Anton Kotzig

O pravidelne pestrých polyédroch

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 16 (1966), No. 2, 183--186

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126903

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

# O PRAVIDELNE PESTRÝCH POLYÉDROCH

ANTON KOTZIG, Bratislava

V celej tejto práci pod polyédrom rozumie sa eulerovský polyéder v zmysle Steinitzovom (pozri [2]). Pod $n$-valentným polyédrom budeme rozumieť — ako obvykle — polyéder, v ktorom každý vrchol je incidentný práve s $n$ hranami. Nech $P$ je $n$-valentný polyéder. Označme znakom $V$ (resp. $H$, resp. $S$) počet jeho vrcholov (resp. hrán, resp. stien) a znakom $s_k$ počet tých jeho stien, ktoré sú $k$-uholníkmi. Je zrejmé, že platia tieto rovnosti:

$$(1) \qquad S = \sum_{i=3}^{\infty} s_i; \qquad 2H = \sum_{i=3}^{\infty} i s_i; \qquad 2H = nV.$$

Po dosadení podľa týchto rovností do známeho Eulerovho vzťahu:

$$(2) \qquad V - H + S = 2$$

a po úprave dostaneme:

$$(3) \qquad \frac{4n}{n-2} = \sum_{i=3}^{\infty} \left( \frac{2n}{n-2} - i \right) s_i.$$

Vskutku elementárnou úvahou sa ľahko možno presvedčiť, že existujú len polyédre troj-, štvor- a päťvalentné. Ak by totiž platilo $n \geqq 6$, potom je $2(n-2) < 2n \leqq 3(n-2)$ a platilo by:

$$\sum_{i=3}^{\infty} \left( \frac{2n}{n-2} - i \right) s_i \leqq 0; \qquad \frac{4n}{n-2} \geqq 4,$$

čo je v rozpore s rovnosťou (3). Preto neexistujú polyédre viac než päťvalentné. Pre jednotlivé prípustné $n$ ($n \in \{3, 4, 5\}$) dostávame dosadením do (3) tieto známe rovnosti, ktoré pripomíname, lebo ich v ďalšom budeme potrebovať:

Prípad: Rovnosť:

$$(4) \qquad \begin{cases} n = 3 & 3s_3 + 2s_4 + s_5 = 12 + s_7 + 2s_8 + \ldots + (k-6)s_k + \ldots \\ n = 4 & s_3 = 8 + s_5 + 2s_6 + \ldots + (k-4)s_k + \ldots \\ n = 6 & s_3 = 20 + 2s_4 + 5s_5 + \ldots + (3k-10)s_k + \ldots . \end{cases}$$

Poznámka. Z platnosti rovností (4) ihneď vyplýva, že štvorvalentný polyéder obsahuje najmenej 8 trojuholníkov a päťvalentný najmenej 20 trojuholníkov.

**Definícia:** *O n-valentnom polyédri budeme hovoriť, že je pravidelne pestrý, keď existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel* $2, u_1, u_2, \ldots, u_n$ *tak, že pre všetky* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *platí: každý vrchol polyédra je incidentný práve s jedným* $u_i$*-uholníkom.*

**Veta.** *Každý pravidelne pestrý polyéder je trojvalentný a buď obsahuje 12 štvoruholníkov, 8 šesťuholníkov a 4 osemuholníkov, alebo obsahuje 30 štvoruholníkov, 20 šesťuholníkov* a *12 desaťuholníkov. Existuje aj taký pravidelne pestrý polyéder oboch uvedených typov, v ktorom každá stena je pravidelným mnohouholníkom a každý pravidelne pestrý polyéder je izomorfný práve s jedným z uvedených dvoch polyédrov.*

Dôkaz. Z práce [1] (pozri vetu 8) je známe, že v každom päťvalentnom polyédri existuje aspoň jeden taký vrchol, ktorý je incidentný najmenej so štyrmi trojuholníkmi. Z toho vyplýva, že pravidelne pestrý polyéder nemôže byť päťvalentný. Dokážme, že nemôže byť ani štvorvalentný!

Predpokladajme naopak, že existuje štvorvalentný polyéder, v ktorom každý vrchol je incidentný s $k$-uholníkom, $p$-uholníkom, $q$-uholníkom a s $r$-uholníkom, kde $2 < k < p < q < r$. Z poznámky je zrejmé, že $k = 3$. Platí však zrejme $xs_x = 3s_3$ pre všetky $x \in \{p, q, r\}$. Teda $s_x = \frac{3}{x} s_3$ pre všetky $x \in \{3, p, q, r\}$ a $s_y = 0$ pre všetky $y$ nepatriace do $\{3, p, q, r\}$. Podľa (5) potom platí:

$$s_3 = 8 + \frac{3p - 12}{p} s_3 + \frac{3q - 12}{q} s_3 + \frac{3r - 12}{r} s_3 .$$

Čiže: $0 = 8 + 4s_3 (2 - 3c)$; kde $c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$, a teda kde $2 - 3c > 0$. To je ale spor, lebo $s_3$ nemôže byť číslo záporné. Predpoklad existencie pravidelne pestrého štvorvalentného polyédra vedie ku sporu. Z uvedeného vyplýva, že pravidelne pestrý polyéder môže byť len trojvalentný. To dokazuje prvé tvrdenie vety.

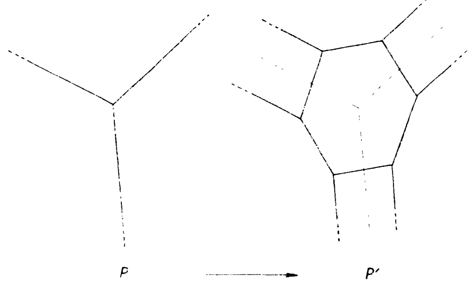
Nech $P$ je trojvalentný polyéder, v ktorom každý vrchol je incidentný s jedným $p$-uholníkom, s jedným $q$-uholníkom a s jedným $r$-uholníkom, pričom $p < q < r$. Ak by sme obiehali po obvode ľubovoľného $p$-uholníka z $P$, museli by sme po hranách zrejme prechádzať tak, že hrany, na ktorých susedí tento $p$-uholník s $q$-uholníkom, a hrany, na ktorých susedí s $r$-uholníkom, sa striedajú. Z toho vyplýva, že $p$ je párne číslo. Obdobnou úvahou o $q$-uholníku a $r$-uholníku zistíme, že ja $q$ aj $r$ je párne číslo. Čiže: $s_3 = s_5 = s_7 = \ldots = 0$ a dosadením do (4) pre $n = 3$ dostávame:

$$(5) \qquad 2s_4 = 12 + \sum_{i=3}^{\infty} (2i - 6)s_{2i},$$

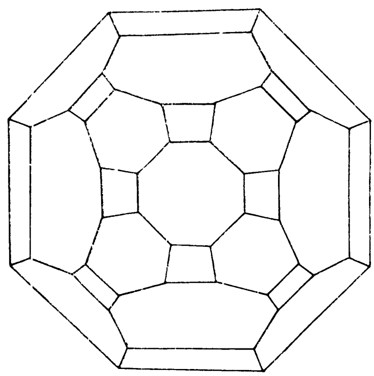
z čoho vyplýva: $s_4 \geq 6$; $p = 4$. Okrem toho platí zrejme: $ps_p = qs_q = rs_r$, a teda $s_q = \frac{4}{q} s_4$; $s_r = \frac{4}{r} s_4$. Po dosadení do (5) a po úprave dostaneme:

$$\frac{1}{2s_4} = \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{4} > 0.$$

Je však $5 < q < r$, preto musí byť $q = 6$ a platí $\frac{1}{r} > \frac{1}{12}$; $12 > r > 6$ (pričom $r$ je párne). Z toho vyplýva, že do úvahy prichádzajú len tieto dve možnosti: $p = 4$; $q = 6$; $r = 8$ (prvá možnosť); $p = 4$; $q = 6$; $r = 10$ (druhá možnosť). V prvom prípade ľahko zistíme, že platí $s_4 = 12$, $s_6 = 8$, $s_8 = 4$ a v druhom prípade $s_4 = 30$, $s_6 = 20$, $s_{10} = 12$. To dokazuje druhé tvrdenie vety. Že existujú aj také pravidelne pestré polyédre oboch typov, v ktorých každá stena je pravidelným mnohouholníkom (čo je v súhlase s výsledkami práce [3]), ľahko zistíme touto úvahou: Prvý z nich dostaneme, keď vo vhodnom meradle urobíme zmenu znázornenú na obr. 1 vo všetkých vrcholoch kocky. Druhý dostaneme po obdobných zmenách v pravidelnom dvanásťstene päťuholníkovom. Po takýchto zmenách — ktoré možno chápať tiež ako zrezanie vrcholov a hrán pôvodného polyédra — vznikne vždy pravidelne pestrý polyéder. Každému vrcholu polyédra odpovedá v ňom istý šesťuholník a každej



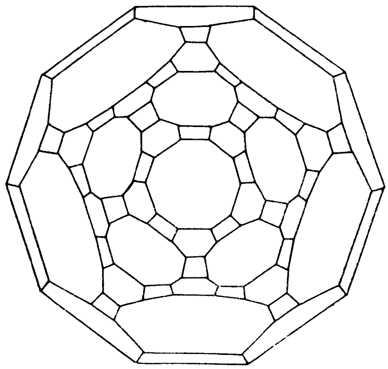

Obr. 1.



Obr. 2.

hrane štvoruholník. Stena, ktorá je v pôvodnom polyédri $k$-uholník zmení sa pritom na $2k$-uholník. Je zrejmé, že „zrezanie" vrcholov a hrán možno urobiť v oboch prípadoch jediným spôsobom tak, že všetky steny nového polyédra

Obr. 3.



budú pravidelnými mnohouholníkmi. Je tiež zrejmé, že každý polyéder s požadovanými vlastnosťami je izomorfný práve s jedným z pravidelne pestrých polyédrov, ktorých konštrukciu sme práve opísali a tiež izomorfný práve s jedným z polyédrov znázornených na obr. 2, resp. 3. To dokazuje vetu.

## LITERATÚRA


[1] Коциг А., *Из теории эйлеровских многогранников*, Mat. fyz. časop. *13* (1963), 20—31.
[2] Steinitz E., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin 1934.
[3] Коллектив авторов (руководитель Залгаллер В. А.), *О правильногранных многогранниках*, Вестн. Ленингр. Ун-та *20* (1965), 150—152.



Došlo 12. 3. 1965.



*Katedra numerickej matematiky*
*a matematickej štatistiky*
*Prírodovedeckej fakulty*
*Univerzity Komenského, Bratislava*


## ON REGULARLY VARYING POLYHEDRA


Anton Kotzig



Summary

By a regularly varying $n$-valent polyhedron we understand a polyhedron wherein each vertex is incident at exactly one $n_i$-gon ($i \in \{1,2, \ldots, n\}$), where if $i \neq j$ then $n_j \neq n_i$. It is proved that every regularly varying polyhedron is trivalent and either contains 12 quadrilaterals, 8 hexagons and 6 octagons, or it contains 30 quadrilaerals, 20 hexagons and 12 decagons. There exist polyhedra of both types, where in each face is a regular polygon.