Milan Gera

Allgemeine Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 1, 49--61

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126962`

Matematický časopis 20 (1970), No. 1

ALLGEMEINE BEDINGUNGEN DER NICHT-OSZILLATIONSFÄHIGKEIT UND DER OSZILLATIONSFÄHIGKEIT FÜR DIE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0.$$

MILAN GERA, Bratislava

Erwägen wir die lineare Differetialgleichung dritter Ordnung

$$(1) \qquad L[y] \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)\, y' + p_3(x)\, y = 0\,,$$

wo $p_i(x) \in C(\mathscr{I})$, $i = 1, 2, 3$; $\mathscr{I} = L\langle x_0, b)$ bzw. $(a, x_0\rangle$, $-\infty \leqq a < x_0 < b \leqq \infty$.

Unter der adjungierten Differentialgleichung zu der linearen Differential gleichung $L[y] = 0$ verstehen wir die Differentialgleichung

$$(2) \qquad M\,[z] \equiv [(z' - p_1(x)z)' + p_2(x)z]' - p_3(x)z = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung kann in das nachfolgende System von Differen tialgleichungen übertragen werden

$$\begin{aligned} z' &= p_1(x)z + u\,, \\ u' &= -\, p_2(x)z + v\,, \\ v' &= p_3(x)z\,, \end{aligned}$$

welches gerade eine Lösung, die die Cauchy-schen Anfangsbedingungen in der Zahl x_0 erfült und im ganzen Intervall $\mathscr{I}$ definiert ist, hat [2]. Daraus geht hervor, dass die Differentialgleichung $M[z] = 0$ gerade eine Lösung, die durch die Bedingungen $z(x_0) = z_0$, $z'(x_0) = z_0'$, $(z' - p_1(x)z)'_{x=x_0} = z_0''$ gegebenen ist und im Intervall $\mathscr{I}$ definiert ist, hat. (Siehe auch [3].)

Es sei $z(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $M[z] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$, dann gilt

$$(3) \qquad zL[y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{zy'' + (p_1(x)z - z')y' + [p_2(x)z + (z' - p_1(x)z)']y\}\,.$$

Wenn die Funktionen y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem der Lösungen der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ bilden, dann bilden die Funktionen

$$z_1(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad z_2(x) = - e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix}, \quad z_3(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}$$

auf diesem Interval ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung $M[z] = 0$ ([3]).

Wir sagen, dass die Differentialgleichung n- ter Ordnung im Intervall J nicht oszillatorisch ist, wenn jede ihre nichttriviale Lösung im Intervall J höchstens n-1 Nullstellen, einschliesslich der Vielfachheit, hat. Im entgegensetzten Fall sagen wir, dass sie im Intervall J oszillatorisch ist.

Es sei

$$L_2[u] = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u\,.$$

Die Substittion $z(x) = v(x) \exp \int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta$, $x \in J$, führt die Gleichung $M[z] = 0$ in die Gleichung

$$M_1[v] = \left(L_2[v] e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}\right)' - p_3(x) v e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} = 0 \tag{4}$$

über.

(Die Differentialgleichungen $M[z] = 0$ und $M_1[v] = 0$ halten wir für die Differentialgleichungen dritter Ordnung.)

In dieser Arbeit befassen wir uns haupsächlich mit den Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit und teilweise mit den Bedingungen der Oszillationsfähigkeit der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$. Wir zeigen, dass das Problem die Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit für die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ zu finden, mit dem Problem der Positivität einiger Lösungen der Differentialgleichungen $L[y] = 0$ und $M[z] = 0$ ($M_1[v] = 0$) im Intervall $\mathscr{I} - \{x_0\}$ äquivalent ist.

Lemma 1. *Es seien $g_1(x)$, $g_2(x)$ stetige Funktionen im offenem Intervall I und es sollen diese auf diesem Intervall keine gemeinsame Nullstelle haben. Wenn jede der nichttrivialen linearen Kombinationen $g_1(x)$, $g_2(x)$ im Intervall I höchstens eine und zwar einfache Nulstelle hat, dann existiert unter diesen linearen Kombinationen eine solche, welche auf diesem Intervall verschieden von Null ist.*

Beweis. Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Punkten aus dem Intervall I, welche zu einem der Endpunkte des Intervalles I konvergiert. Setzen wir $\varphi_n(x) = c_n g_1(x) + d_n g_2(x)$, wo

$$c_n = \frac{g_2(x_n)}{\sqrt{g_1^2(x_n) + g_2^2(x_n)}}, \quad d_n = -\frac{g_1(x_n)}{\sqrt{g_1^2(x_n) + g_2^2(x_n)}}$$

Dann ist $\varphi_n(x_n) = 0$ und $\varphi_n(x) \neq 0$ für $x \in I$, $x \neq x_n$. Da $c_n^2 + d_n^2 = 1$ ist sind die Folgen $\{c_n\}_1^{\infty}$, $\{d_n\}_1^{\infty}$ begrentz und daher kann man aus denselben

konvergerte Folgen wählen. Es seien dies $\{c_n^{(1)}\}_1^\infty$ und $\{d_n^{(1)}\}_1^\infty$ und es sei $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^{(1)} = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{(1)} = d$.
Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(1)}(x) = \lim_{n\to\infty} [c_n^{(1)} g_1(x) + d_n^{(1)} g_2(x)] = c g_1(x) + d g_2(x) = \varphi(x),$$

für $x \in I$. Die Folge $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}_1^\infty$ konvergiert fast gleichmässig zu der Funktion $\varphi(x)$ im Intervall I d. h. sie konvergiert gleichmässig zu der Funktion $\varphi(x)$ auf jedem geschlossenen Teilintervall des Intervalls I. Die Fuktion $\varphi(x)$ ist nicht identisch Null in I, weil $c^2 + d^2 = 1$. Zeigen wir, dass im Intervall I $\varphi(x) \neq 0$ ist. Indirekt. Es sei $\varphi(\bar{x}) = 0$ in irgendeiner Zahl $\bar{x} \in I$. Dann folgt aus der Voraussetzung des Lemma, dass $\varphi(x) \neq 0$ für $x \in I$, $x \neq \bar{x}$. Es sei zum Beispiel $\varphi(x) < 0$ für $x < \bar{x}$ und $\varphi(x) > 0$ für $x > \bar{x}$, $x \in I$. Es seien $\eta_1, \eta_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ Zahlen aus dem Intervall I mit den Eigenschaften $\eta_1 < \bar{\eta}_1 < \bar{x} < \bar{\eta}_2 < \eta_2$. Daraus, dass die Folge $\{x_n\}_1^\infty$ zu einem der Endpunkte des Intervalles I konvergiert, folgt, dass eine solche Zahl N_1 existiert, dass für alle $n > N_1$ ist $\varphi_n^{(1)}(x) \neq 0$ für $x \in \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$. Bezeichnen wir $\min\limits_{x \in \langle \eta_1 \bar{\eta}_1 \rangle} (-\varphi(x)) = m_1$, $\min\limits_{x \in \langle \bar{\eta}_2 \eta_2 \rangle} \varphi(x) = m_2$ und $m = \min \{m_1, m_2\}$. Mit Rücksicht darauf, dass die Folge fast gleichmässig zu der Funktion $\varphi(x)$ im Intervall I konvergiert, gilt:
Zu der Zahl m existiert eine solche Zahl $N (N > N_1)$, dass für alle $x \in \langle \eta_1, \bar{\eta}_1 \rangle \cup \langle \bar{\eta}_2, \eta_2 \rangle$ $|\varphi_n^{(1)}(x) - \varphi(x)| < m$ ist. Da $\varphi_n^{(1)}(x) \neq 0$ ist, für $x \in \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ und $n > N$, ist $\varphi_n^{(1)}(x)$ für jene x und n positiv oder negativ. Es sei zum Beispiel $\varphi_n^{(1)}(x) < 0$ für $x \in \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ und $n > N$. Aus der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $\langle \bar{\eta}_2, \eta_2 \rangle$ folgt, dass die Zahl $\xi_2 \in \langle \bar{\eta}_2, \eta_2 \rangle$ derart existiert, dass $\varphi(\xi_2) = m_2$. In dieser Zahl ξ_2 und $n > N$ ist $|\varphi_n^{(1)}(\xi_2) - \varphi(\xi_2)| = m_2 - \varphi_n^{(1)}(\xi_2) > m_2$, was aber im Widerspruch ist damit, dass $|\varphi_n^{(1)}(\xi_2) - \varphi(\xi_2)| < m < m_2$ für $n > N$ ist.
Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) \neq 0$ eine Nullstelle in der Zahl $x_2 \neq x_1$, $x_1, x_2 \in \mathscr{I}$ habe, ist, dass die Lösung $z(x)$ der adjungierten Differentialgleichung $M[z] = 0$ mit der Eigenschaft $z(x_2) = z'(x_2) = 0$, $(z' - p_1(x)z)'_{x = x_2} \neq 0$ bzw. die Lösung $v(x)$ der Differentialgleichung $M_1[v] = 0$ mit der Eigenschaft $v(x_2) = v'(x_2) = 0$, $v''(x_2) \neq 0$ in der Zahl x_1 eine Nullstelle habe.*

Beweis. Es sei $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) \neq 0$ und $z(x)$ sei die Lösung der adjungierten Differentialgleichung $M[z] = 0$ mit der Eigenschaft $z(x_2) = z'(x_2) = 0$, $(z' - p_1(x)z)'_{x = x_2} \neq 0$ bzw. $v(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung $M_1[v] = 0$ mit der Eigenschaft $v(x_2) = v'(x_2) = 0$, $v''(x_2) \neq 0$. Aus der Lagrange-schen

Identität für die Lösungen $y(x)$, $z(x)$ bzw. $v(x)$ erhalten wir dann

$$(5)\qquad 0 = \int_{x_1}^{x_2} \{zL[y] + yM[z]\}\mathrm{d}x = y(x_2)\,(z' - p_1(x)z)'_{x=x_2} - z(x_1)y''(x_1)$$

bzw.

$$(6)\qquad 0 = \int_{x_1}^{x_2} \{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} vL[y] + yM_1[v]\}\mathrm{d}x = e^{\int_{x_0}^{x_2} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} y(x_2)v''(x_2) - e^{\int_{x_0}^{x_1} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} v(x_1)y''(x_1)\,.$$

Notwendige Bedingung. Es sei $y(x_2) = 0$. Es ist notwendig zu zeigen, dass $z(x_1) = 0$ bzw. $v(x_1) = 0$. Aus (5) bzw. (6) ist

$$0 = -z(x_1)\,y''(x_1)$$

bzw.

$$0 = -e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} v(x_1)\,y''(x_1),$$

woraus wir $z(x_1) = 0$ bzw. $v(x_1) = 0$ erhalten.

Hinreichende Bedingung. Es sei $z(x_1) = 0$ bzw. $v(x_1) = 0$. Es ist zu zeigen, dass $y(x_2) = 0$. Aus (5) bzw. (6) ist

$$0 = y(x_2)\,(z' - p_1(x)z)'_{x=x_2}$$

bzw.

$$0 = e^{\int_{x_0}^{x_2} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} y(x_2)\,v''(x_2)\,.$$

daraus folgt $y(x_2) = 0$. Damit ist der Beweis des Lemma bewiesen.

Es sei jetzt $z(x)$ die nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $M[z] = 0$ und $v(x)$ sei die nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $M_1[v] = 0$. Bezeichnen wir

$$F(y, z) = zy'' + (p_1(x)z - z')y' + [p_2(x)z + (z' - p_1(x)z)']y$$

und

$$F_1(y, v) = vy'' - v'y' + L_2[v]y\,.$$

Dann ist aus (3)

$$(7)\qquad zL[y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(y, z)$$

und

$$(8)\qquad vL[y] = e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} F_1(y, v)\,.$$

Wenn $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{J}$ ist, dann ist $y(x)$ auch die Lösung der Differentialgleichungen

$$(9)\qquad F(y, z) = [F(y, z)]_{x=x_0}\,,$$

$$(10) \qquad F_1(y, v) = e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}[F_1(y, v)]_{x=x_0}$$

für $x \in \mathscr{I}$ und umgekehrt, wenn $y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (9) bzw. (10) im Intervall $\mathscr{I}$ ist, dann ist $y(x)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$. Weiter bezeichnen wir $I = \mathscr{I} - \{x_0\}$

Lemma 3. *Es existiere die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ und die Lösung $z(x)$ $(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eingeschaft $y(x) > 0$, $z(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$. Folglich ist die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch dann und nur dann, wenn die Differentialgleichung*

$$H(u, y, z) = \left(u' \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{z(x)} \bar{y}^2(x)\right)' + \frac{y(x)}{z^2(x)} e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}[F(\bar{y}, z)]_{x=x_0} u = 0$$

$$\left(H_1(u, y, v) = \left(\frac{u'\bar{y}^2(x)}{v(x)}\right)' + \frac{y(x)}{v^2(x)} e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}[F_1(y, v)]_{x=x_0} u = 0\right)$$

im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Der Beweis dieses Lemma folgt aus dem Zusammenhang zwischen den Lösungen der Differentialgleichung $F(y, z) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ und der Differentialgleichung $H(u, y, \bar{z}) = 0$ $(H_1(u, \bar{y}, v) = 0)$, welcher folgender $y(x) = u(x)\, y(x)$ ist.

Folgerung. *Es existiere die Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ und die Lösung $z(x)$ $(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{z}(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$. Wenn dabei $[F(y, z)]_{x=x_0} \leqq 0$ $([F_1(\bar{y}, v)]_{x=x_0} \leqq 0)$, dann ist die Differentialgleichung $F(y, z) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch.*

Lemma 4. *Es existiere die Lösung $z(x)$ $(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eigenschaft $\bar{z}(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$. Folglich ist die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch dann und nur dann, wenn eine Lösung $y(x)$ der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $[F(\bar{y}, \bar{z})]_{x=x_0} = 0$ $[(F_1(\bar{y}, v)]_{x=x_0} = 0)$, $\bar{y}(x) > 0$ für $x \in I$, existiert.*

Beweis. a) Die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ sei nicht oszillatorisch im Intervall I. Es seien $y_1, \bar{y}_2$ solche Lösungen von $L[y] = 0$ im J, welche ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $F(y, z) = 0$ $(F_1(y, \bar{v}) = 0)$ im I bilden. Dann hat jede nichttriviale lineare Kombination der Funktionen $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ im Interval I höchstens einfache Nullstelle. Aus (9) und (10) ist offenbar, dass $[F(\bar{y}_i, z)]_{x=x_0} = 0$ $([F_1(\bar{y}_i, v)]_{x=x_0} = 0)$, $i = 1, 2$, ist. Es ist auch ersichtlich, dass y_1 und y_2 gleichzeitig in keiner Zahl $x \in I$ gleich Null sein können, und daher existiert auf Grund des Lemma 1 die Lösung $\bar{y}$ der Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$, welche im Interval I positiv ist ($\bar{y} = \bar{c}_1\bar{y}_1 + \bar{c}_2\bar{y}_2$, wo $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ Konstanten sind). Es gilt also $F(y, z)]_{x=x_0} = 0$ $([F_1(\bar{y}, v)]_{x=x_0} = 0)$.

b) Es existiere jetzt eine solche Lösung $\bar{y}(x)$ der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$, welche im Intervall I positiv ist, dass $[F(\bar{y}, \bar{z})]_{x=x_0} = 0$ $([F_1(y, v)]_{x=x_0} = 0)$ sei. Dann geht aus der Folgerung des Lemma 3 hervor, dass die Differentialgleichung $F(y, z) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Lemma 5. *Es sollen die Funktionen $\alpha(x), \beta(x)$ stetige erste Ableitungen im Intervall $\mathscr{I}$ haben und es sei* $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, $x_1 \in \mathscr{I}$, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$ *für* $x \in \mathscr{I}$, $x \neq x_1$. *Wenn die Funktion $\alpha(x)$ in der Zahl x_2 die erste Nullstelle vor oder nach x_1 hat, dann hat die Funktion $\beta(x)$ gerade eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2.*

Beweis. Es sei $\alpha(x_2) = 0$. Da $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$ für $x \in \mathscr{I}$, $x \neq x_1$, ist $\beta(x_2) \neq 0$. Es sei $\beta(x) \neq 0$ zwischen den Nullstellen x_1, x_2 der Funktion $\alpha(x)$. Dann folgt aus der Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}{\beta^2}$$

für x aus dem offenen Intervall, dessen Endpunkte x_1 und x_2 sind,

$$\frac{\alpha(x_2)}{\beta(x_2)} - \lim_{x\to x_1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_1} \int_x^{x_2} \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}{\beta^2(t)} \, dt .$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich Null, aber die rechte Seite ist verschieden von Null. Dieser Widerspruch beweist, dass die Funktion $\beta(x)$ zwischen x_1 und x_2 wenigstens eine Nullstelle hat. Aus der Tatsache, dass für $x \in \mathscr{I}$, $x \neq x_1$, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$ ist, folgt, dass die Funktion $\beta(x)$ gerade eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2 hat.

Satz 1. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn eine solche Lösung $\bar{z}(x)$ $(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eigenschaft $\bar{z}(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für*

$x \in I$ existiert, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(y, \bar{z}) = 0 \ (F_1(y, v) = 0)$$

im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Beweis. a) Zeigen wir, dass wenn die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist, dass dann eine solche Lösung $z(x)$ $(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eigenschaft $z(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$ existiert, dass die Differentialgleichung $F(y, z) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Mit Rücksicht darauf, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist, ist die Lösung $y_1(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$ für $x \in I$ positiv. Aus denselben Gründen ist die Lösung $z_1(x)$ $(v_1(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit den Eigenschaften $z_1(x_0) = z_1'(x_0) = 0$ $(z_1' - p_1(x)z_1)'_{x=x_0} = 1$ $(v_1(x_0) = v_1'(x_0) = 0$, $v_1''(x_0) = 1)$ positiv für $x \in I$ (da, wenn die Lösung $z_1(x)$ $(v_1(x))$ eine weitere Nullstelle $\bar{x} \in I$ hätte, dann würde laut Lemma 2 eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $y(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = 0$, $y(x_0) = 0$, $y''(\bar{x}) \neq 0$ existieren, d. h. es würde eine Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit drei Nullstellen im Intervall $\mathscr{I}$ existieren, was im Widerspruch damit ist, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist). Setzen wir $\bar{z} = z_1$ $(v = v_1)$. Dann ist $F(y_1, z_1) = 0$ $(F_1(y_1, v_1) = 0)$ für $x \in \mathscr{I}$ und also ist die Differentialgleichung $F(y, z_1) = 0$ $(F_1(y, v_1) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch (Lemma 4, $y = y_1$).

b) Es sei $z(x)$ $(v(x))$ die Lösung der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v]) = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{z}(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$ und die Differentialgleichung $F(y, z) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ sei im Intervall I nichtoszillatorisch. Zeigen wir, dass dann die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist. Mit Rücksicht darauf, dass die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist, existiert, auf Grund des Lemma 4, die Lösung $\bar{y}(x)$ der linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $[F(y, z)]_{x=x_0} = 0$ $([F_1(\bar{y}, v)]_{x=x_0} = 0)$, $\bar{y}(x) > 0$ für $x \in I$ d. h. $\bar{y}(x)$ ist die Lösung der Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ für $x \in I$. Daraus folgt, dass der Differential-Ausdruck $F(y, \bar{z})$ $(F_1(y, v))$ in das Produkt zweier linearer Differential-Ausdrücke erster Ordnung für $x \in I$ zerlegt werden kann (siehe [1]) und also auf Grund von (7) bzw. (8) kann der Differentialausdruck $L[y]$ im Intervall I in das Produkt von drei linearen Differential-Ausdrücken erster Ordnung zerlegt werden. Diese Zerlegung ist wie folgt

$$L[y] = \frac{1}{z}\frac{d}{dx}\frac{\bar{z}^2 e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)d\eta}}{y}\frac{d}{dx}\frac{y^2}{z}e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)d\eta}\frac{d}{dx}\frac{y}{y} \tag{11}$$

$$\left(L[y] \quad \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{v} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{v^2}{\bar{y}}\, e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\bar{y}^2}{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{\bar{y}}\right)$$

und daher ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch [1]. Setzen wir $v(x) = \bar{y}^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{\bar{y}}$ für $x \in I$. Auf Grund von (11) ist diese Funktion die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche im Intervall I nichtoszillatorisch ist [1], d. h. dass die Funktion $v(x)$ $(v(x) \not\equiv 0)$ im Intervall I höchstens eine und zwar einfache Nullstelle hat. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann in der Form

$$(12) \qquad \left(e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta} L[y]\right) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{\bar{y}(x)}\, v'\right) + \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta}}{\bar{y}(x)}\left(p_2(x) + \frac{\bar{y}''(x)}{\bar{y}(x)}\right) v = 0$$

geschrieben werden für $x \in I$.

Es sei y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft

$$(13) \qquad \begin{aligned} y_i^{(j)}(x_0) &= 0\,, \quad j \neq 3 - i\,, \\ y_i^{(j)}(x_0) &= 1\,, \quad j = 3 - i\,, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2$ und es sei

$$v_1(x) = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad v_2(x) = -\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix}, \quad v_3(x) = -\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}.$$

Wenn $y(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist d. h. $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ und wenn $\bar{y}(x) = k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3$, wo c_i, k_i Konstanten sind, $i = 1, 2, 3$, dann kann die Lösung der Differentialgleichung (12) in der Form

$$v(x) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} v_1 + \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ k_1 & k_3 \end{vmatrix} v_2 + \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ k_2 & k_3 \end{vmatrix} v_3$$

geschrieben werden. Da die Differentialgleichung (12) im Intervall I nichtoszillatorisch ist, existiert die Lösung $v_0(x)$ dieser Differentialgleichung, welche im Intervall I von Null verschieden ist (Lemma 1).

Es sei zuerst $\bar{y}(x_0) > 0$ d. h. $\bar{y}(x) > 0$ für $x \in \mathscr{I}$. Zeigen wir, dass in diesem Falle jede nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ höchstens zwei Nullstellen, die Vielfachheit eingeschlossen, hat. Es sei $y(x)$ irgendeine Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eingeschaft $y(x_0) \neq 0$, welche im Intervall $\mathscr{I}$ wenigstens drei Nullstellen hat. Dann hat die Lösung $v(x) = y^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y}{\bar{y}}$ der Differentialgleichung (12) gemäss des Rolle schen Satzes im Intervall I wenigstens zwei Nullstellen, was im Widerspruch damit ist, dass die Differentialgleichung (12) im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Auf ähnliche Weise kann man beweisen, dass jede Lösung der Form $c_1y_1 + c_2y_2$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$ im Intervall I höchstens eine und zwar einfache Nullstelle besitzt. Das bedeutet aber, dass die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$, welche die Form $c_1y_1 + c_2y_2$, $c_2 \neq 0$ hat, im Intervall $\mathscr{I}$ höchstens zwei und zwar einfache Nullstellen besitzt. Daraus folgt, dass die Lösung $y(x)$ von $L[y] = 0$ mit der Eingeschaft $y(x_0) = y(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = 0$, $y''(x) \neq 0$ für beliebiges $\bar{x} \in I$ nicht existiert und daher gemäss Lemma 2 $v_1(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist. Aus der Tatsache, dass $v_1(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist, folgt, dass y_1 und y_2 gleichzeitig in keiner Zahl $x \in I$ gleich Null sein können. Es existiert also eine Lösung $y_0(x)$ ($y_0(x) = c_1^{(0)}y_1(x) + c_2^{(0)}y_2(x)$ d. h. $y_0(x_0) = 0$) der Differential gleichung $L[y] = 0$, welche im Intervall I von Null verschieden ist (Lemma 1)

Zeigen wir noch, dass $y_1(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist. (Wenn $y_1(x) = cy_0(x)$ wo c eine Konstante ist, haben wir nichts zu beweisen). Es sei $y_1(x_2) = 0$ für $x_2 \in I$ Da

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y_1(x)}{y_0(x)} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_0 \\ y_1' & y_0' \end{vmatrix} = kv_1 \,,$$

wo k eine Konstante verschieden von Null ist, hat gemäss Lemma 5 auch die Lösung $y_0(x)$ eine Nullstelle zwischen x_0 und x_2, was im Widerspruch damit ist, dass $y_0(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist. Also $y_1(x) > 0$ für $x \in I$ ist.

Damit ist bewiesen, dass in diesem Falle jede nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ im $\mathscr{I}$ höchstens zwei oder eine zweifache Nullstellen hat.

Es sei jetz $y(x_0) = 0$ d. h. $y = k_1y_1 + k_2y_2$. Es sei $y(x)$ eine beliebige (nicht triviale) Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$. Es können diese Fälle entstehen: $y(x_0) \neq 0$ oder $y(x_0) = 0$. Im Falle, dass $y(x_0) \neq 0$ ist, kann diese Lösung höchstens zwei Nullstellen im Intervall I haben, da die Differential gleichung $L[y] = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Im Falle, dass $y(x_0) = 0$ d. h. $y = c_1y_1 + c_2y_2$ zeigen wir, dass diese Lösung ebenfalls höchsten zwei Nullstellen im Intervall $\mathscr{I}$ hat. Zu diesem Zweck zeigen wir, dass $v_1(x) \neq 0$ für $x \in I$. Indirekt. Es sei $v_1(\bar{x}) = 0$ in irgendeiner Zahl $\bar{x} \in I$. Da

$$\begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ v_0' & v_1' \end{vmatrix} = k\bar{y}(x)e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\mathrm{d}\eta},$$

wo k eine Konstante verschieden von Null ist und $v_0(x)$ ist die Lösung der Differentialgleichung (12), welche für $x \in I$ verschieden von Null ist und

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v_1(x)}{v_0(x)} \quad 0$, muss die Lösung $v_0(x)$, gemäss des Lemma 5, eine Nullstelle zwischen x_0 und $\bar{x}$ haben, was aber im Widerspruch damit ist, dass $v_0(x) \neq 0$ für $x \in I$. Das bedeutet, dass $v_1(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist. Zeigen wir jetzt, dass die Lösung $y_1(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ für $x \in I$ positiv ist. Wenn $y_1 \quad c\bar{y}$, wo c eine Konstante ist, haben wir nichts zu beweisen Es sei $y_1(\bar{x}_0) \quad 0$ für $\bar{x}_0 \in I$. Mit Rücksicht darauf, dass $\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} \quad k_2 v_1(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y_1(x)}{y(x)} \quad 0$ ist, erhalten wir aus Lemma 5, dass die Lösung y eine Nullstelle zwischen x_0 und $\bar{x}_0$ hat. Dies ist aber nicht möglich, weil $y(x) \neq 0$ für $x \in I$ Also für $x \in I$ $y_1(x) > 0$ ist. Es ist noch notwendig zu zeigen, dass die Lösungen $y(x)$ der Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_2 \neq 0$; $y(x) \neq cy(x)$ höchstens zwei Nullstellen (die Multiplizität inbegriffen) im Intervall $\mathscr{I}$ haben. Da $\begin{matrix} y & y \\ y' & y' \end{matrix} \; - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} v_1(x) \neq$ $\neq 0$ für $x \in I$, kann die Lösung $y(x)$ keine zwei einfachen und auch keine doppelten Nullstellen im Intervall I haben.

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 1. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn eine Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] \quad 0$ und eine Lösung $\bar{z}(x)$ $(\bar{v}(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x_0) = 0$, $\bar{z}(x_0) = 0$ $(v(x_0) \quad 0)$, $y(x) > 0$, $\bar{z}(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$ existiert.*

B e w e i s. Wenn die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nicht oszillatorisch ist, dann folgt gemäss dem Beweis des Satzes 1 (Fall a)) die Existenz der Lösungen $\bar{y}, \bar{z}(\bar{v})$ der gegebenen Eigenschaften. Es seien jetzt $y, \bar{z}(v)$ Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen $L[y] \quad 0$, $M[z] \quad 0$ $(M_1[v] = 0)$ mit der Eigenschaft $y(x_0) = 0$, $\bar{z}(x_0) = 0$ $(v(x_0) \quad 0)$, $y(x) > 0$, $\bar{z}(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$. Für die gegebenen Lösungen $y, z(v)$ ist $[F(\bar{y}, \bar{z})]_{x \; x_0} = \quad y'(x_0)\, \bar{z}'(x_0)$ $([F_1(\bar{y}, v)]_{x \; x_0} = - v'(x_0)\, \bar{y}'(x_0))$. Da $\bar{y}(x) > 0$, $z(x) > 0$ $(v(x) > 0)$ für $x \in I$, ist $\bar{y}'(x_0)\, \bar{z}'(x_0) \geqq 0$ $(\bar{y}'(x_0)\, v'(x_0) \geqq 0)$ und also $[F(y, \bar{z})]_{x \; x_0} \leqq 0$ $([F_1(y, v)]_{x \; x_0} \leqq 0)$. Auf Grund der Folgerung von Lemma 3 ist die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ $(F_1(y, v) = 0)$ im Intervall I nichtoszillatorisch und laut Satz 1 ist deshalb die Differentialgleichung $L[y] \quad 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Folgerung 2. *Die Differentialgleichung $L[y] \quad 0$ ist im Intervall J dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn die Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] \quad 0$ und die Lösung $\bar{z}(x)$ $(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] \quad 0$ $(M_1[v]$*

0) *mit der Eigenschaft* $[F(\bar{y}, \bar{z})]_{x\ x_0}$ 0 ($[F_1(\bar{y}, v)]_{x\ x_0} < 0$), $\bar{y}(x) > 0$, $z(x) > 0$ ($v(x) > 0$) *für* $x \in I$ *existiert.*

Der Beweis dieser Folgerung wird mit ähnlicher Erwägung wie der Beweis der Folgerung 1 durchgeführt.
Aus dem Beweis des Satzes 1 folgt

Folgerung 3. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung* $L[y]$ 0 *nichtoszillatorisch im Intervall* $\mathscr{I}$ *sei, ist dte Existenz der Zerlegung des linearen Differentialausdruckes* $L[y]$ *auf das Produki von drei linearen Differentialausdrücken erster Ordnung im Intervall* I.

Es ist möglich diese Folgerung auch so auszusprechen:

Folgerung 4. *Die Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *ist im Intervall* $\mathscr{I}$ *dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn sie im Intervall* I *nichtoszillatorisch ist.*

Bemerkung. Wenn die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist, dann geht aus der Folgerung 3 des Satzes 1 hervor, dass der Differetialausdruck $L[y]$ auf das Produkt dreier linearer Differentialausdrücke erster Ordnung im Intervall I zerlegbar ist und umgekehrt. Es ist zum Beispiel eine solche Zerlegung möglich

$$L[y] = \frac{W_3}{W_2}\frac{d}{dx}\frac{W_2^2}{W_3 y_1}\frac{d}{dx}\frac{y_1^2}{W_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}, \tag{14}$$

wo W_3 der Wronskian des Fundamentalsystems von Lösungen y_1, y_2, y_3 der Differentialgleichung $L[y]$ 0 im Intervall $\mathscr{I}$ mit der Eigenschaft (13) ist und W_2 $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$. Es ist möglich zu zeigen, dass wenn der Differentialausdruck $L[y]$ in der Form (14) zerlegbar ist, dass dann auch der Differentialausdruck $M[z]$ zerlegbar ist und es gilt

$$M[z] = \frac{1}{y_1}\frac{d}{dx}\frac{y_1^2}{W_2}\frac{d}{dx}\frac{W_2^2}{y_1 W_3}\frac{d}{dx}\frac{W_3}{W_2}z$$

für $x \in I$. Daraus folgt, dass wenn die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist, ist auch die Differentialgleichung $M[z]$ 0 ($M_1[v]$ 0, (v $z \exp(\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, d\eta)$) im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch und umgekehrt.

Satz 2. *Es existiere die Lösung* $\bar{y}(x)$ *der linearen Differentialgleichung* $L[y]$ 0 *mit der Eigenschaft* $\bar{y}(x_0)$ 0, $\bar{y}(x) > 0$ *für* $x \in I$. *Die hinreichende und notwendige Bedingung dazu, dass die lineare Differentialgleichung* $L[y]$ 0 *im Intervall* $\mathscr{I}$ *oszillatorisch sei, ist dann, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$(15)\qquad \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta}}{\bar{y}^2} F_1(y, v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta}}{\bar{y}} v'\right) + \frac{e^{\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta}}{\bar{y}}\left(p_2(x) + \frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right) v = 0$$

im Intervall I oszillatorisch sei.

Beweis. Notwendige Bedingung. Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ sei im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch. Es muss gezeigt werden, dass die Differentialgleichung (15) im Intervall I oszillatorisch ist. Beweisen wir dies indirekt. Die Differentialgleichung (15) sei im Intervall I nichtoszillatorisch. Dann existiert eine Lösung $v(x)$ dieser Differentialgleichung, welche für $x \in I$ positiv ist (Lemma 1). Da $F_1(\bar{y}, v) = 0$ für $x \in \mathscr{I}$ ist, ist auch die Differentialgleichung $F_1(y, v) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch (Lemma 4). Aus dieser Tatsache und aus dem Satz 1 erhalten wir, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist. Dies ist aber im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch ist.

Hinreichende Bedingung. Die Bedingung beweisen wir ebenfalls indirekt. Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ sei nichtoszillatorisch im Intervall $\mathscr{I}$. Das heisst, dass die Lösung $v_1(x)$ der Differentialgleichung $M_1[v] = 0$ mit der Eigenschaft $v_1(x_0) = v_1'(x_0) = 0$, $v_1''(x_0) = 1$ für $x \in I$ positiv ist (siehe Bemerkung). Da $F_1(\bar{y}, v_1) = 0$ ist die Funktion $v_1(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $F_1(\bar{y}, v) = 0$ im Intervall I. Das bedeutet aber, dass die Differentialgleichung $F_1(\bar{y}, v) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist, was im Widerspruch damit steht, dass die Differentialgleichung (15) im Intervall I oszillatorisch ist.

Damit ist der Beweis beendet.

Satz 3. *Es existiere die Lösung $\bar{z}(x)(v(x))$ der Differentialgleichung $M[z] = 0$ ($M_1[v] = 0$) mit der Eigenschaft $\bar{z}(x_0) = 0$, $\bar{z}(x) > 0$ ($v(x_0) = 0$, $v(x) > 0$) für $x \in I$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ oszillatorisch sei, ist dann, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$F(y, \bar{z}) = 0 \quad (F_1(y, v) = 0)$$

im Intervall I oszillatorisch sei.

Der Beweis dieses Satzes wird ähnlich dem Beweis des Satzes 2 durchgeführt.

Auf Grund dieser Ergebnisse werden wir uns in weiteren Arbeiten mit den konkreten Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ beschäftigen.

LITERATUR

[1] Mammana G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*, Math. Z. *33* (1931), 186–231.

[2] Сансоне Дж., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Том I, Москва 1953. (перевод с итальянсково.)

[3] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Москва 1954.

Eingegangen am 12. 6. 1968.

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského
Bratislava