_{13}} \\ \overset{(i)}{p_{21}} & \overset{(j)}{p_{22}} & \overset{(k)}{p_{23}} \\ \overset{(i)}{p_{31}} & \overset{(j)}{p_{32}} & \overset{(k)}{p_{33}} \end{vmatrix} = 0,$$

où les grandeurs $p_{ik}$ sont définies par les rélations

$$\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \mathfrak{x}_i,$$

$$\overset{(1)}{p_{ik}} \quad n_i n_k,$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} M_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k, \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} A_{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k,$$

$$\overset{(2)}{p_{ik}} = M_{ik}, \qquad \overset{(3)}{p_{ik}} = A_{ik}.$$

Les $A_{ik}$ ($M_{ik}$) sont les mineurs des éléments $\varepsilon_{ki}$ ($\mu_{ki}$) dans le déterminant $\|\varepsilon_{ik}\|$ ($\|\mu_{ik}\|$) du tenseur diélectrique $\overline{\overline{\varepsilon}}$ (de permeabilité $\overline{\overline{\mu}}$), divisés par la valeur du déterminant $\|\varepsilon_{ik}\|$ ($\|\mu_{ik}\|$).