Miloslav Jůza

Généralisation à plusieurs dimensions de la quadrique osculatrice

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 1, 64--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126914

Matematický časopis 17 (1967), No. 1

GÉNÉRALISATION À PLUSIEURS DIMENSIONS DE LA QUADRIQUE OSCULATRICE

MILOSLAV JŮZA, Praha

Dans le travail [4] on étudiait certaines variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Dans le travail [5] on a démontré qu'il existe une espèce de ces variétés analogue aux quadriques réglées. Dans le travail présent, on étudie ces généralisations des quadriques par les moyens plus élémentaires qu'au travail [5] et on en montre quelques propriétés nouvelles.

1. Quelques théorèmes géometriques auxiliaires. Soit $n \geqq 1$. Le fondament de nos considérations sera l'espace projectif réel S_{2n+1} de la dimension $2n + 1$.

Théorème 1. *Soient V_n, W_n deux sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} sans point commun. Soit T_k un sous-espace k-dimensionnel* $(0 \leqq k \leqq n)$ *de l'espace S_{2n+1} sans point commun avec V_n et avec W_n. Alors, il existe un et un seul espace Q_{2k+1} de la dimension $2k + 1$ contenant T_k et rencontrant les espaces V_n et W_n aux espaces de la dimension k. Si Q'_{2h+1} est un espace construit par une méthode analogue à l'espace $T'_h \subset T_k$ de la dimension h* $(0 \leqq h \leqq k)$, *alors $Q'_{2h+1} \subset Q_{2k+1}$.*

Démonstration. I. Soit $V_n = [v_0, \ldots, v_n]$, $W_n = [w_0, \ldots, w_n]$, $T_k = [t_0, \ldots, t_k]$. Posons $R_{n+k+1} = [t_0, \ldots, t_k, v_0, \ldots, v_n]$, alors $\dim R_{n+k+1} = n + k + 1$. L'union des espaces R_{n+k+1}, et W_n est S_{2n+1} entier (car cette union contient les points $v_0, \ldots, v_n, w_0, \ldots, w_n$ linéairement indépendants), alors leur intersection est l'espace $U_k = [u_0, \ldots, u_s]$ de la dimension k. L'espace $Q_{2k+1} = [t_0, \ldots, t_k, u_0, \ldots, u_k]$ a la dimension $2k + 1$ et il est contenu dans R_{n+k+1}, dans lequel aussi V_n est contenu. L'union de Q_{2k+1} et de V_n est R_{n+k+1} entier (car cette union contient les points $t_0, \ldots, t_k, v_0, \ldots, v_n$ linéairement indépendants), alors leur intersection a la dimension k. Q_{2k+1} est donc l'espace cherché.

II. Cet espace est unique, parce que chaque tel espace doit être contenu dans R_{n+k+1} qui a un seul espace k-dimensionnel commun avec W_n.

III. Si nous faisons la construction analogue pour l'espace T'_h, nous voyons que $R'_{n+h+1} \subset R_{n+k+1}$, alors l'espace d'intersection U'_h des espaces R'_{n+h+1} et W_n est contenu dans U_k. Mais Q'_{2+h+1} est l'union de T'_h et de U'_h, alors il est contenu dans Q_{2k+1} qui est l'union de T_k et de U_k.

Théorème 2. *Soient V_n, W_n, U_n trois sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} tels que, deux à deux ils n'aient pas de point commun. Alors par chaque point de l'espace U_n passe une et une seule droite qui coupe V_n et W_n.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème 1, où $k = 0$ et T_0 est un point de l'espace U_n.

Définition. *Nous dirons que $n + 1$ droites sont en position générale si elles ne sont contenues dans aucun espace de la dimension plus petite que $2n + 1$. Nous dirons que $n + 2$ droites sont en position générale si toutes les deux d'elles sont en position générale.*

Théorème 3. *Soient V_n, W_n, U_n trois sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} par deux disjoints. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points de l'espace V_n, soient $p_0, \ldots, p_n$ des droites dans S_{2n+1} telles que $x_i \in p_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ et que chaque p_i coupe W_n et U_n. Alors les droites $p_0, \ldots, p_n$ sont en position générale si et seulement si les points $x_0, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. I. Il est évident que les $p_0, \ldots, p_n$ ne peuvent pas être en position générale si les $x_0, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants.

II. Soient $x_0, \ldots, x_n$ linéairement indépendants. Désignons y_i le point d'intersection p_i avec U_n. Alors les points $y_0, \ldots, y_n$ sont aussi linéairement indépedants. A savoir, autrement tous les $y_0, \ldots, y_n$ seraient placés dans un espace $U'_{n-1} \subset U_n$ de la dimension $n - 1$. D'après le théorème 1, il existe un seul espace Q_{2n-1} contenant U'_{n-1} et coupant V_n et W_n aux espaces de la dimension $n - 1$. Toutes les p_i sont placées (de nouveau d'après le théorème 1, où nous posons $k = n - 1$, $h = 0$) dans Q_{2n-1}. Donc, si nous désignons par T_{n-1} l'espace d'intersection des espaces Q_{2n-1} et V_n, tous les points $x_0, \ldots, x_n$ seraient placés dans T_{n-1}, alors ils ne seraient pas linéairement indépendants.

III. Si les points $x_0, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants, il y a $V_n = [x_0, \ldots, x_n]$. Par conséquent, d'après II les $y_0, \ldots, y_n$ sont aussi linéairement indépendants et donc $U_n = [y_0, \ldots, y_n]$. Mais si les droites $p_0, .., p_n$ n'étaient pas en position générale, les points $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ seraient linéairement dépendants et les espaces V_n et U_n auraient un point commun.

Théorème 4. *Soient U_n, V_n, W_n trois sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} par deux disjoints. Soit f une correspondance entre U_n et W_n qui fait au point $A \in U_n$ correspondre le point $B \in W_n$* (d'après le théorème 2 unique) *tel que la droite $[A, B]$ coupe V_n. Alors f est une homographie.*

Démonstration. Soit Σ_n l'espace (de dimension n) de tous les espaces $(n + 1)$-dimensionnels X_{n+1} passant par l'espace V_n. Soit φ une application de U_n sur Σ_n définie pour $A \in U_n$ par la relation $A \in \varphi(A)$, ψ une application de Σ_n sur W_n définie pour $A \in \Sigma_n$ par la relation $\psi(A) \in A$. Les applications φ et ψ sont des homographies et la correspondance f est d'après la démonstration du théorème 1 le produit des applications φ et ψ.

Définition. *Ayons* $n+1$ *droites* $p_0, \ldots, p_n$ *de l'espace* S_{2n+1} *en position générale. Soit* Q^i_{2n-1} *le sous-espace de la dimension* $2n-1$ *de l'espace* S_{2n+1} *contenant toutes ces droites excepté* p_i. *Nous dirons que le point* $A \in S_{2n+1}$ *est en position générale à l'égard des droites* $p_0, \ldots, p_n$, *si* $A \notin Q^i_{2n-1}$ *pour chaque* $i = 0, \ldots, n$.

Théorème 5. (1) *Soient* $p_0, \ldots, p_n$ *des droites de* S_{2n+1} *en position générale et le point* A *soit en position générale à l'égard d'elles. Alors, il existe un et un seul espace de la dimension* n *contenant le point* A *et coupant toutes les droites* p_i.

Démonstration. I. Soit R_{2n} l'espace de la dimension $2n$ contenant les droites $p_1, \ldots, p_n$ et le point A. Désignons par A_0 le point d'intersection de cet espace avec la droite p_0. Donc les points A_0, A et les droites $p_1, \ldots, p_n$ sont placés dans l'espace R_{2n} de la dimension $2n$.

II. Soit $0 \leqq j < n$ et supposons que les points $A_i \in p_i$ pour $i = 0, \ldots, j$ sont déjà définis de telle manière que les points $A_0, \ldots, A_j, A$ te les droites $p_{j+1}, \ldots, p_n$ sont contenus dans un espace R_{2n-j} de la dimension $2n-j$. Ces points et ces droites ne peuvent pas être contenues dans un espace d'une dimension plus petite, car autrement les droites $p_0, \ldots, p_n$ ne seraient pas en position générale. Soit R_{2n-j-1} l'espace de la dimension $2n-j-1$ contenant les points $A_0, \ldots, A_j, A$ et les droites $p_{j+2}, \ldots, p_n$. Cet espace est unique, car autrement le point A ne serait pas en position générale à l'égard des droites $p_0, \ldots, p_n$. L'espace R_{2n-j-1} et la droite p_{j+1} ont un et un seul point A_{j+1} commun, car ils sont tous les deux contenus dans l'espace R_{2n-j}. On voit ainsi que les points $A_0, \ldots, A_{j+1}$, A et les droites $p_{j+2}, \ldots, p_n$ sont contenus dans l'espace R_{2n-j-1} de la dimension $2n-j-1$. Alors nous avons défini par l'induction les points $A_0, \ldots, A_n$, $A_i \in p_i$. L'espace $R_n = [A_0, \ldots, A_n, A]$ est de la dimension n, il passe par le point A et il coupe toutes les droites p_i.

III. Un tel espace est unique, car on voit aisément que chaque tel espace doit être contenu dans chaque espace R_{2n}, R_{2n-1}, $\ldots$, R_n, par consequent il est identique avec R_n.

Théorème 6. *Soient* $p_0, \ldots, p_n, p_{n+1}$ *les droites de* S_{2n+1} *en position générale. Alors il passe par chaque point de la droite* p_{n+1} *un et un seul espace de la dimension* n *coupant toutes les droites* $p_0, \ldots, p_n$.

Démonstration. Chaque point de la droite p_{n+1} est en position générale à l'égard des droites $p_0, \ldots, p_n$. Alors nous pouvons appliquer le théorème 5.

Théorème 7. *Soient* $p_0, \ldots, p_{n+1}$ *des droites de* S_{2n+1} *en position générale. Soient* V_n, W_n *deux espaces différents de la dimension* n, *chacun d'eux coupant*

(1) Voir aussi [1], chap. IV, sect. 4.

toutes les droites $p_0, \dots, p_{n+1}$. Alors V_n et W_n n'ont aucun point commun.

Démonstration. Soient A_i le point d'intersection p_i avec V_n, B_i le point d'intersection p_i avec W_n. Il y a $A_i \neq B_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$, car autrement par le point $A_i = B_i$ de la droite p_i passeraient deux espaces différents à n dimensions coupant toutes $n+1$ droites restant; mais d'après le théorème 6 ce n'est pas possible. Alors $p_i = [A_i, B_i]$, $i = 0, \dots, n+1$, et on a $[A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n] \neq 0$, car les droites $p_0, \dots, p_n$ sont en position générale. Mais $V_n = [A_0, \dots, A_n]$, $W_n = [B_n, \dots, B_0]$ alors V_n et W_n n'ont aucun point commun.

Théorème 8. *Soient $p_0, \dots, p_{n+1}$ des droites de l'espace S_{2n+1} en position générale. Soit f une correspondance entre p_0 et p_{n+1} qui fait au point $A \in p_0$ correspondre le point $B \in p_{n+1}$, B étant le point d'intersection de la droite p_{n+1} avec l'espace V_n* (d'après le théorème 7 unique) *passant par le point A et coupant toutes les droites $p_0, \dots, p_{n+1}$. Alors f est une projectivité.*

Démonstration. Soit Σ_1 l'espace (de la dimension 1) de tous les espaces $2n$-dimensionnels R_{2n} qui contiennent toutes les droites $p_1, \dots, p_n$. Soit φ l'application de p_0 sur Σ_1 définie pour $A \in p_0$ par la relation $A \in \varphi(A)$, ψ l'application de Σ_1 sur p_{n+1} définie pour $A \in \Sigma_1$ par la relation $\psi(A) \in A$. Les applications φ et ψ sont des projectivités et la correspondance f est d'après la démonstration du théorème 5 le produit des applications φ et ψ.

2. Pseudodemiquadriques. Dans l'espace S_{2n+1}, ayons $n+2$ droites $p_0, \dots, p_{n+1}$ en position générale. Nous appelerons pseudodemiquadrique l'ensemble de tous les espaces n-dimensionnels coupant toutes les droites $p_0, \dots, p_{n+1}$. Chacun de ces espaces n-dimensionnels sera appelé espace générateur de la pseudodemiquadrique. Chaque droite qui coupe tous les espaces générateurs de la pseudodemiquadrique, sera appelée traverse de la pseudodemiquadrique. Alors, $n+2$ droites en position générale étant données, il existe une et une seule pseudodemiquadrique ayant ces droites comme traverses.

Des théorèmes 6 et 7 on déduit

Théorème 9. *Chaque pseudodemiquadrique a un nombre infini des espaces générateurs. Deux espaces générateurs différents de la pseudodemiquadrique n'ont aucun point commun.*

Théorème 10. *Soient V_n, W_n, U_n trois sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} par deux disjoints. Alors, il existe une et une seule pseudodemiquadrique ayant ces sous-espaces comme espaces générateurs.*

Démostration. I. Choisissons les points $x_0, x_1, , \dots, x_{n+1} \in U_n$ de manière que tous les $n+1$ d'eux soient linéairement indépendents. D'après le théorème 2, par chaque point x_i passe une et une seule droite p_i coupant V_n et W_n. Les droites $p_0, \dots, p_{n+1}$ sont d'après le théorème 3 en position générale, alors elles déterminent une pseudodemiquadrique. Cette pseudodemiquadrique contient évidemment les espaces V_n, W_n et U_n comme espaces générateurs.

II. Pour démontrer l'unicité, il suffit prouver que cette pseudodemiquadrique ne dépend pas du choix de $n + 2$ points $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sur U_n. Evidemment il suffit de démontrer que la pseudodemiquadrique reste inaltérée d'après le changement d'un de ces points. Alors supposons que le choix des points $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$ mène à la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$, le choix $x_0, \ldots, x_n, \bar{x}_{n+1}$ à la pseudodemiquadrique $\mathfrak{N}$. Les deux pseudodemiquadriques ont les traverses communes $p_0, \ldots, p_n$. La pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$ définit d'aprés le théorème 8 pour $i = l, \ldots, n$ une projectivité f_i de la droite p_0 sur la droite p_i, la pseudodemiquadrique $\mathfrak{N}$ définit les projectivités analogues $g_1, \ldots, g_n$. $\mathfrak{M}$ se compose de l'ensemble des espaces $[A, f_1(A), \ldots, f_n(A)]$, $\mathfrak{N}$ de l'ensemble des espaces $[A, g_1(A), \ldots, g_n(A)]$, où $A \in p_0$. Mais les projectivités f_i et g_i ont pour chaque i trois paires de points corıespondants communes (c'est-à-dire les paires correspondant aux espaces V_n, W_n, U_n), donc elles sont indentiques. Alors tous les espaces générateurs de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont aussi identiques.

Théorème 11. *Chaque droite coupant trois espaces générateurs d'une pseudodemiquadrique est une traverse de celle.*

Démonstration. Une pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$ soit donée par ses $n + 2$ traverses $p_0, \ldots, p_{n+1}$ en position générale et supposons qu'une droite p coupe ses espaces générateurs V_n, W_n, U_n. Soit x_i $(i = 0, \ldots, n + 1)$ le point d'intersection de la droite p_i avec l'espace U_n, x le point d'intersection de la droite p avec U. Tous les $n + 1$ des points $x_0, \ldots, x_{n+1}$ sont linéairement indépendents. D'après un numérotage convenable, entre les points $x_0, \ldots, x_n, x$ tous les $n + 1$ seront aussi linéairement indépendents. Les droites $p_0, \ldots, p_n, p$ sont donc d'après le théorème 3 en position générale et déterminent donc une pseudodemiquadrique $\mathfrak{N}$ dont elles son traverses. Les pseudodemiquadriques $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont trois espaces générateurs communs, c'est-à-dire V_n, W_n et U_n, alors $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ d'après le théorème 10, alors p est une traverse de la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$.

Des théorèmes 2, 11, 6 et 3 on déduit.

Théorème 12. *Par chaque point d'un espace générateur de la pseudodemiquadrique il passe une et une seule traverse. Par chaque point d'une traverse de la pseudodemiquadrique il passe un et un seul espace générateur. $n + 1$ traverses de la pseudodemiquadrique sont en position générale si et seulement si elles coupent un espace générateur à $n + 1$ points linéairement indépendents (et par consèquent elles coupent ainsi chaque espace générateur).*

Les points placés sur les espaces générateurs d'une pseudodemiquadrique forment un ensemble $M \subset S_{2n+1}$. Pour cet ensemble a lieu le suivant

Théorème 13. *Chaque droite $p \subset M$ ou est placée sur un espace générateur ou est une traverse de la pseudodemiquadrique.*

Démonstration. Si p n'est placée sur aucun espace générateur, elle a avec un espace générateur au plus un point commun. donc elle coupe l'infini des espaces générateurs et par conséquent d'après le théorème 11 elle les coupe tous.

Théorème 14. *Soient $p_0, \dots, p_n$ les droites dans l'espace S_{2n+1} en position générale. Soient f_i $(i = 1, \dots, n)$ des applications biunivoques p_0 sur p_i. Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des espaces $[A, f_1(A), \dots, f_n(A)]$, $A \in p_0$. Alors $\mathfrak{M}$ est une pseudodemiquadriques si et seulement si toutes les f_i $(i = 1, \dots, n)$ sont des projectivités.*

Démonstration. I. Si $\mathfrak{M}$ est une pseododemiquadrique, alors $p_0, p_1, \dots,$ p_n sont ses traverses et on voit du théorème 8 que f_i sont des projectivités.

II. Toutes les f_i soient projectivités. Alors aucune paire des espaces $[A, f_1(A), \dots, f_n(A)]$, $[B, f_1(B), \dots, f_n(B)]$ n'a de point commun, car pour $A \neq B$ il y a $f_i(A) \neq f_i(B)$, donc $p_i = [f_i(A), f_i(B)]$, et si les espaces considérés avaient un point commun, les droites $p_0, \dots, p_n$ ne seraient pas en position générale. Choisissons sur p_0 trois points différents A, B, C. D'après le théorème 10, il existe une et une seule psuedodemiquadrique $\mathfrak{N}$ avec les espaces générateurs $[A, f_1(A), \dots, f_n(A)]$, $[B, f_1(B). \dots, f_n(B)]$, $[C, f_1(C), \dots, f_n(C)]$; les doites $p_0, \dots, p_n$ sont ses traverses d'après le théorème 11. D'après le théorème 8, $\mathfrak{N}$ définie les projectivités g_i entre p_0 et p_i $(i = 1, \dots, n)$. Les projectivités f_i et g_i ont trois paires communs, c'est-à-dire $(A, f_i(A))$, $(B), f_i(B))$, $(C, f_i(C))$ donc $f_i = g_i$. Alors $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}$ est une pseudodemiquadrique.

Théorème 15. *Soient V_n et W_n deux sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} sans points communs et soit f une application biunivoque V_n sur W_n. Désignons par M l'ensemble des droites $[A, f(A)]$, $A \in V_n$. Alors $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des traverses d'une pseudodemiquadrique si et seulement si f est une homographie.*

Démonstration. I. Si $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des traverses d'une pseudodemiquadriques $\mathfrak{N}$, V_n et W_n sont ses espaces générateurs. Nous povouns choisir encore son troisième espace générateur U_n et du théorème 4 on déduit que f est une homographie.

II. Soit f une homographie. Choisissons sur V_n des points $A_0, \dots, A_{n+1}$ de manière que tous les $n + 1$ d'eux soient lineairement indépendents. Alors les droites $[A_i, f(A_i)]$, $i = 0, \dots, n + 1$, sont en position générale, car autrement les espaces V_n et W_n se couperaient. Donc ces droites sont traverses d'une pseudodemiquadrique $\mathfrak{N}$. Les traverses de $\mathfrak{N}$ définissent d'après le théorème 4 une homographie g de l'espace V_n sur W_n. Les homographies f et g ont $n + 2$ paires communes, c'est-à-dire les paires $[A_0, f(A_0)]$, $[A_1, f(A_1)]$, $\dots$, $[A_{n+1}, f(A_{n+1})]$, tous les $n + 1$ de $n + 2$ points $A_0, \dots, A_{n+1}$ étant linéairement indépendants; alors $f = g$. Donc $\mathfrak{M}$ est l'ensemble des traverses de la pseudodemiquadrique $\mathfrak{N}$.

3. L'expression analytique d'une pseudodemiquadrique. Un système monoparamétrique des sous-espaces n-dimensionnels $V_n(t)$ (où t parcourt un intervalle) de l'espace S_{2n+1} sera appelé monosystème(²). Si $V_n(t) = [x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)]$, les courbes $x_0(t), \ldots, x_n(t)$ seront appelées courbes directrices, les espaces $V_n(t)$ pour t fixe espaces générateurs du monosystème. Un monosystème sera appelé non-développable si nous pouvons choisir des courbes directrices de façon que les fonctions $x_i(t)$ aient la derivée continue et que $[x_0(t), \ldots. x_n(t), x_0'(t), \ldots, x_n'(t)] \neq 0$ ait lieu pour chaque t.

Théorème 16. *Soit $\mathfrak{M}$ une pseudodemiquadrique sans un espace générateur. Alors $\mathfrak{M}$ est un monosystème non-développable et nous pouvons choisir ses courbes directrices de façon qu'elles soient des droites et qu'il vaille*

$$x_i''(t) = 0, \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

Démonstration. Soit V_n l'espace générateur de la pseudodemiquadrique qui n'est pas contenu dans $\mathfrak{M}$, W_n un autre espace de celle, $p_0, \ldots, p_n$ soient $n+1$ traverses de la pseudodemiquadrique en position générale, X_i les points d'intersection de l'espace V_n avec les droites p_i, Y_i les points d'intersection de W_n avec p_i. D'après le théorème 8, les points d'intersection des droites p_0 et p_i $(i = 1, \ldots, n)$ avec les mêmes espaces générateurs se correspondent projectivement. Donc nous pouvons choisir des facteurs scalaires des points X_i et Y_i de manière que l'espace générateur coupant la droite p_0 au point $x_0(t) = Y_0 + tX_0$, coupe la droite p_i au point $x_i(t) = Y_i + tX_i$. Évidemment, chaque espace générateur de la pseudodemiquadrique en outre de V_n peut être écrit sous la forme $[x_0(t), \ldots, x_n(t)]$ pour quelque t. $\mathfrak{M}$ est donc un monosystème. Il est évident qu'il vaut (1). Parce que les droites $p_0, \ldots, p_n$ sont en position générale, il vaut aussi que $[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n] \neq 0$. Mais $x_i'(t) = X_i$, alors $[x_0(t), \ldots, x_n(t), x_0'(t), \ldots, x_n'(t)] = [Y_0, \ldots, Y_n, X_0, \ldots, X_n] \neq 0$, alors le monosystème est non-développable.

Théorème 17. *Soit $V_n(t) = [x_0(t), \ldots, x_n(t)]$, où t parcourt un intervalle I, un monosystème non-développable et supposons que* (1) *a lieu. Alors, il existe une pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$ telle que chaque espace générateur $V_n(t)$ du monosystéme est aussi un espace générateur de la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. Par l'integration des équations (1) nous obtenons

$$x_i(t) = Y_i + tX_i, \qquad i = 0, \ldots, n, \tag{2}$$

(²) Voir [4], [5], [6].

où X_i, Y_i sont des points de l'espace S_{2n+1}. Les courbes directrices du monosystème sont donc les droites $p_i = [X_i, Y_i]$, $i = 0, \dots, n$. Le monosystème est non-développable, alors $[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n] \neq 0$, donc les droites p_i sont en position générale. Il est évident de (2) que les points d'intersection des droites p_0 et p_i avec les mêmes espaces générateurs du monosystème se correspondent projectivement. Alors tous les espaces générateurs du monosystème sont des espaces générateurs d'une pseudodemiquadrique d'après le théorème 14.

4. Les coordonnées de Grassmann. Si nous déterminons les sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1} par leurs coordonnées de Grassmann, nous pouvons les considérer comme points de l'espace projectif P_N de la dimension $N = \binom{2n+2}{n+1} - 1$. Le point $p = (\dots, p_{i_0 i_1 \dots i_n}, \dots)$ de l'espace P_N est l'image d'un sous-espace n-dimensionnel de l'espace S_{2n+1} si et seulement si

$$(3) \qquad \sum_{\lambda = 0}^{n+1} (-1)^\lambda p_{i_1 \dots i_n j_\lambda} \, p_{j_0 \dots j_{\lambda-1} j_{\lambda+1} \dots j_{n+1}} = 0$$

a lieu pour chaque choix des nombres $i_1, \dots, i_n, j_0, \dots j_{n+1}$ de $0, 1, \dots, 2n + 1$.(3)

Dans l'espace S_{2n+1} soit donné un monosystème non-développable $V_n(t)$. Les images dans l'espace P_N des espaces générateurs $V_n(t)$ forment une courbe dans cet espace. Dans le travail [5] on a démontré (§§ 3 et 4) que cette courbe n'est située dans aucun sous-espace n-dimensionnel de l'espace P_N et qu'elle est placée dans un sous-espace $(n + 1)$-dimensionnel si et seulement si nous pouvons choisir sur le monosystème $V_n(t)$ des courbes directrices $x_0(t), \dots, x_n(t)$ de façon que le système des équations différentielles

$$x_i''(t) = 0, \qquad i = 0, \dots, n,$$

soit valable. Donc à l'égard des théorèmes 16 et 17 il vaut

Théorème 18. *La courbe dans l'espace P_N qui est l'image d'un monosystème non-développable $V_n(t)$ de l'espace S_{2n+1}, cette image étant définie par les coordonnées de Grassmann des espaces générateurs, n'est placée dans aucun sous-espace n-dimensionnel de l'espace P_N. Cette courbe est placée dans un sous-espace $(n + 1)$-dimensionnel de l'espace P_N si et seulement s'il existe dans l'espace S_{2n+1} une pseudodemiquadrique telle que chaque espace générateur du monosystème $V_n(t)$ soit aussi un espace générateur de celle-ci.*

Comme complément du théorème 18 nous allons prouver ce

Théorème 19. *Qu'un sous-espace $(n + 1)$-dimensionnel Q_{n+1} de l'espace P_N contienne les images de tous les espaces générateurs d'une pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$.*

(3) Voir [3], chap. VII, § 6, la formule (2) et le théorème II.

Alors dans Q_{n+1} il n'y a pas d'autres points qui soient les images des sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1}.

Démonstration. La pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$ soit donnée par ses traverses $p_0, \ldots, p_n$ en position générale, $p_i = [A_i, B_i]$, et par les projectivités entre p_0 et p_i $(i = 1, \ldots, n)$ qui font au point $uA_0 + vB_0$ correspondre les points $uA_i + vB_i$ (voir le théorème 14). $\mathfrak{M}$ est donc l'ensemble des espaces $V_n(u, v) = [uA_0 + vB_0, \ldots, uA_n + vB_n]$. Il y a $[A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_n] \neq 0$, parce que les droites $p_0, \ldots, p_n$ sont en position générale. Choisissons le système de référence à l'espace S_{2n+1} de manière qu'il soit valable

$$a_i^j = \delta_i^j, \quad b_i^j = \delta_{j+n+1}^i \quad (i = 0, \ldots, 2n + 1; \quad j = 0, \ldots, n + 1), \tag{4}$$

où a_j^i, resp. b_j^i sont les coordonnées des points A_j, resp. B_j. Alors les coordonnées de Grassmann de l'espace $V_n(u, v)$ seront données par les mineurs de la matrix à $n + 1$ lignes et $2n + 2$ colonnes

$$\left\| \begin{matrix} u & 0 & 0 & \ldots & 0 & v & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u & 0 & \ldots & 0 & 0 & v & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots\ldots\ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u & 0 & 0 & 0 & \ldots & v \end{matrix} \right\|$$

D'ici on voit que les uniques coordonnées non-zéro de l'espace $V_n(u, v)$ sont celles de la forme $p_{\lambda_0, \lambda_1+1, \lambda_2+2, \ldots, \lambda_n+n}$, où $\lambda_i = 0$ ou $n + 1$ pour $i = 0, \ldots, n$ (et naturellement les coordonnées qui ont ces indices dans un autre ordre). Cependant, si parmi les indices manque à la foi i et $n + 1 + i$, alors le mineur correspondant a à la i-ième ligne des zéros. On a encore

$$p_{\lambda_0, \lambda_1+1, \ldots, \lambda_n+n} = u^{n-s-1} v^s, \tag{4}$$

où s est le nombre de λ_i différents de zéro(5). Alors le sous-espace Q_{n+1} de l'espace P_N contenant la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$ satisfait au système des épuations linéaires

$$p_{\lambda_0, \lambda_1+1, \ldots, \lambda_n+n} = p_{n+1,\, n+1+1, \ldots,\, n+1+j,\, j+1,\, j+2, \ldots,\, n}, \tag{5}$$

où $j = 0, \ldots, n$ et où exactement $j + 1$ nombres $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont différents de zéro (donc égaux à $n + 1$),

$$p_{k_0, \ldots, k_n} = 0, \tag{6}$$

où $k_0, \ldots, k_n$ parcourt toutes les combinaisons des indices qui contiennent à la fois l'indice ν et $n + \nu + 1$ pour quelque $\nu = 0, \ldots, n$. Nous allons déterminer les points communs de la variété donnée par (5) et (6) et de la variété

(4) $\delta_i^j = \left\langle \begin{matrix} 0 \text{ pour } i \neq j, \\ 1 \text{ pour } i = j. \end{matrix} \right.$

(5) Nous posons ici $0^0 = 1$.

(3) de toutes les images des sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1}.

Des relations (3) et (6) on obtient pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$, si on choisit les nombres $n+1, n+2, \ldots, n+j+1, j+2, j+3, \ldots, n$ pour $i_1, \ldots, i_n$ et les nombres $0, 1, \ldots, n, n+j+2$ pour $j_0, j_1, \ldots, j_{n+1}$:

$$(-1)^{j+1} p_{n+1, n+2, \ldots, n+j+1, j+2, j+3, \ldots, n, j+1}\, p_{0, \ldots, j, j+2, \ldots, n, n+j+2} +$$
$$+ (-1)^{n+1} p_{n+1, n+2, \ldots, n+j+1, j+2, j+3, \ldots, n, n+j+2}\, p_{0,1, \ldots, n} = 0,$$

et après un arrangement on a

$$(-1)^{j+1} p_{n+1, n+2, \ldots, n+j+1, j+1, j+2, \ldots, n}\, p_{0. \ldots, j, n+j+2, j+2, \ldots, n} +$$
$$+ (-1)^{j} p_{n+1, n+2, \ldots, n+j+2, j+2, j+3, \ldots, n}\, p_{0,1, \ldots, n} = 0.$$

D'ici on obtient par l'application de (5):

$$p_{n+1, n+2, \ldots, n+j+1, j+1, j+2, \ldots, n}\, p_{n+1,1,2, \ldots, n} -$$
$$- p_{n+1, n+2, \ldots, n+j+2, j+2, j+3, \ldots, n}\, p_{0,1, \ldots, n} = 0 \tag{7}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Des relations (3) et (6) on obtient aussi pour $j = 0, \ldots, n-1$, si on choisit les nombres $0, 1, \ldots, j \neq 1, n+j+2, n+j+3, \ldots, 2n+1$, pour $i_1, \ldots, i_n$ et les nombres $0, 1, \ldots, j+1, n+j+3, n+j+4, \ldots, 2n+1, n+j+1$ pour $j_0, j_1, \ldots, j_{n+1}$:

$$(-1)^{j} p_{0,1, \ldots, j-1, n+j+2, \ldots, 2n+1, j}\, p_{0,1, \ldots, j-1, j+1, n+j+3, \ldots, 2n+1, n+j+1} +$$
$$+(-1)^{n+1} p_{0,1, \ldots, j-1, n+j+2, \ldots, 2n+1, n+j+1}\, p_{0,1, \ldots, j+1, n+j+3, \ldots, 2n+1} = 0,$$

donc après un arrangement

$$-(1)^{j} p_{0,1, \ldots, j, n+j+2, \ldots, 2n+1}\, p_{0,1, \ldots, j-1, n+j+1, j+1, n+j+3, \ldots, 2n+1} +$$
$$+ (-1)^{j+1} p_{0,1, \ldots, j-1, n+j+1, \ldots, 2n+1}\, p_{0,1, \ldots, j+1, n+j+3, \ldots, 2n+1} = 0.$$

D'ici on obtient par l'application de (5):

$$p_{0,1, \ldots, j, n+j+2, \ldots, 2n+1}\, p_{0,1, \ldots, j, n+j+2, \ldots, 2n+1} -$$
$$- p_{0,1, \ldots, j-1, n+j+1, \ldots, 2n+1}\, p_{0,1, \ldots, j+1, n+j+3, \ldots, 2n+1} = 0 \tag{8}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Les relations (7) et (8) sont donc des conséquences de (3), (5) et (6). Alors, pour que l'image $p = (\ldots, p_{i0}, \ldots, i_n, \ldots)$ de quelque sous-espace n-dimensionnel de l'espace S_{2n+1} soit contenu dans Q_{n+1}, leurs coordonées de Grassmann doivent satisfaire aux équations (7) et (8).

Supposons maintenant qu'un point $p = (\ldots, p_{i0}, \ldots i_n, \ldots) \in P_N$ satisfait á (3), (5), (6) et donc aussi à (7) et (8). Soit d'abord $p_{0,1,\dots,n} \neq 0$. En multipliant par un facteur scalaire nous pouvons obtenir que $p_{0,1,\dots,n} = 1$. Posons $v = p_{n+1,1,2,\dots,n}$. Alors d'après (7), si nous posons successivement $j = 0, 1, \dots, n-1$, nous obtenons $p_{n+1,n+2,\dots,n+s+1,s+1,s+2,\dots,n} = v^{s+1}$ pour $s = 0, 1, \dots, n$. Par une comparaison avec (4) nous voyons maintenant à l'égard de (5) que le point p est l'image de l'espace $V_n(1, v) = [A_0 + vB_0, \dots, A_n + vB_n]$ qui est un espace générateur de la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$. Mais si pour le point p il y a $p_{0,1,\dots,n} = 0$, alors d'après (8), si nous posons successivement $j = n-1, n-2, \dots, 0$, nous obtenons $p_{0,1,\dots,s,n+s+2,\dots,2n+1} = 0$ pour $s = 0, 1, \dots, n$. Par une comparaison avec (4) nous voyons à l'égard de (5) que le point (5) est dans ce cas l'image de l'espace $V_n(0, 1) = [B_0, B_1, \dots, B_n]$ qui est aussi un espace générateur de la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$.

Nous avons donc prouvé que l'espace Q_{n+1} ne contient les images d'aucun sous-espace n-dimensionnel de l'espace S_{2n+1} en outre des images des espaces générateurs de la pseudodemiquadrique $\mathfrak{M}$.

5. Le contact d'un monosystème avec une pseudodemiquadrique. Dans le travail [4] on a défini les courbes asymptotiques d'un monosystème non-développable et on y a démontré (§2) que par chaque point d'un espace générateur arbitraire du monosystème il passe une et une seule courbe asymptotique. Il est évident que chaque droite coupant tous les espaces générateurs d'un monosystème est une courbe asymptotique de lui. Par une comparaison de ces faits avec le théorème 12 nous voyons:

Théorème 20. *La pseudodemiquadrique a pour les courbes asymptotiques ses traverses et seulement elles.*

Dans le travail [6] on a défini le contact de deux monosystèmes à l'espace générateur commun. On y a prouvé (théorème 5) que deux monosystèmes ont à l'espace génerateur Q_n le contact du 2^e^ ordre si et seulement si leurs courbes asymptotiques se touchent à chaque point de l'espace Q_n. D'ici par la comparaison avec le théorème 20 et avec la définition de la pseudodemiquadrique nous obtenons:

Théorème 21. *Soit $\mathfrak{M}$ un monosystème non-développable des sous-espaces n-dimensionnels de l'espace S_{2n+1}. Alors à chaque espace générateur Q_n du monosystème $\mathfrak{M}$ il existe une et une seule pseudodemiquadrique ayant avec $\mathfrak{M}$ à Q_n le contact du 2^e^ ordre. Les traverses de cette pseudodemiquadrique sont les tangentes des courbes asymptotiques du monosystème $\mathfrak{M}$ aux points de l'espace Q_n.*

Nous appellerons cette pseudodemiquadrique *pseudodemiquadrique osculatrice.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Burau W., *Mehrdimensionale projective und höhere Geometrie*, Berlin 1961.
[2] Čech E., *Projektivní diferenciální geometrie*, Praha 1926.
[3] Hodge W. V. D., Pedoe D., *Methods of algebraic geometry*, vol. I, Cambridge 1947.
[4] Juza M., *Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées*, Czechosl. Math. J. *10* (*85*) (1960), 440—456.
[5] Jůza M., *Les monosystèmes d'espaces projectifs dont les lignes asymptotiques sont des droites*, Czechosl. Math. J., *14* (*89*) (1964), 582—592.
[6] Jůza M., *Styk monosystémů projektivních prostorů*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 218—228.

Reçu le 12 mars 1966.

Výzkumný ústav matematických strojů, Praha